Systèmes Industriels et Robotique 3A MPISIR — Automne 2025

Contrôle continu 1 du 13 novembre 2025

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*
Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ et $x_3 = 7$:

$$g(x_0) = 0, \quad g(x_1) = 1, \quad g(x_2) = 4, \quad g(x_3) = 5.$$

(1) Construire le polynôme de degré au plus 3 (noté $\Pi_3 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0, x_1, x_2 et x_3.

(2) Pour $\alpha = 1$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 2.
Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 1/4\,\pi], \quad f(x) = x^4 \sin(x), \tag{1a}$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^{1/4\,\pi} f(x)dx. \tag{1b}$$

(1) (a) Déterminer I^T, l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.

(b) On note

$$M_p = \max_{x\in[0,1/4\,\pi]} \left| f^{(p)}(x) \right|, \tag{2}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p-ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 et M_2 :

$$M_1 = 1,639\ 353\ 925\ 074\ 8\,; \tag{3a}$$

$$M_2 = 7,705\ 684\ 568\ 401\ 8. \tag{3b}$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.

(c) (i) Calculer la valeur exacte de I.

(ii) En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $\left|I^T - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(2) (a) Déterminer I_3^T, l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.

(b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.

(c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $\left|I_3^T - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \tag{4}$$

Exercice 3.

Cet exercice est difficile et on pourra admettre certains résultats.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient : pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x_i)_{0 \le i \le n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i \neq x_j \Longrightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_n] = D)\,. \tag{5}$$

(1) Nous étudions deux cas particuliers dans cette question.

(a) Commençons par traiter le cas particulier $n = 0$. On a donc

$$\exists D \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f[x_0] = D. \tag{6}$$

Montrer que les fonctions constantes sont les seules vérifiant (6).

(b) Continuons avec le cas particulier $n = 1$. On a donc

$$\exists D \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \quad (x_0 \neq x_1 \Longrightarrow f[x_0, x_1] = D)\,. \tag{7}$$

On raisonnera dans cette question par analyse/synthèse (ou unicité/existence).

(i) En supposant que f vérifie (7), montrer que, nécessairement f est affine. On pourra fixer $x_1 \in \mathbb{R}$ et déterminer la valeur de $f(x_0)$ en fonction de x_0.

(ii) Réciproquement, montrer que toute fonction affine vérifie (7).

(2) Étudions maintenant le cas général $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

(a) Fixons $(x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i \neq x_j. \tag{8}$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe g_n et h_{n-1}, deux fonctions polynômiales de degrés respectifs n et $n-1$, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}, \quad f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f(x_0) + h_{n-1}(x_0)}{g_n(x_0)}. \tag{9}$$

On posera par convention, $h_{-1}(x_0) = 0$.

(b) On raisonnera là encore par analyse/synthèse (ou unicité/existence).

   (i) En supposant que f vérifie (5), alors nécessairement $f(x_0)$ est un polynôme en x_0, de degré n, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.

   (ii) Réciproquement, montrer que tout polynôme de degré au plus n vérifie (5).

   (iii) Conclure.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`