Systèmes Industriels et Robotique 3A MPISIR — Automne 2025

Corrigé du contrôle continu 1 du 13 novembre 2025

Correction de l'exercice 1.

(1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 3) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-3)\,(x-5)\,(x-7)}{(-1-3)\,(-1-5)\,(-1-7)},\\
l_1(x) &= \frac{(x+1)\,(x-5)\,(x-7)}{(3+1)\,(3-5)\,(3-7)},\\
l_2(x) &= \frac{(x+1)\,(x-3)\,(x-7)}{(5+1)\,(5-3)\,(5-7)},\\
l_3(x) &= \frac{(x+1)\,(x-3)\,(x-5)}{(7+1)\,(7-3)\,(7-5)}.
\end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = -\frac{1}{192}\,x^3 + \frac{5}{64}\,x^2 - \frac{71}{192}\,x + \frac{35}{64}, \tag{2a}$$

$$l_1(x) = 1/32\,x^3 - \frac{11}{32}\,x^2 + \frac{23}{32}\,x + \frac{35}{32}, \tag{2b}$$

$$l_2(x) = -1/24\,x^3 + 3/8\,x^2 - \frac{11}{24}\,x - \frac{7}{8}, \tag{2c}$$

$$l_3(x) = \frac{1}{64}\,x^3 - \frac{7}{64}\,x^2 + \frac{7}{64}\,x + \frac{15}{64}. \tag{2d}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 3, $\Pi_3(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_3(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{3}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_3(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x) + g(x_3)l_3(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_3(g)(x) = -\frac{11}{192}\,x^3 + \frac{39}{64}\,x^2 - \frac{109}{192}\,x - \frac{79}{64}. \tag{4}$$

$x_i \setminus k$	0	1	2	3
$x_0 = -1$	$\boxed{0}$			
		$\boxed{1/4}$		
$x_1 = 3$	1		$\boxed{\frac{5}{24}}$	
		$3/2$		$\boxed{-\frac{11}{192}}$
$x_2 = 5$	4		$-1/4$	
		$1/2$		
$x_3 = 7$	5			

Tableau 1. Différences divisées de g.

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_3(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{5}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_3(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + g[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} &x - x_0 = x + 1, \\ &(x - x_0)(x - x_1) = x^2 - 2\,x - 3, \\ &(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x^3 - 7\,x^2 + 7\,x + 15. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

(2) Pour $\alpha = 1$, on obtient alors :

$$\Pi_3(g)(\alpha) = -5/4 \approx -1,250\ 000,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) En utilisant le tableau 4.1 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = \frac{1}{4096}\,\pi^5\sqrt{2} \tag{6}$$

soit

$$I^T = 0,105\ 658\ 493\ 304\ 81. \tag{7}$$

(b) On note

$$a = 0, \quad b = 1/4\,\pi. \tag{8}$$

Le tableau 4.2 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{9}$$

où η appartient à $]a,b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{10}$$

Grâce à (8) et et aux valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0,311\ 099\ 723\ 6. \tag{11}$$

(c) (i) On obtient

$$I = 24 + 3/8\,\sqrt{2}\pi^2 - 3\,\sqrt{2}\pi - 12\,\sqrt{2} - \frac{1}{512}\,\sqrt{2}\pi^4 + 1/32\,\sqrt{2}\pi^3, \tag{12a}$$

soit encore

$$I = 0,036\ 176\ 224\ 200\ 4. \tag{12b}$$

(ii) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |0,036\ 176\ 224\ 200\ 4 - 0,105\ 658\ 493\ 304\ 8| = 0,069\ 482\ 269\ 104\ 4$$

qui est inférieure à celle donnée par (11).

(2) (a) En utilisant le tableau 4.3 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = 1/24\,\pi\left(\frac{1}{512}\,\sqrt{2}\pi^4 + \frac{1}{10368}\,\pi^4 \sin(1/12\,\pi) + \frac{1}{1296}\,\pi^4\right) \tag{13}$$

soit

$$I_3^T = 0,045\ 376\ 395\ 598\ 46. \tag{14}$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1/4\,\pi. \tag{15}$$

Le tableau 4.4 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{16}$$

où η appartient à $[A,B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{17}$$

soit

$$h = \frac{(1/4\,\pi) - (0)}{3},$$

et donc

$$h = 0,261\ 799\ 387\ 799\ 1. \tag{18}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \tag{19}$$

En utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 3,456\ 663 \times 10^{-2}. \tag{20}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |0,036\ 176\ 224\ 200\ 4 - 0,045\ 376\ 395\ 598\ 5| = 9,200\ 170 \times 10^{-3}$$

qui est inférieure à celle donnée par (20).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (19) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (17),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{21}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3),

$$N = 5578. \tag{22}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{5578}^T = 0,036\ 176\ 226\ 908\ 846,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{5578}^T - I\right| = 2,708\ 408\ 7 \times 10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4) de l'énoncé.

Correction de l'exercice 3.

(1) (a) Pour $n = 0$, on a d'après l'équation (3.37) du cours et l'équation (6) de l'énoncé, on a donc évidemment :

$$\exists D \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = D, \tag{23}$$

ce qui permet de conclure.

(b) On suppose dans cette question que $n = 1$.

Il suffit de raisonner par analyse/synthèse, ce qui revient à montrer condition nécessaire/suffisante ou encore unicité/existence.

(i) Soit f définie sur $\mathbb{R}$. Notons, grâce à l'équation (3.38) du cours, que l'équation (7) de l'énoncé est équivalente à

$$\exists D \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \quad \left(x_0 \neq x_1 \Longrightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = D\right), \tag{24}$$

Supposons que l'équation (24) ait lieu.

Nous proposons deux variantes.

(A) Notons que, d'après l'équation (24), pour tout x_0 différent de x_1, on a

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leq |D||x_0 - x_1|,$$

ce qui est encore vrai pour $x_0 = x_1$ et tout cela entraîne que

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \tag{25}$$

Fixons $x_1 \in \mathbb{R}$. D'après l'équation (24), pour tout x_0 différent de x_1, on a

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = D, \tag{26}$$

ce qui implique

$$f(x_0) - f(x_1) = D(x_0 - x_1),$$

et donc

$$f(x_0) = D(x_0 - x_1) + f(x_1),$$

soit encore, en posant $\alpha = D$ et $\beta = f(x_1) - x_1 D$,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}, \quad f(x_0) = \alpha x_0 + \beta. \tag{27}$$

Notons que α est constant et que β dépend de x_1 mais est bien sûr indépendant de x_0. (27) est vraie pour tout x_0 différent de x_1 mais, d'après (25), c'est encore vrai par continuité, quand x_0 tend vers x_1. Ainsi (27) est aussi vraie en x_1. On a donc

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = \alpha x_0 + \beta. \tag{28}$$

ce qui est équivalent à f est affine.

(B) Comme l'a proposé Basile Volbrecht, étudiant en 3A Matériaux, lors de l'examen d'Automne 2025 (en MNBmater), on peut aussi remarquer que (26) implique en passant à la limite $x_1 \to x_0$ avec x_1 différent de x_0

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_1 \neq x_0}} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = D.$$

Cette équation ne traduit rien d'autre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = D$. Cela étant vrai pour tout x_0, par intégration (par rapport à x_0), on a

$$f(x_0) = Dx_0 + K,$$

ce qui est équivalent à f est affine.

(ii) Évidemment, dans l'autre sens, cela est immédiat. Si f est affine (28), implique *a fortiori* pour tout x_0 différent de x_1, $(f(x_0) - f(x_1)/(x_0 - x_1) = \alpha$, ce qui implique l'équation (24).

(2) (a) Notons que d'après l'hypothèse (8) de l'énoncé, la différence divisée $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ est bien définie pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe g_n et h_{n-1}, deux fonctions polynômiales de degrés respectifs n et $n-1$, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ telles qu'ait lieu l'équation (9) de l'énoncé.

Pour $n=0$, c'est immédiat en posant $h_{-1}(x_0)=0$ et $g_0(x_0)=1$ puisque

$$f[x_0]=f(x_0)=\frac{f(x_0)+h_{-1}(x_0)}{g_0(x_0)},$$

ce qui est bien l'équation (9) de l'énoncé pour $n=0$.

Supposons maintenant qu'ait lieu l'équation (9) de l'énoncé pour un entier $n\in\mathbb{N}$ donné et démontrons-la pour $n+1$. D'après l'équation (3.40) du polycopié de cours, on a, pour $x_0\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$, successivement

$$f[x_0,\dots,x_{n+1}]=\frac{f[x_0,\dots,x_n]-f[x_1,\dots,x_{n+1}]}{x_0-x_{n+1}},$$

d'après l'hypothèse de récurrence :

$$=\frac{\frac{f(x_0)+h_{n-1}(x_0)}{g_n(x_0)}-f[x_1,\dots,x_{n+1}]}{x_0-x_{n+1}},$$

et donc

$$f[x_0,\dots,x_{n+1}]=\frac{f(x_0)+h_{n-1}(x_0)-g_n(x_0)f[x_1,\dots,x_{n+1}]}{g_n(x_0)(x_0-x_{n+1})},\tag{29}$$

Définissons $h_n(x_0)$ et $g_{n+1}(x_0)$ par

$$\begin{aligned}h_n(x_0)&=h_{n-1}(x_0)-g_n(x_0)f[x_1,\dots,x_{n+1}],\\ g_{n+1}(x_0)&=g_n(x_0)(x_0-x_{n+1}),\end{aligned}$$

dont on vérifie qu'elles sont polynômiales en x_0 de degrés respectifs n et $n+1$, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1\leq i\leq n+1}\in\mathbb{R}^{n+1}$. Notons pour cela que $f[x_1,\dots,x_{n+1}]$ ne dépend que de $(x_i)_{1\leq i\leq n+1}$. Ainsi, (29) se met bien sous la forme de l'équation (9) de l'énoncé et l'hypothèse de récurrence est montrée au rang $n+1$.

(b) (i) Supposons que f vérifie (5) de l'énoncé. On admet que l'expression $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ est continue par rapport à chacun de ses arguments. Voir [BM03, chapitre 2, exercice corrigé 2.8 p. 56 et p. 247, exercice corrigé 3.2 p. 119 et 260, TP 2.F p. 67] et [CM84, chapitre 1]. Par continuité en x_0, on déduit de l'équation (5) de l'énoncé, que

$$\forall (x_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^{n+1},\quad (\forall (i,j)\in\{1,\dots,n\},\quad x_i\neq x_j\Longrightarrow \forall x_0\in\mathbb{R},\quad f[x_0,x_1,\dots,x_n]=D)\,.\tag{30}$$

D'après l'équation (9) de l'énoncé, on a

$$\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\},\quad D=\frac{f(x_0)+h_{n-1}(x_0)}{g_n(x_0)},\tag{31}$$

où D est indépendant de $(x_i)_{0\leq i\leq n+1}\in\mathbb{R}^{n+1}$ et g_n et h_{n-1}, sont deux fonctions polynômiales de degrés respectifs n et $n-1$, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n$. De (31), on déduit que

$$\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\},\quad f(x_0)+h_{n-1}(x_0)=g_n(x_0)D,$$

et d'où

$$\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\},\quad f(x_0)=-h_{n-1}(x_0)+g_n(x_0)D,\tag{32}$$

expression polynômiale en x_0, de degré au plus n, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n$. Fixons désormais $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n$. Par continuité de la fonction constante

D et des fonctions polynômiales g_n et h_{n-1} en x_0 ainsi que (30), on déduit de (32) que f est continue en chacun des x_i, pour $1 \leq i \leq n$ et, par continuité que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = -h_{n-1}(x_0) + g_n(x_0)D, \tag{33}$$

expression polynômiale en x_0, de degré au plus n, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2. Comme l'a suggéré Antoine Grimoult, étudiant en 3A Matériaux, lors de l'examen d'Automne 2025 (en MNBmater), on peut aussi raisonner comme dans la question 1(b)iB et se passer du résultat établi en question 2a en raisonnant comme suit. Cependant, contrairement à la question 1(b)iA, Il nous faut supposer en outre que

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R}. \tag{34}$$

Fixons x_0 et, dans l'équation (5) de l'énoncé, on fait tendre chacun des x_i pour $i \neq 0$ vers x_0 ce qui donne

$$\lim_{\substack{x_i \to x_0 \\ x_i \neq 0 \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}}} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = D. \tag{35}$$

Or, sous l'hypothèse (34), on a

$$\lim_{\substack{x_i \to x_0 \\ x_i \neq 0 \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}}} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{36}$$

Voir les références introduite en début de question 2(b)i. Ainsi, d'après (35) et (36), on a

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x_0) = n!D.$$

Par n intégrations successives par rapport à x_0, on en déduit que $f(x_0)$ est polynômiale en x_0, de degré au plus n.

(ii) Soit f un polynôme de degré au plus n. Considérons $(x_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}, \quad x_i \neq x_j, \tag{37}$$

et p_n le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Par unicité [1] du polynôme d'interpolation, on a donc, puisque f un polynôme de degré au plus n,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_n(x) = f(x). \tag{38}$$

Les coefficients de p_n dépendent *a priori* de $(x_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. D'après la formule (3.48) du polycopié de cours, le coefficient dominant de p_n vaut $D = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ qui, selon (38), est aussi le coefficient dominant de f, qui naturellement, ne dépend pas de $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Ainsi, on a bien montré l'équation (5) de l'énoncé.

(iii) D'après les questions 2(b)i et 2(b)ii, on a bien montré que toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $D \in \mathbb{R}$ tel qu'ait lieu l'équation (5) de l'énoncé, sont les fonctions polynômiales de degré au plus n.

1. Puisque f et p_n sont deux polynômes de degré au plus n vérifiant toutes les deux $p_n(x_i) = f(x_i)$, elles ne peuvent être qu'égales.

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4^{e} étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[CM84] M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.