

Contrôle continu 2 du 8 janvier 2026

Durée : 1.5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet***Calculatrice autorisée (hors QCM) :** OUI ☒ NON ☐*Tout type***Exercice 1.**

Voir sujet de QCM n° 4 distribué.

*Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM. Les réponses du QCM se font exclusivement sur la ou les feuilles du QCM prévu et en aucun cas sont à reporter sur votre copie habituelle.***Exercice 2.**

On considère la fonction

$$f(t) = te^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

- (1) Calculer la transformée de Laplace de f , notée $\mathcal{L}\{f\}(s)$.
- (2) En déduire la transformée de Laplace de la fonction

$$g(t) = t^2 e^{-2t}.$$

- (3) À l'aide de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = t, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 3.*On pourra consulter le rappel de cours donné page 2.*Soit f , 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f(t) = t^2.$$

- (1) Déterminer les coefficients de Fourier de f .

(2) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Proposition 1. Soit f , une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique, de carré localement intégrable. On pose,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (1a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (1b)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (1c)$$

Alors on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2. \quad (2)$$

De plus, si f est dérivable à droite et à gauche, admet une limite à droite et à gauche en t , alors

$$\frac{1}{2} (f(t+0) + f(t-0)) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (3)$$

De plus, si f est paire

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt, \quad (4a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (4b)$$

$$b_n = 0, \quad (4c)$$

et si f est impaire

$$a_0 = 0, \quad (5a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 0, \quad (5b)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (5c)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>