

Corrigé du contrôle continu 2 du 08 janvier 2026**Correction de l'exercice 1.**

Voir correction du QCM n° 4 en date du 08 janvier 2026, disponible sur Internet.

Correction de l'exercice 2.

(1) On rappelle que :

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

et la propriété de décalage :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a).$$

Ainsi :

$$\mathcal{L}\{te^{-2t}\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s+2) = \frac{1}{(s+2)^2}.$$

(2) On sait que :

$$\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}.$$

En utilisant la propriété de décalage :

$$\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\}(s) = \frac{2}{(s+2)^3}.$$

(3) On applique la transformée de Laplace à l'équation :

$$y'(t) + 2y(t) = t.$$

On obtient :

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Comme $y(0) = 0$, il vient :

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Donc :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}.$$

Décomposons en éléments simples :

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}.$$

On trouve :

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Ainsi :

$$Y(s) = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)}.$$

Par transformée inverse :

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Correction de l'exercice 3.

On pourra consulter le rappel de cours donné page 4.

- (1) La fonction f est continue donc ses coefficients de Fourier sont définis et d'après la propriété 2 du cours, on a, puisque f est paire,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 dt,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0 = \frac{\pi^2}{3}. \quad (1)$$

On a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0, \quad (2)$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt.$$

On calcule

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt, \quad (3)$$

par une intégration par partie tabulaire (voir par exemple [Bas22a, le tableau 3.1 page 24 et la formule (3.5) du Chapitre 3]), donnée dans le tableau 1.

Étapes (k)	signe $(-1)^k$	Dérivées (D_k)	Primitives (I_k)	produit $(-1)^k D_k(x) I_{k+1}(x)$
0	$\boxed{+}_0$	$\boxed{t^2}_0$	$\cos(nt)$	
1	$\boxed{-}_1$	$\boxed{2t}_1$	$\boxed{\frac{1}{n} \sin(nt)}_0$	$\boxed{\frac{t^2}{n} \sin(nt)}_0$
2	$\boxed{+}_2$	$\boxed{2}_2$	$\boxed{-\frac{1}{n^2} \cos(nt)}_1$	$\boxed{\frac{2t}{n^2} \cos(nt)}_1$
3	$\boxed{-}_3$	$\boxed{0}_3$	$\boxed{-\frac{1}{n^3} \sin(nt)}_2$	$\boxed{-\frac{2}{n^3} \sin(nt)}_2$

TABLEAU 1. Tableau pour l'intégration par partie tabulaire pour calculer $\mathcal{I}$ donnée par (3).

Après simplification, il vient

$$\mathcal{I} = \left[\frac{2t}{n^2} \cos(nt) \right]_{t=0}^{t=\pi},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n. \quad (4)$$

- (2) (a) Grâce à la formule du cours (7) en $t \in]-\pi, \pi]$, il vient, en utilisant (1), (2) et (4) puisque f est continue

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt).$$

et, en particulier, pour $t = 0$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

dont on déduit la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Notons qu'on sait *a priori* que cette série est convergente car elle est absolument convergente (voir par exemple [Bas22a, l'exemple 9.19 page 89 du Chapitre 9]).

(b) Grâce à la formule du cours (égalité de Parseval) (6), il vient, en utilisant (1), (2) et (4)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^4 dt = \frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}$$

et donc

$$\frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

donc on déduit la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Notons qu'on sait *a priori* que cette série est convergente (voir par exemple [Bas22a, l'exemple 9.19 page 89 du Chapitre 9]).

Remarque 1. En utilisant les polynômes de Bernoulli, il est possible de généraliser le calcul de sommes du type

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}, \quad S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2p}},$$

pour toute valeur de $p \in \mathbb{N}^*$. Voir par exemple [Bas22b, la section "Application : calcul des séries harmoniques d'ordre pair et les séries alternées associées" dans l'annexe "Quelques calculs explicites de sommes de Séries"].

Proposition 2. Soit f , une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique, de carré localement intégrable. On pose,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (5a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (5b)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (5c)$$

Alors on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2. \quad (6)$$

De plus, si f est dérivable à droite et à gauche, admet une limite à droite et à gauche en t , alors

$$\frac{1}{2} (f(t+0) + f(t-0)) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (7)$$

De plus, si f est paire

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt, \quad (8a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (8b)$$

$$b_n = 0, \quad (8c)$$

et si f est impaire

$$a_0 = 0, \quad (9a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 0, \quad (9b)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (9c)$$

Références

- [Bas22a] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.
- [Bas22b] J. BASTIEN. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3*. Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Mécanique 4A : Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3". 2022. 269 pages.