Mathématiques Pour l'Ingénieur MPISIR | Automne 2024

QCM (maison) pour le 15 janvier 2025

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 1, section 1.2

Question 1 Si f est une fonction définie en x_0, elle est nécessairement continue en x_0.

☐ C'est faux ☐ C'est vrai

Question 2 ♣ La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

☐ C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 0 en zéro.
☐ C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 1 en zéro.
☐ C'est vrai
☐ C'est faux
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 La fonction signe est continue sur $\mathbb{R}$.

☐ C'est vrai ☐ C'est faux

Chapitre 1, section 1.3

Question 4 Si une fonction est dérivable en x_0, elle est alors

☐ discontinue en x_0 ☐ continue en x_0

Question 5 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$.

☐ C'est vrai ☐ C'est faux

Question 6 ♣ La fonction $f\ : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur

☐ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a, Alors

☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Chapitre 1, section 1.4

Question 8 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

☐ admet un développement limité à l'ordre 6 ☐ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

Question 9 La fonction $f\ : x \mapsto \sin(\tan x)$ admet à l'ordre 7, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{1}$$

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{2}$$

☐
$$x + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{3}$$

Question 10 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

☐
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Chapitre 2, section 2.2

Question 11 La solution de l'équation différentielle

$$-y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

est donnée par $y(t) = -\frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \left(1/2\,t^2 + t + 1\right)$.

☐ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Question 12 La solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t)\,,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2,$$

est donnée par $y(t) = \left(2 - 1/5\,e^1\right) e^{3/2} e^{-3/2\,t} + 1/5\,e^t$.

☐ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Question 13 La solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t),$$

avec la condition initiale

$$y(t_0) = y_0.$$

☐ existe et est unique. ☐ existe mais n'est pas nécessairement unique.
☐ n'existe pas nécessairement.

Question 14 Si on choisit une fonction z dérivable sur $[t_0, +\infty[$, on peut déterminer a, b, y_0 et t_0 et f telle que z soit solution de de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad az'(t) + bz(t) = f(t), \tag{1a}$$

avec la condition initiale

$$z(t_0) = y_0. \tag{1b}$$

☐ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Chapitre 3, section 3.2

Question 15 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4,$$

données par

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 4, \quad f(x_2) = 37, \quad f(x_3) = 172, \quad f(x_4) = 529.$$

Π_4, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

- ☐ $2\,x^4 + x^2 + 1$
- ☐ $-8\,x^4 - 4\,x^2 + 1$
- ☐ 0
- ☐ x^7

Question 16 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ données par

$$f(x_0) = 7, \quad f(x_1) = 11, \quad f(x_2) = 21.$$

Π_2, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$, est égal à

- ☐ $3\,x^2 + x + 7$
- ☐ $-12\,x^2 - 4\,x + 7$
- ☐ $12\,x^2 + 4\,x + 7$
- ☐ $-6\,x^2 - 2\,x + 7$

Question 17 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5,$$

données par

$$f(x_0) = 5, \quad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = -9, \quad f(x_3) = -22, \quad f(x_4) = -39.$$

Π_4, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

- ☐ $-2\,x^2 + x + 6$
- ☐ $2\,x^4 + 37\,x^3 + 58\,x^2 - 15\,x + 10$
- ☐ $2\,x^4 + 29\,x^3 + 43\,x^2 - 11\,x + 9$
- ☐ $2\,x^4 + 13\,x^3 + 13\,x^2 - 2\,x + 7$

Question 18 Parmi les figures 1 de la page 4, celle qui représente les polynômes de Lagrange relatifs au support défini par les points :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

est la figure :

☐ 1(a) ☐ 1(b) ☐ 1(c) ☐ 1(d)

Question 19 ♣ Soient A et B deux points distincts du plan. L'équation de la droite passant par les points A et B est donnée

- ☐ si $x_A = x_B$, par $x = x_A$.
- ☐ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + y_A - x_A\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
- ☐ si $x_A \neq x_B$ par :
$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
- ☐ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}.$$
- ☐ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = y_A\frac{x - x_B}{x_A - x_B} + y_B\frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$
- ☐ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = y_A + \frac{Y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

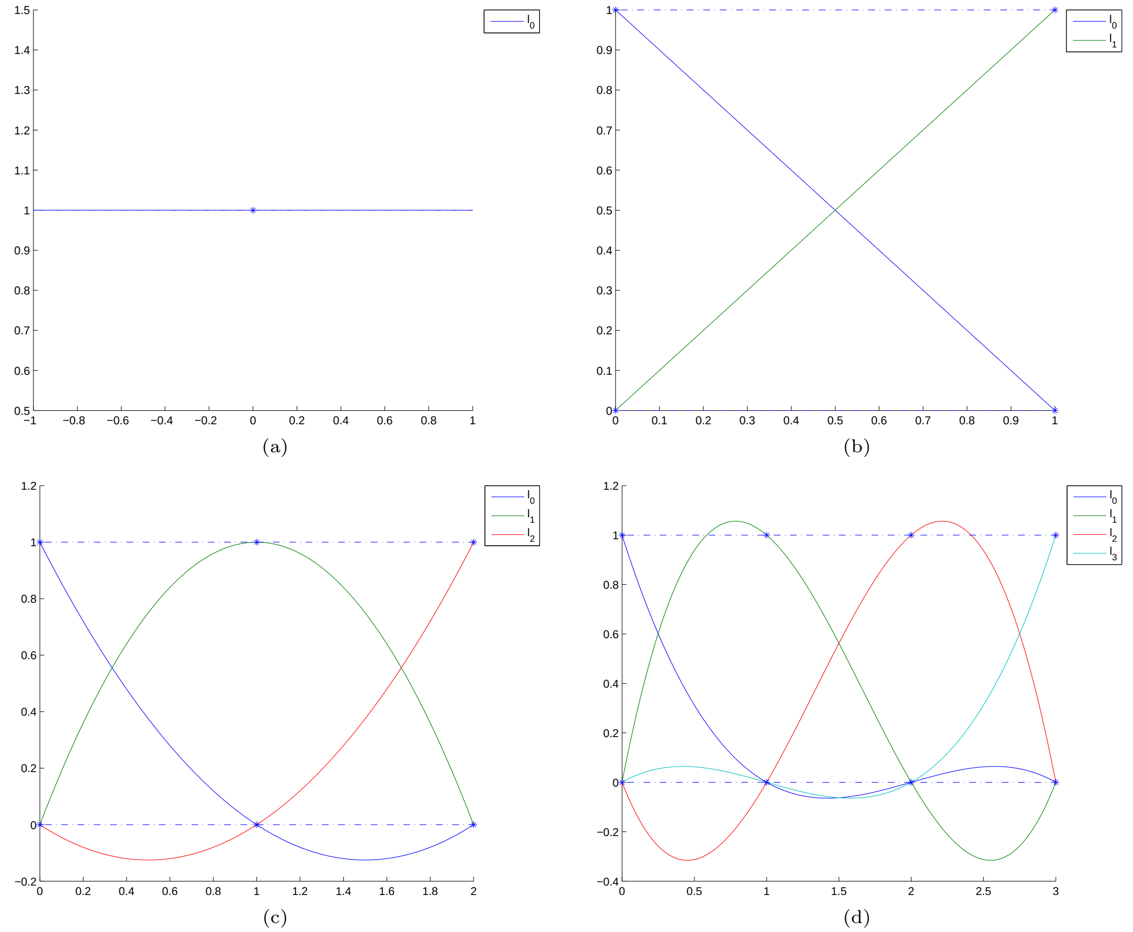

FIGURE 1 – Quelques tracés de polynômes de Lagrange l_i (question 18).

Chapitre 3, section 3.4

Question 20 Soient $x_0 = A < x_1 < \cdots < x_N = B$ des points qui divisent $I = [A, B]$. On note $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ les sous-intervalles de longueur h_j et $h = \max\limits_{1\leq j\leq N} h_j$. Sur chaque sous-intervalle I_j, on interpole $f_{|_{I_j}}$ par un polynôme de degré n avec des points équirépartis. Le polynôme par morceaux est noté $\Pi_n^h f(x)$. Un majorant de l'erreur commise dans l'interpolation par morceaux est donné par

☐ $\frac{1}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| h^{n+1}$

☐ $\frac{(B-A)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \frac{1}{N^{n+1}}$

☐ $\frac{1}{8(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+3)}(x)\right| h^{n+1}$

Chapitre 4, section 4.1

Question 21 La méthode d'intégration élémentaire du point milieux sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

☐ $(b-a)f((a+b)/2)$ ☐ $(b-a)f(a)$ ☐ $(b-a)f((a+b)/3)$

Question 22 La méthode élémentaire de Simpson est plus précise que la méthode élémentaire du rectangle.

☐ C'est faux. ☐ Cest vrai.