Université Claude Bernard Lyon 1

Mathématiques Pour l'Ingénieur MPISIR — Automne 2024

# QCM (maison) pour le 15 janvier 2025

**Important :**
**Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.**

**Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.**

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

## Chapitre 1, section 1.2

**Question 1** Si $f$ est une fonction définie en $x_0$, elle est nécessairement continue en $x_0$.

- [x] C'est faux
- [ ] C'est vrai

***Explication :*** Voir la section 1.2 du cours.

**Question 2 ♣** La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- [ ] C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 0 en zéro.
- [x] C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 1 en zéro.
- [ ] C'est vrai
- [x] C'est faux
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

***Explication :*** Elle n'est pas définie en zéro mais on peut la prolonger par continuité en zéro, par sa limite qui vaut 1. Voir l'exemple 1.3 du cours.

**Question 3** La fonction signe est continue sur $\mathbb{R}$.

- [ ] C'est vrai
- [x] C'est faux

***Explication :*** Elle est discontinue en zéro. Voir l'exemple 1.1 du cours.

## Chapitre 1, section 1.3

**Question 4** Si une fonction est dérivable en $x_0$, elle est alors

- [ ] discontinue en $x_0$
- [x] continue en $x_0$

***Explication :*** Voir section 1.3.1. du cours. En effet, on a

$$f(b) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (b - a),$$

et si $f$ est dérivable, alors d'après (1.8), on a à la limite $b \to a$ :

$$\lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} f(b) - f(a) = 0.$$

**Question 5** La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$.

- [x] C'est vrai
- [ ] C'est faux

***Explication :*** Voir par exemple la formule (1.22f)du cours avec $\alpha = 1/2$ .

**Question 6 ♣** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur

■ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

***Explication :*** La fonction $f$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ , de dérivée $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$. Voir par exemple la formule (1.22f) du cours avec $\alpha = 1/2$ . En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty. \tag{1}$$

On peut aussi écrire

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (1).

**Question 7 ♣** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0,a]$, nulle en 0 et en $a$,
Alors

■ elle admet un maximum positif sur $[0,a]$.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0,a]$.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0,a[$.
☐ elle admet un maximum positif sur $[0,a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0,a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0,a[$, atteint en un unique point.
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

***Explication :*** La fonction atteint ses bornes sur $[0,a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0,a]$ qui positif puisque $f$ est positive. Son maximum n'est pas nécessairement atteint en $]0,a[$ et n'est pas nécessairement strictement positif (si par exemple la fonction est nulle $[0,a]$). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de $\pi$). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif sur $[0,a]$", les autres réponses étant fausses.

## Chapitre 1, section 1.4

**Question 8** Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point $x_0$

☐ admet un développement limité à l'ordre 6 ■ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.
***Explication :*** Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x-x_0)^3 = o((x-x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x-x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x-x_0)^6$ du développement limité. Voir section 1.4.1 du cours.

**Question 9** La fonction $f : x \mapsto \sin(\tan x)$ admet à l'ordre 7, en zéro le développement limité suivant

■
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{1}$$

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{2}$$

☐
$$x + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{3}$$

***Explication :*** La fonction $f$ est impaire : son dévelopement limité ne contient que des termes associés à des puisssances impaires. Ainsi, on pouvait sans calcul et d'emblée éliminer la réponse (2) qui contenait un terme associé à une puissance paire. Par ailleurs, la réponse (3) contient un terme $\frac{1}{6x^3}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand $x$ tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque $f$ est continue en zéro. La seule bonne réponse possible (1) venait de la CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.23.

**Question 10** La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \qquad (1)$$

☒
$$x^6 + o\left(x^6\right) \qquad (2)$$

***Explication :*** la réponse (1) impliquerait qu'en zéro, $f$ serait équivalent à $x^5$. Or, en zéro, $x \mapsto \sin x$ est équivalente à $x$ donc $f$ est équivalent à $x^6$. La seule bonne réponse possible (2) venait de la CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.26.

## Chapitre 2, section 2.2

**Question 11** La solution de l'équation différentielle

$$-\,y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

est donnée par $y(t) = -\frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \left(1/2\,t^2 + t + 1\right)$.

☒ C'est vrai. ☐ C'est faux.

***Explication :*** Ici, ce n'est pas la peine de résoudre l'équation différentielle de l'énoncé, il suffit de vérifer que la fonction $y$ donnée vérifie bien l'équation différentielle de l'énoncé ce qui est ce cas ici ! Voir la détermination de la solution dans la correction de l'exercice de TD 2.2.

**Question 12** La solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t)\,,$$

avec la condition initiale

$$y\,(1) = 2,$$

est donnée par $y(t) = \left(2 - 1/5\,e^1\right) e^{3/2} e^{-3/2\,t} + 1/5\,e^t$.

☒ C'est vrai. ☐ C'est faux.

***Explication :*** Ici, ce n'est pas la peine de résoudre l'équation différentielle de l'énoncé, il suffit de vérifer que la fonction $y$ donnée vérifie bien l'équation différentielle de l'énoncé ce qui est ce cas ici ! Voir la détermination de la solution dans la correction de l'exercice de TD 2.3, question 1.

**Question 13** La solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t),$$

avec la condition initiale

$$y(t_0) = y_0.$$

☒ existe et est unique. ☐ existe mais n'est pas nécessairement unique.
☐ n'existe pas nécessairement.

***Explication :*** On a déterminé cette unique solution grâce aux différentes méthodes vues en cours !

**Question 14** Si on choisit une fonction $z$ dérivable sur $[t_0, +\infty[$, on peut déterminer $a$, $b$, $y_0$ et $t_0$ et $f$ telle que $z$ soit solution de de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad az'(t) + bz(t) = f(t), \tag{1a}$$

avec la condition initiale

$$z(t_0) = y_0. \tag{1b}$$

■ C'est vrai. □ C'est faux.

***Explication :*** Il suffit de prendre $a$, $b$ et $t_0$ quelconques et de poser $f(t) = az'(t) + bz(t)$ et $y_0 = f(t_0)$. Par définition de $f$, $z$ est solution de l'équation différentielle (1) !

## Chapitre 3, section 3.2

**Question 15** On connaît les valeurs d'une fonction $f$ aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$ :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4,$$

données par

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 4, \quad f(x_2) = 37, \quad f(x_3) = 172, \quad f(x_4) = 529.$$

$\Pi_4$, le polynôme d'interpolation de $f$ sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

■ $2\,x^4 + x^2 + 1$ □ $0$

□ $-8\,x^4 - 4\,x^2 + 1$ □ $x^7$

***Explication :*** On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | $\boxed{1}$ | | | | |
| | | $\boxed{3}$ | | | |
| $x_1 = 1$ | 4 | | $\boxed{15}$ | | |
| | | 33 | | $\boxed{12}$ | |
| $x_2 = 2$ | 37 | | 51 | | $\boxed{2}$ |
| | | 135 | | 20 | |
| $x_3 = 3$ | 172 | | 111 | | |
| | | 357 | | | |
| $x_4 = 4$ | 529 | | | | |

Le polynôme $\Pi_4$ ne peut valoir 0 puisque les données sont non nulles, ni $x^7$ de degré strictement supérieur à 4. On envoie au point 1 de la remarque 3.18 page 40 du cours. Ici, pour $n = 4$, le coefficient dominant de $\Pi_4$ est égal à la différence divisé $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 2$. Parmi les deux polynômes qui restent, un seul a un coefficient dominant égal à 2, c'est $2\,x^4 + x^2 + 1$. $\Pi_4$ vaut donc $2\,x^4 + x^2 + 1$. Il n'était donc pas nécessaire de calculer complétement le polynôme $\Pi_4$ !
On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme $\Pi_4$. Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points $x_i$ et ne conserver que celui pour lequel, chaque $x_i$ a pour image le $y_i$ correspondant.

**Question 16** On connaît les valeurs d'une fonction $f$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ données par

$$f(x_0) = 7, \quad f(x_1) = 11, \quad f(x_2) = 21.$$

$\Pi_2$, le polynôme d'interpolation de $f$ sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$, est égal à

- ☒ $3\,x^2 + x + 7$
- ☐ $12\,x^2 + 4\,x + 7$
- ☐ $-12\,x^2 - 4\,x + 7$
- ☐ $-6\,x^2 - 2\,x + 7$

***Explication :*** On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | $\boxed{7}$ | | |
| | | $\boxed{4}$ | |
| $x_1 = 1$ | 11 | | $\boxed{3}$ |
| | | 10 | |
| $x_2 = 2$ | 21 | | |

On envoie au point 1 de la remarque 3.18 page 40 du cours. Ici, pour $n = 2$, le coefficient dominant de $\Pi_2$ est égal à la différence divisé $f[x_0, x_1, x_2] = 3$. Parmi tous les polynômes proposés, un seul a un coefficient dominant égal à 3, c'est $3\,x^2 + x + 7$. $\Pi_2$ vaut donc $3\,x^2 + x + 7$. Il n'était donc pas nécessaire de calculer complétement le polynôme $\Pi_2$ !
On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme $\Pi_2$.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points $x_i$ et ne conserver que celui pour lequel, chaque $x_i$ a pour image le $y_i$ correspondant.

**Question 17** On connaît les valeurs d'une fonction $f$ aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq 4}$ :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5,$$

données par

$$f(x_0) = 5, \quad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = -9, \quad f(x_3) = -22, \quad f(x_4) = -39.$$

$\Pi_4$, le polynôme d'interpolation de $f$ sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

- ☒ $-2\,x^2 + x + 6$
- ☐ $2\,x^4 + 29\,x^3 + 43\,x^2 - 11\,x + 9$
- ☐ $2\,x^4 + 37\,x^3 + 58\,x^2 - 15\,x + 10$
- ☐ $2\,x^4 + 13\,x^3 + 13\,x^2 - 2\,x + 7$

***Explication :*** On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0 = 1$ | $\boxed{5}$ | | | | |
| | | $\boxed{-5}$ | | | |
| $x_1 = 2$ | 0 | | $\boxed{-2}$ | | |
| | | $-9$ | | $\boxed{0}$ | |
| $x_2 = 3$ | $-9$ | | $-2$ | | $\boxed{0}$ |
| | | $-13$ | | 0 | |
| $x_3 = 4$ | $-22$ | | $-2$ | | |
| | | $-17$ | | | |
| $x_4 = 5$ | $-39$ | | | | |

On constate que les différences divisées sont nulles à partir de la colonne correspondant à $k = 3$, autrement dit, le polynôme est de degré 2. Seul $-2\,x^2 + x + 6$ convenait. Ainsi $\Pi_4$ vaut $-2\,x^2 + x + 6$. Il était donc inutile de déterminer complétement le polynôme d'interpolation.
Autrement, on pouvait raisonner comme suit :
À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme $\Pi_4$ et on constate qu'il vaut $-2\,x^2 + x + 6$.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points $x_i$ et ne conserver que celui pour lequel, chaque $x_i$ a pour image le $y_i$ correspondant.

**Question 18** Parmi les figures 1 de la page 6, celle qui représente les polynômes de Lagrange relatifs au support défini par les points :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

est la figure :

☐ 1(a) ☐ 1(b) ■ 1(c) ☐ 1(d)

***Explication :*** Conformément au lemme 3.4 du polycopié de cours, les polynômes de Lagranges sont de degré $n$ où le nombre de points est égal à $n+1$. On a donc ici $n = 2$ et les seuls polynômes de degré 2 sont ceux de la figure 1(c), qui sont les seules paraboles. On vérifie de plus que l'on a bien l'équation (3.20) du polycopié de cours ou l'équation (3.21) du polycopié de cours. Pour vérifier tout cela, il n'est pas nécessaire de calculer les polynômes de Lagranges $l_i$ !

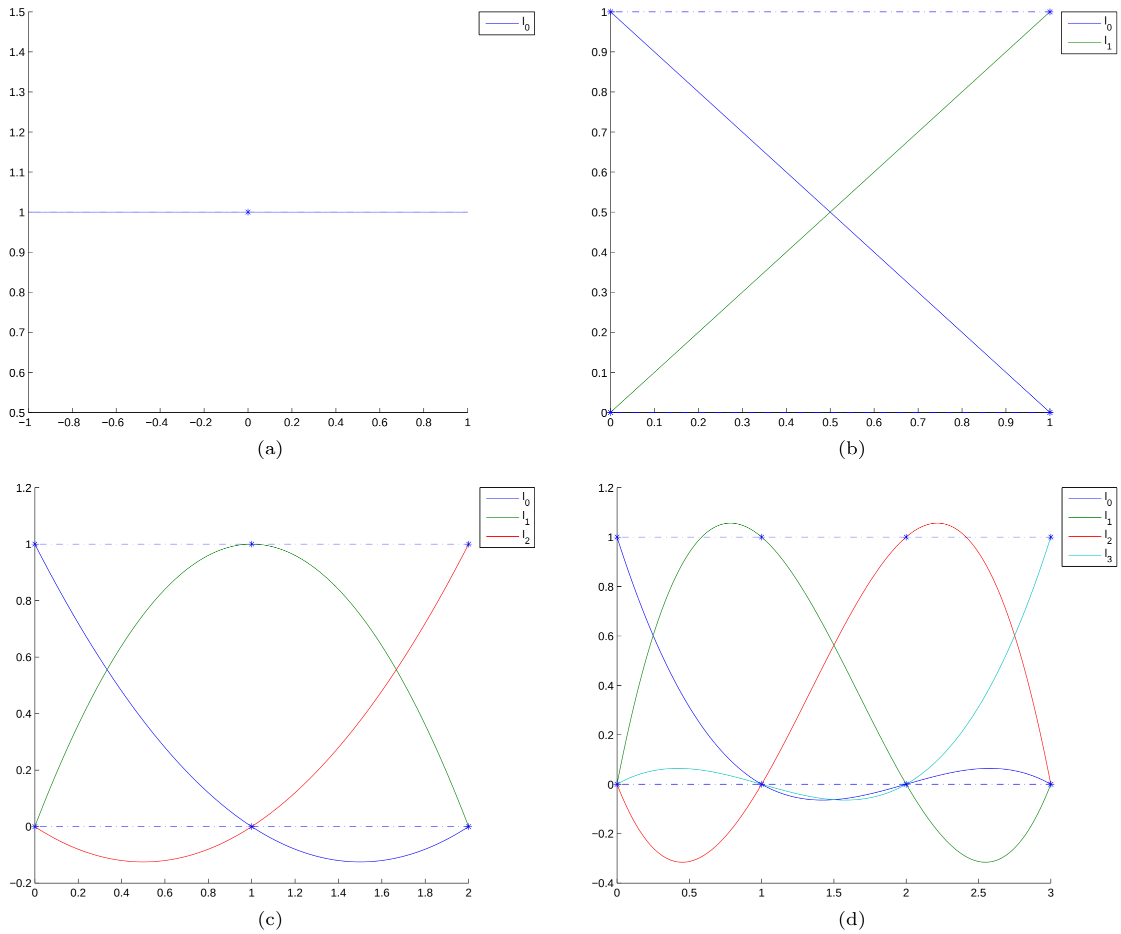


Figure 1 – Quelques tracés de polynômes de Lagrange $l_i$ (question 18).

**Question 19 ♣** Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan. L'équation de la droite passant par les points $A$ et $B$ est donnée

- ■ si $x_A = x_B$, par $x = x_A$ .
- ■ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - x_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
- ■ si $x_A \neq x_B$ par :
$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
- ■ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}.$$
- ■ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = y_A \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + y_B \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$
- ■ si $x_A \neq x_B$ par :
$$y = y_A + \frac{Y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

***Explication :*** Toutes ces équations sont correctes. On renvoie aux exemples 3.2 page 31 et 3.22 page 46 ainsi qu'à l'annexe C du cours.

## Chapitre 3, section 3.4

**Question 20** Soient $x_0 = A < x_1 < \cdots < x_N = B$ des points qui divisent $I = [A, B]$. On note $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ les sous-intervalles de longueur $h_j$ et $h = \max\limits_{1 \leq j \leq N} h_j$. Sur chaque sous-intervalle $I_j$, on interpole $f_{|I_j}$ par un polynôme de degré $n$ avec des points équirépartis. Le polynôme par morceaux est noté $\Pi_n^h f(x)$. Un majorant de l'erreur commise dans l'interpolation par morceaux est donné par

- ■ $\frac{1}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x \in [A,B]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| h^{n+1}$
- □ $\frac{(B-A)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x \in [A,B]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \frac{1}{N^{n+1}}$
- □ $\frac{1}{8(n+1)n^{n+1}} \max_{x \in [A,B]} \left| f^{(n+3)}(x) \right| h^{n+1}$

***Explication :*** Voir la proposition 3.32 du polycopié de cours.

## Chapitre 4, section 4.1

**Question 21** La méthode d'intégration élémentaire du point milieux sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

■ $(b - a)f((a + b)/2)$ □ $(b - a)f(a)$ □ $(b - a)f((a + b)/3)$

***Explication :*** Voir le tableau 4.1 du polycopié de cours.

**Question 22** La méthode élémentaire de Simpson est plus précise que la méthode élémentaire du rectangle.

□ C'est faux. ■ Cest vrai.

***Explication :*** Voir le tableau 4.2 du polycopié de cours qui fait apparaître une erreur en $(b - a)^5$ pour Simpson contre une erreur en $(b - a)^2$ pour le rectangle.