Polytech Lyon — Université Claude Bernard Lyon 1

Mathématiques Pour l'Ingénieur MPISIR — Automne 2025

QCM (maison) pour le 08 octobre 2025

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 1, section 1.2

Question 1 Si f est une fonction définie en x_0, elle est nécessairement continue en x_0.

- [x] C'est faux
- [ ] C'est vrai

Explication : Voir la section 1.2 du cours.

Question 2 ♣ La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- [ ] C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 0 en zéro.
- [x] C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 1 en zéro.
- [ ] C'est vrai
- [x] C'est faux
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Elle n'est pas définie en zéro mais on peut la prolonger par continuité en zéro, par sa limite qui vaut 1. Voir l'exemple 1.3 du cours.

Question 3 La fonction signe est continue sur $\mathbb{R}$.

- [ ] C'est vrai
- [x] C'est faux

Explication : Elle est discontinue en zéro. Voir l'exemple 1.1 du cours.

Chapitre 1, section 1.3

Question 4 Si une fonction est dérivable en a, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + o(b-a).$$

- [x] C'est vrai
- [ ] C'est faux

Explication : Ce n'est rien d'autre qu'une conséquence de (1.17) du cours.

Question 5 ♣ Pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction $f\ : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur

- [x] $\mathbb{R}_+^*$
- [ ] $\mathbb{R}$
- [ ] $\mathbb{R}_+$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction f donnée aussi par

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)},$$

n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée donnée par

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{1}$$

Voir par exemple l'annexe B du cours. En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1},$$

et donc, puisque $\alpha - 1 \in]-1,0[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \tag{2}$$

On peut aussi écrire d'après (1),

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (2).

Question 6 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0,a]$, nulle en 0 et en a, non identiquement nulle sur $]0,a[$.
Alors

- [x] elle admet un maximum positif sur $[0,a]$.
- [x] elle admet un maximum strictement positif sur $[0,a]$.
- [x] elle admet un maximum positif sur $]0,a[$.
- [x] elle admet un maximum strictement positif sur $]0,a[$.
- [ ] elle admet un maximum positif sur $[0,a]$, atteint en un unique point.
- [ ] elle admet un maximum strictement positif sur $[0,a]$, atteint en un unique point.
- [ ] elle admet un maximum positif sur $]0,a[$, atteint en un unique point.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction atteint ses bornes sur $[0,a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0,a]$ qui positif puisque f est positive. De plus, puisque f n'est pas identiquement nulle sur $]0,a[$, nulle en 0 et a, son maximum est strictement positif (sinon, elle serait nulle partout) et atteint sur $]0,a[$ (puisque ce maximum est strictement positif). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de π). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif ou strictement positif sur $[0,a]$ ou sur $[0,a]$", les autres réponses étant fausses. Notons que ce raisonnement avait été utilisé dans la correction des exercices de TD 1.30, 1.31 1.32 et 1.33.

Question 7 Un étudiant zélé tient le raisonnement suivant : "On considère f une fonction dérivable en a. D'après l'équation (1.17a) du cours, on a

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)\varepsilon(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \eta(b)$$

où $\eta(b) = (b-a)\varepsilon(b)$ qui tend vers 0 si b tend vers a d'après l'équation (1.17b), du cours. Ainsi, on peut dire que f est dérivable en b ssi

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \eta(b), \tag{1a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \eta(b) = 0, \tag{1b}$$

ce qui se substitue à l'équation (1.17) du cours." Ce raisonnement est correct.

■ non. □ oui.

Explication **:** Ce raisonnement n'est pas correct pour deux raisons.

1. Tout d'abord (1) ne permet pas de caractériser la valeur $f'(a)$ de la dérivée. Supposons en effet que l'on ait

$$f(b) = f(a) + (b-a)K + \eta(b), \tag{2a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \eta(b) = 0, \tag{2b}$$

où K est un réel donné égal à $f'(a)$. Prenons un autre réel $\widetilde{K}$ et posons

$$\widetilde{\eta}(b) = \eta(b) + (b-a)\left(K - \widetilde{K}\right),$$

qui tend vers 0 quand b tend vers a, selon (2b). Selon (2a), on a donc

$$f(b) = f(a) + (b-a)\widetilde{K} + \widetilde{\eta}(b), \tag{3a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \widetilde{\eta}(b) = 0, \tag{3b}$$

et donc la dérivée de f en a serait aussi égale à $\widetilde{K}$ et n'est donc nullement fixée.
Autrement dit l'équation (1.17) du cours assure l'unicité de la valeur de la dérivée de f en a, comme le montre le raisonnement suivant. Alors que (1) n'assure pas cette unicité. Supposons qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$f(b) = f(a) + (b-a)K_1 + (b-a)\varepsilon_1(b), \tag{4a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \varepsilon_1(b) = 0, \tag{4b}$$

et

$$f(b) = f(a) + (b-a)K_2 + (b-a)\varepsilon_2(b), \tag{5a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \varepsilon_2(b) = 0. \tag{5b}$$

Par différence entre (4a) et (5a), il vient

$$(b-a)(K_1 - K_2) + (b-a)(\varepsilon_1(b) - \varepsilon_2(b)) = 0$$

et par division par $(b-a)$ (pour $b \neq a$) :

$$K_1 - K_2 + \varepsilon_1(b) - \varepsilon_2(b) = 0,$$

et à la limite quand b tend vers a, d'après (4b)-(5b), il vient $K_1 = K_2$.

2. En outre, on peut aussi remarquer que, en posant $\widetilde{\eta}(b) = (b-a)f'(a) + \eta(b)$, (1) est équivalent à

$$f(b) = f(a) + \widetilde{\eta}(b), \tag{6a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \widetilde{\eta}(b) = 0, \tag{6b}$$

ce qui n'est rien d'autre que la continuité et non la dérivabilité de f en a !

Chapitre 1, section 1.4

Question 8 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

- ☐ admet un développement limité à l'ordre 6
- ☒ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

Explication : Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x-x_0)^3 = o((x-x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x-x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x-x_0)^6$ du développement limité. Voir section 1.4.1 du cours.

Question 9 La fonction $f\ : x \mapsto (\ln(1+x))^2$ admet à l'ordre 4, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \tag{1}$$

☐
$$\frac{1}{x^2} - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{2}$$

☐
$$1 + x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{3}$$

☒
$$x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{4}$$

Explication : la réponse (1) est un développement limité à l'ordre 3 et non à l'ordre 4. Par ailleurs, la réponse (2) contient un terme $\frac{1}{x^2}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. Enfin, la réponse (3) contient un terme constant égal à 1 égal à $f(0) = 0$, ce qui n'est donc pas possible. La seule bonne réponse possible (4) venait de la correction de l'exercice de TD 1.24.

Question 10 La fonction $f\ : x \mapsto \exp(\sin x)$ admet à l'ordre 3, en zéro le développement limité suivant

☐
$$1 + x + o\left(x\right) \tag{1}$$

☐
$$1 + \frac{1}{x}x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \tag{2}$$

☐
$$2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \tag{3}$$

☒
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \tag{4}$$

Explication : la réponse (1) est un développement limité à l'ordre 1 et non à l'ordre 3. Par ailleurs, la réponse (2) contient un terme $\frac{1}{x}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. Enfin, la réponse (3) contient un terme constant égal à 2 égal à $f(0) = 0$, ce qui n'est donc pas possible. La seule bonne réponse possible (4) venait de la correction de l'exercice de TD 1.25.

Question 11 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

☒
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Explication : la réponse (1) impliquerait qu'en zéro, f serait équivalent à x^5. Or, en zéro, $x \mapsto \sin x$ est équivalente à x donc f est équivalent à x^6. La seule bonne réponse possible (2) venait de la correction de l'exercice de TD 1.26.