POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE MPISIR

Systèmes Industriels et Robotique 3A

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

2024-2025, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 4 décembre 2024

Le lien original de ce document est le suivant :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/TDMPISIR.pdf`

Liste des Travaux Dirigés

Avant-propos

Ce polycopié constitue les TD de Mathématiques Pour l'Ingénieur du département Systèmes Industriels et Robotique 3A (2024-2025, Automne).

Ce polycopié de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Systèmes Industriels et Robotique 3A`'.
  — enfin sur '`MPISIR`'.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et développements limités

Ce TD contient de nombreux exercices, dont seule une petite partie sera traitée en séance. Charge au lecteur d'en traiter d'autres !

Notions de continuité, limite

EXERCICE 1.1.
Étudier la limite de $(x^3-1)/(x-1)$ quand x tend vers zéro.

EXERCICE 1.2.
Étudier la limite de $x^2 \sin(1/x)$ quand x tend vers zéro.

EXERCICE 1.3.
Étudier la limite de $(x^2+1)/(x^4-3x+1)$ quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 1.4.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x - \frac{1}{2}$$

Les exercices qui suivent sont facultatifs (et plus durs !).

EXERCICE 1.5.
Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 1.6.

(1) On considère la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. On utilisera le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire,

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = x$,

pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'irrationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = x$.

(2) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \times x + 1.$$

Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{R}^*$ et continue en zéro.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pourriez vous construire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur tout $\mathbb{R}$, qui soit ne soit continue qu'en n points distincts de $\mathbb{R}$ exactement et discontinue en dehors de ces points ?

Dérivation

EXERCICE 1.7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \tan\left(2x^2\right)$,

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, d) $f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$,

e) $f(x) = x^2(1+x)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 1.8. Tracer le tableau de variation de la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - x^2 - x.$$

On pourra être amené à dériver plusieurs fois g.

EXERCICE 1.9. Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x),$$

est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$.
On montrera que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (\pi - 4\sin x)\sin x.$$

Les exercices qui suivent sont facultatifs.

EXERCICE 1.10. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

a) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(x^3 + 2x - 7\right)e^x \end{array}$ b) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \cos(x) \end{array}$

EXERCICE 1.11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(b+a)h} = f'(x_0).$$

Développements limités

EXERCICE 1.12.
Trouver les limites suivantes

(1)
$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + \sin x) \operatorname{cotan} 2x$$

(2)
$$\lim_{x \to 1/2} \left(2x^2 - 3x + 1\right)\tan \pi x$$

(3)
$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

EXERCICE 1.13.

(1) Trouver la limite suivante :
$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$$
(2) Les développements limités sont-ils vraiment nécessaires ?

On pourra voir une version alternative dans l'exercice 1.14.

EXERCICE 1.14.

(1) Trouver la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3}$$

(2) Les développements limités sont-ils vraiment nécessaires ?

On pourra voir une version alternative dans l'exercice 1.13.

EXERCICE 1.15.
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

EXERCICE 1.16. Former les développements limités à l'ordre et au voisinage indiqués des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&1) \text{ ordre } 4, \text{ voisinage de } 0\ , f(x) = \ln\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right),\\
&2)\ 3,\ 0,\ \ln\big(\ln(e+x)\big),\\
&3)\ 4,\ 0,\ \frac{x}{e^x-1},\\
&4)\ 7,\ 0,\ e^{\cos x},\\
&5)\ 3,\ 2,\ x^x.
\end{aligned}$$

EXERCICE 1.17.
Reprendre l'exercice 1.4 avec les développements limités.

EXERCICE 1.18.
Déterminer le développement limité en $x = \pi/4$, à l'ordre 4 de $f(x) = \sin(x)$.
On pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes :
- On utilise les formules habituelles et l'on dérive la fonction f autant de fois que nécessaire ;
- On pose $x = \pi/4 + h$ où h tend vers zéro et on utilise la formule

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

EXERCICE 1.19.
Soit un entier $m \geq 0$. Former le développement limité de

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m,$$

à l'ordre 4 en zéro.
On pourra
— soit calculer les développements limités de $(1+x)^m$ et de $(1-x)^{-m}$ à l'ordre 4 en zéro.
— soit passer en notation exponentielle et utiliser le développement limité de la fonction exponentielle en zéro.

Applications en MNB (étude de fonctions)

EXERCICE 1.20.
On considère la fonction suivante

$$f(x) = e^{2\,x} - 2\,x - 8.$$

(1) Déterminer le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \geq 0$.

(2) Répondre à la question 1 lorsque $f(x) = \sin(x) - x$ et $f(x) = \cos(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1.21.

(1) On considère la fonction f donnée par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}(x-2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$

 (a) Montrer que la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = -3/2\,\frac{x\left(x^2 - 5 - 2\,x\right)}{\sqrt{x+1}\,(x^2+1)^{5/2}}.$$

 (b) Montrer que les racines de $x^2 - 5 - 2\,x = 0$ sont $x = 1 \pm \sqrt{(}6)$.

 (c) En déduire le tableau de variation et le graphe de f.

(2) En déduire un encadrement des zéros de f, puis les déterminer exactement.

(3) Conclure.

Développements limités (exercices facultatifs)

EXERCICE 1.22.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction

$$x \mapsto x \mapsto \tan(x)$$

EXERCICE 1.23.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction

$$x \mapsto x \mapsto \sin(\tan(x))$$

EXERCICE 1.24.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction

$$x \mapsto (\ln(1+x))^2$$

EXERCICE 1.25.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction

$$x \mapsto \exp(\sin(x))$$

EXERCICE 1.26.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 9 de la fonction

$$x \mapsto \sin^6(x)$$

Étude de fonctions (exercices facultatifs)

EXERCICE 1.27.

(1) Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(2) (a) Déduire de l'étude de f que

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad (f(x) = f(y) \text{ et } x < y) \Longrightarrow x \in]1, e[\text{ et } y > e, \tag{1.1}$$

(b) En déduire ensuite que si on cherche x et y entiers, alors

$$x = 2 \text{ et } y = 4. \tag{1.2}$$

(3) *Question facultative*

Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation :

$$(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad p^q = q^p. \tag{1.3}$$

EXERCICE 1.28.
Étudier et construire le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(\cosh x).$$

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Exercices pratiques (exercices facultatifs)

EXERCICE 1.29.

(1) Les femmes gagnent en moyenne moins que les hommes[1], plus précisément "un écart de 24 % persiste entre les deux sexes". Est-ce que cela implique que les hommes gagnent 24 % de plus ?

(2) Dans quel cas, cette dernière affirmation est-elle à peu près vraie ?

(3) Dans quel cas, cette dernière affirmation est-elle exactement vraie ?

EXERCICE 1.30.

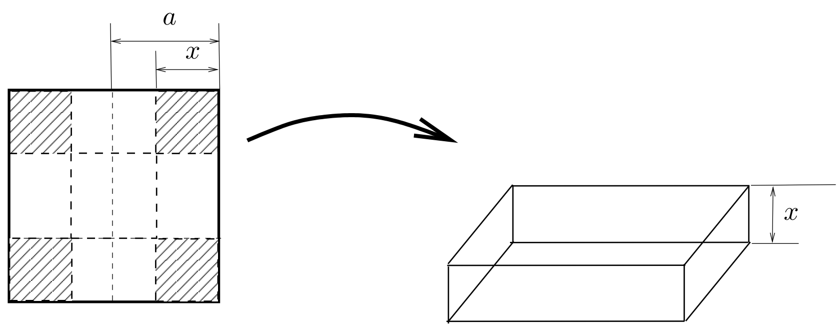


FIGURE 1.1. La boite et son patron.

1. Voir https://www.francetvinfo.fr/economie/disparites-salariales/pourquoi-les-femmes-gagnent-moins-que-les-hommes_675169.html

On construit une boite en carton parallélépipédique (sans couvercle) à partir d'une surface carrée de coté $2a$, comme le montre la figure 1.1
Déterminer le coté x des quatre petits morceaux découpés pour que le volume de la boite construite soit maximal.

EXERCICE 1.31.

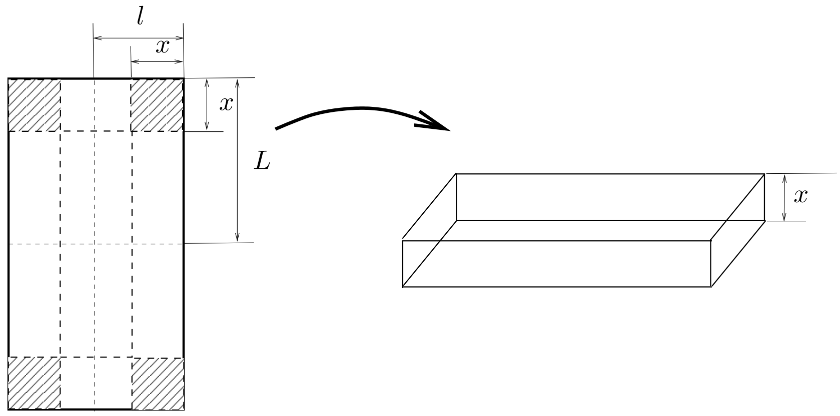


FIGURE 1.2. La boite et son patron.

On construit une boite en carton parallélépipédique (sans couvercle) à partir d'une surface rectangulaire de largeur $2l$ et de longueur $2L$, comme le montre la figure 1.2
On suppose donc que $0 < l \leq L$.
On admettra que $l^2 + L^2 - lL > 0$ et en posant

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(L + l - \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right),$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\left(L + l + \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right),$$

on admettra que

$$0 < x_1 < l \leq x_2.$$

Déterminer le coté x des quatre petits morceaux découpés pour que le volume de la boite construite soit maximal.

EXERCICE 1.32.
On veut fabriquer une casserole en aluminium embouti au moyen d'une feuille de métal circulaire de surface donnée S.

(1) On suppose qu'il n'y a pas de déchet de métal, que les déformations se font à volume constant, que son épaisseur (négligeable devant les autres dimensions) reste constante et qu'il n'y a pas de couvercle. Montrer que la surface reste constante.
(2) Calculer le plus grand volume de la casserole qu'il soit possible de réaliser.

EXERCICE 1.33.
Sur une route, la distance entre deux voitures doit permettre de s'arrêter même si la première s'arrête brusquement. Nous proposons un modèle, où toutes les voitures roulent sur une seule même file, à la même vitesse v avec la même distance entre deux voitures.

(1) *Question facultative dont on pourra admettre le résultat.*

(a) On suppose que le ralentissement d'une voiture est uniforme. Cela signifie que la voiture décellère avec une accélération négative constante, égale à $-a$ (a est une constante strictement positive, exprimée en ms^{-2}). Montrer que, si v est la vitesse de la voiture avant freinage, alors la distance de freinage vaut $d_f = v^2/(2a)$.

(b) Quelle est dans ce cas-là, la force exercée par le sol sur les pneus ?

(2) À la distance de freinage d_f, il convient d'ajouter la distance parcourue pendant la durée τ de réaction du conducteur. Calculer la distance qui doit séparer les deux voitures.

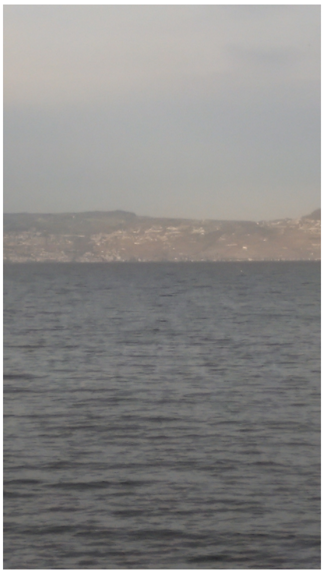
(3) (a) La longueur moyenne d'une voiture est l. Calculer le débit par unité de temps D de voitures sur une route en fonction de la vitesse v.

(b) Étudier l'application $v \mapsto D(v)$.

(c) Application numérique : $l = 5\,\mathrm{m}$, $a = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ et $\tau = 1\,\mathrm{s}$.

(4) Critiquer ce modèle, ainsi que les sections de routes à vitesses régulées et ... enfin, le comportement de certains conducteurs !

EXERCICE 1.34.



Depuis Évian, on regarde la ville de Lausanne, distante de $d = 12.5$ km. On supposera que l'on se trouve à $h_1 = 5$ m. au dessus de la surface de l'eau. On donne le rayon de la terre $R = 6378.137$ km.
Sur la figure 1.3 page suivante, on a noté A et B, les points correspondant à Évian et Lausanne. Le rayon lumineux issu d'un point B' est tangent à la terre au point C et arrive dans l'œil de l'observateur. On s'intéresse à la hauteur h_2 du point B'. L'ensemble du segment $[BB'[$ est en effet caché sous l'horizon. On peut montrer que l'on a :

$$h_2 = R\left(\frac{1}{\cos\left(\dfrac{d}{R} - \arccos\dfrac{R}{R+h_1}\right)} - 1\right), \tag{1.4}$$

(1) (a) (i) Pourquoi ne peut-on pas écrire de développement limité de arccos en $y = 1$?

(ii) Démontrer le résultat suivant :

$$\forall y \in [0,1], \quad \forall x \in [0,\pi/2], \quad \Big(x = \arccos y \Longrightarrow x = \sqrt{2(1-y)}(1+\varepsilon(y)),\Big) \tag{1.5}$$

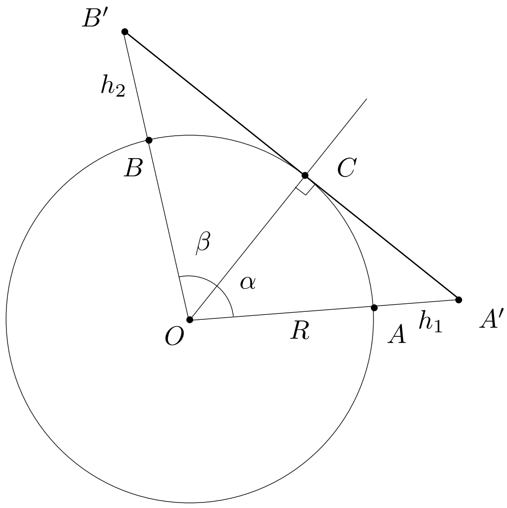


FIGURE 1.3. La terre, le points d'observation A et le point observé B.

avec

$$\lim_{y \to 1} \varepsilon(y) = 0.$$

(b) En déduire une approximation du résultat (1.4).

(2) Pourriez-vous rappeler l'expérience faite par les Grecs pour mesurer le périmètre de la Terre ?

EXERCICE 1.35.

(1) Écrire les développements limités des fonctions sin et cos aux ordres respectifs 3 et 2 en 0.

(2) En déduire les approximations de $\sin\left(10^{-3}\right)$ et de $\cos\left(10^{-3}\right)$.

(3) Confirmez cela avec votre calculatrice.

On pourra consulter l'exercice 1.36 qui reprend et développe cet exercice.

EXERCICE 1.36.

Cet exercice est l'étude rigoureuse de l'exercice 1.35.

(1) *Approximation de* $\cos x$ *et de* $\sin x$. Attention, x est mesuré en radians.

(a) Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^c, \\[2ex] \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n^s, \end{cases} \tag{1.6}$$

avec

$$R_n^c \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ et } R_n^s \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

(b) On note désormais

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \\[2ex] S_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Pourquoi les formules (1.6) permettent-elles d'obtenir une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ avec une erreur respectivement inférieure à $(|x|^{2n+2})/(2n+2)!$ et $(|x|^{2n+3})/(2n+3)!$?

(2) On suppose dans toute cette question que $x = 10^{-3}$.

(a) Déterminer un entier n_1 tel que

$$\frac{|x|^{2n_1+2}}{(2n_1+2)!} \leq 10^{-9} \text{ et } \frac{|x|^{2n_1+3}}{(2n_1+3)!} \leq 10^{-9}.$$

Nb : On pourra procéder par «tâtonnement».

(b) En calculant $C_n(10^{-3})$ et $S_n(10^{-3})$ pour $n = 1$, proposez une approximation de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ à 10^{-9} près.

Comparez ces valeurs approchées aux valeurs de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

(3) On suppose pour toute cette question que x est élément de $[0, \pi/4]$.

(a) Montrer que

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!} \text{ et } \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}. \tag{1.7}$$

(b) Montrer que, pour $n = 5$, on a, pour tout x de $[0, \pi/4]$:

$$\begin{cases} |\cos x - C_n(x)| \leq 10^{-9}, \\ |\sin x - S_n(x)| \leq 10^{-9}. \end{cases} \tag{1.8}$$

(c) Déduire de (1.8) une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\left\{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\right\}$.

Comparez les aux valeurs «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

(d) Comparez et commentez les méthodes des questions 2 et 3.

(4) *Extension des résultats obtenus*

(a) Comment peut-on utiliser les résultats de la question 3 pour calculer des approximations du cosinus et de sinus de tout réel à 10^{-9} près ?

(b) Proposez des approximations de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\{\pi/3, 3.2, 6\}$.

Comparez les aux valeurs «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Équations différentielles ordinaires

Ce TD contient de nombreux exercices, dont seule une petite partie sera traitée en séance. Charge au lecteur d'en traiter d'autres !

Équations différentielles ordinaires d'ordre un et deux à coefficients constants

Exercices en partie extraits de [BC04].

Équations différentielles à coefficients constants d'ordre un

EXERCICE 2.1.
Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 2y'(t) + 3y(t) = 0, \quad y(4) = 6, \\ &\text{b)} \quad ay'(t) + by(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \\ &\text{c)} \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2.2.
On étudie l'équation différentielle

$$-y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

(1) Résoudre cette équation différentielle en :
  (a) cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme ;
  (b) utilisant la méthode de la variation de la constante.
(2) Comparer les deux solutions obtenues aux questions (1a) et (1b) et conclure.
(3) Définir la solution correspondant à la condition initiale $y(1) = 2$.

EXERCICE 2.3.
Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

(1) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = e^t,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction de la forme Ke^t où K est une constante.

(2) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t).$$

On utilisera la méthode de la variation de constante. Pour cela, on procédera comme suit : on fera une double intégration par partie ou on passera en notation exponentielle complexe

(3) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t),$$

avec la condition initiale

$$y(0) = a.$$

On utilisera la méthode de la variation de constante. Pour cela, on procédera comme suit : on fera une double intégration par partie ou on passera en notation exponentielle complexe

(4) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = t^2 + t.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

On pourra aussi consulter la méthode alternative présentée dans l'exercice 2.4.

EXERCICE 2.4.

(1) Résoudre l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = e^t,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

On utilisera la formule de Duhamel (2.15) page 18 donnée en cours.

(2) Résoudre l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t),$$

avec la condition initiale

$$y(0) = a.$$

On utilisera la formule de Duhamel (2.15) page 18 donnée en cours.

EXERCICE 2.5.
Soient a, b et γ, trois réels (avec a non nul). Résoudre l'équation différentielle

$$ay'(t) + by(t) = e^{\gamma t}. \tag{2.1}$$

Comme dans l'exemple 2.3 du cours, on cherchera une solution particulière sous la forme $\widehat{y}(t) = Ke^{\gamma t}$ où K est un réel. Cette méthode ne sera valable que si $\gamma \neq -b/a$. Dans le cas où $\gamma = -b/a$, il faudra chercher une autre méthode.

EXERCICE 2.6.
Montrer que l'unique solution de l'équation différentielle

$$ay' + by = 0,$$

où a est un réel non nul et b un réel quelconque est donnée par

$$y(t) = ce^{-\frac{b}{a}t},$$

où c est une constante.

Modèles démographiques

EXERCICE 2.7.

(1) (a) Soient $r, t_0 \in \mathbb{R}$ et $N_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \tag{2.2a}$$

$$N(t_0) = N_0\,? \tag{2.2b}$$

(b) Donner rapidement le comportement de l'application $N : t \mapsto N(t)$ définie sur $[t_0, +\infty[$ en fonction de r (limite en $+\infty$ et monotonie).

(c) (i) On définit le taux de croissance (algébrique) entre les instants t et $t+h$, par le rapport du taux d'accroissement de N entre les instants t et $t+h$ sur N défini donc par

$$\tau(t) = \frac{N(t+h) - N(t)}{hN(t)}. \tag{2.3}$$

Quelle est la limite de ce taux de croissance quand h tend vers zéro ? Cette limite est appelée le taux de croissance instantané.

(ii) Calculez cette limite en fonction de r et conclure sur l'équation différentielle (2.2a).

(2) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Dans cette question, on cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \tag{2.4}$$

avec l'habituelle condition initiale (2.2b).

(a) Que retrouve-t-on quand $b = 0$?

(b) Pour toute la suite, on suppose que $b > 0$ et on pose $K = a/b > 0$ et on réécrit (2.4) sous la forme

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \tag{2.5}$$

(i) Quelle est la solution constante (non nulle) de l'équation différentielle (2.5) avec la condition initiale (2.2b). ?

(ii) On admet que si la solution de (2.5) est non constante, alors, elle ne s'annule pas. Montrer que si l'on pose $v = 1/N$, alors v est solution de

$$\forall t \geq t_0, \quad v' + av = \frac{a}{K}. \tag{2.6}$$

(iii) Résoudre l'équation différentielle (2.6).

(iv) On suppose pour toute la suite que

$$N_0 \neq K. \tag{2.7}$$

En déduire que la solution de (2.5) et (2.2b) est donnée par

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{2.8}$$

(v) Pour toute la suite, on suppose que

$$0 < N_0 < K. \tag{2.9}$$

(A) Montrer que $N : t \mapsto N(t)$ est définie [1] sur $[t_0, +\infty[$.

(B) Donner rapidement le comportement de N application sur $[t_0, +\infty[$ (limite en $+\infty$ et monotonie).

(C) Comme dans la question (1c), déterminer le taux de croissance instantané.

1. On peut aussi l'étudier mathématiquement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Équations différentielles à coefficients constants d'ordre deux

EXERCICE 2.8.
Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0,\\
&\text{b)}\quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0,\\
&\text{c)}\quad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.
\end{aligned}$$

EXERCICE 2.9.
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 3\sin(t) + \cos(t).$$

EXERCICE 2.10.

(1) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 5y' - 3y = 0.$$

(2) En déduire la solution de l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 5y' - 3y = t^3 + t^2 - 1. \tag{2.10}$$

On cherchera d'abord une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

(3) En déduire enfin, la solution de l'équation différentielle suivante (2.10) avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{2.11}$$

Exercices sur la demi-vie et autres

EXERCICE 2.11.
La demi-vie d'un isotope radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux de cet isotope initialement présents se désintègrent naturellement. On rappelle que le nombre $N(t)$ de ces élements au cours du temps vérifie l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Est-il vrai qu'au bout de deux demi-vies, le produit s'est totalement désintégré ? Justifiez votre réponse !

EXERCICE 2.12.
Une grandeur évolue à une vitesse proportionnelle à elle même même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

EXERCICE 2.13.
On étudie la désintégration d'un isotope radioactif de constante radioactive λ, c'est-à-dire que le nombre $N(t)$ d'atomes de cet isotope vérifie

$$N'(t) = -\lambda N(t). \tag{2.12}$$

(1) Résoudre l'équation différentielle (2.12) avec $N(t = 0) = N_0$. Calculer la demi-vie $t_{1/2}$ de l'isotope sachant que c'est le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.

(2) Dans la haute atmosphère, du carbone radioactif est produit à partir des collisions entre des noyaux d'azote et des neutrons produits par les rayons cosmiques. Le dioxyde de carbone de l'atmosphère contient en proportion quasiment constante du carbone 14 et du carbone 12. La proportion de ces 2 isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère. Lorsque la plante meurt, elle cesse d'assimiler le dioxyde de carbone et le carbone 14 qu'elle contient, de demi-vie 5570 ans se désintègre sans être renouvelé. Dans une tombe égyptienne, on a trouvé un échantillon de bois provenant d'un sarcophage qui produisait 560 désintégrations par seconde alors qu'un échantillon du même bois fraîchement coupé contenant la même masse de carbone produit 816 désintégrations par seconde. Déterminer la date de fabrication du sarcophage.

Applications à la mécanique

EXERCICE 2.14.
On considère l'équation différentielle gérant le mouvement d'un point matériel d'abscisse x soumis à l'association en parallèle d'un ressort linéaire de raideur k et d'un patin de viscosité c et à une force extérieure nulle :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Ici, m, c et k sont des réels strictement positifs.

(1) Résoudre cette équation différentielle (on distinguera plusieurs cas)
(2) En faisant le moins de calculs possible, montrer que, dans tous les cas (et ce, indépendamment des conditions initiales)

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

Physiquement, d'où vient ce résultat ?

EXERCICE 2.15 (Résolution du flambement dans le cas raisonnant).
On étudie l'équation différentielle qui traduit l'équilibre d'une poutre en compression avec un défaut initial

$$v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K\sin(\omega x), \tag{2.13}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = v(L) = 0. \tag{2.14}$$

Ici, ω, ω_0 et K sont des constantes strictement positives et L est la longueur de la poutre étudiée.
Dans le cours, on a déjà traité le cas où $\omega_0 \neq \omega$. On suppose donc que

$$\omega = \omega_0. \tag{2.15}$$

(1) Pourquoi ne peut on pas chercher une solution particulière de (2.13) sous la forme

$$v = \lambda\sin(\omega_0 x),$$

(comme dans le cours) sous l'hypothèse (2.15) ?
(2) En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre (2.13) sous l'hypothèse (2.15).
(3) Vérifier que la solution obtenue est bien solution de (2.13).
(4) En considérant l'hypothèse (qui provient de (2.15))

$$\omega_0 L = \pi,$$

et les conditions aux limites (2.14), montrer que le système (2.13)-(2.14) n'admet une solution que dans le cas où $K = 0$, cette solution étant

$$v(x) = B_0\sin(\omega_0 x),$$

où B_0 est une constante quelconque.

Pour chercher

EXERCICE 2.16.

(1) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 1 + t^2 + t + t^3,$$

avec la condition initiale

$$y\,(2) = 1.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

(2) Comment feriez-vous pour, partant d'une fonction y donnée, inventer une équation différentielle dont y est la solution. Résolvez-la !

EXERCICE 2.17.
soit $\tau > 0$. Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in [\tau, +\infty[, \quad 2ty'(t) - y(t) = 0.$$

EXERCICE 2.18.
Lorsqu'on perce un trou au fond d'un récipient cylindrique rempli de liquide sur une hauteur z, on démontre en mécanique des fluides que la vitesse d'expulsion du liquide par le trou est $v = \sqrt{2gz}$.

(1) En supposant que la section du récipient est S est que celle du trou est s, montrer que

$$vs = -Sdz/dt.$$

Indication «tout ce qui n'est plus au dessus est sorti par le trou».

(2) En déduire l'équation différentielle permettant de trouver $z(t)$.

(3) En utilisant la technique de séparation des variables, intégrer cette équation différentielle ; on supposera que $z = z_0$ à $t = 0$.

(4) En déduire le temps de vidange du récipient.

(5) Application : la clepsydre

On voudrait fabriquer un récipient dont la forme soit telle que dz/dt soit constant : on pourra ainsi fabriquer une horloge à eau dans laquelle la hauteur serait en relation linéaire avec le temps écoulé. Pour cela, on suppose que le récipient est de révolution autour d'un axe Oz et dont la section perpendiculaire à cet axe serait un cercle de rayon $r(z)$ ne dépendant que de z. Trouver la forme de $r(z)$.

(6) Réflexion :

Pensez-vous que les grecs savaient résoudre des équations différentielles ? Comment ont-ils procédé ?

Autres types d'équations différentielles ordinaires

Exercices essentiellement extraits de [BD01, chapitre 4].

EXERCICE 2.19. Résoudre l'équation $xyy' - y^2 = 1$.

EXERCICE 2.20.

(1) Soient A une primitive quelconque de a et $C \in \mathbb{R}$. Montrer alors que la fonction

$$\phi(t) = Ce^{-A(t)} \tag{2.16}$$

est solution de l'équation

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0. \tag{2.17}$$

(2) Si on fait le changement de fonction inconnue en posant :

$$y(t) = w(t)e^{-A(t)},$$

quelle est l'équation vérifiée par w ? En déduire que toutes les solutions de (2.17) sont de la forme (2.16).

(3) Soient y la solution générale et y_p une solution particulière de

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{2.18}$$

et soit $z = y - y_p$. Déterminer l'équation dont z est solution. En déduire que la solution générale de (2.18)

$$y(t) = Ce^{-A(t)} + y_p(t),$$

où $y_p(t)$ est une solution particulière de (2.18).

EXERCICE 2.21. Résdoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + 3x^2 y = 0$$

EXERCICE 2.22 (Équation de Bernoulli).
Soient n un entier naturel strictement supérieur à 1 et a et b deux réels. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = ay(t) + by^n(t). \tag{2.19}$$

On se propose de rechercher les solutions strictement positives de (2.19) sur $\mathbb{R}$.

(1) On pose sur $\mathbb{R}$, $z = y^{1-n}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre.

(2) En déduire les solutions strictement positives de (2.19) sur $\mathbb{R}$.

(3) Que donne le cas $n = 0$?

TRAVAUX DIRIGÉS 3

Interpolation polynômiale

EXERCICE 3.1.
On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 3$, $x_1 = 8$ et $x_2 = 5$:

$$g(x_0) = -2, \quad g(x_1) = 2, \quad g(x_2) = 1.$$

(1) Construire les interpolants de Lagrange pour trouver le polynôme de degré au plus 1 (noté $\Pi_1(g)$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 et x_1. Pour $\alpha = 7,500\,0$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

(2) Construire les interpolants de Lagrange pour trouver le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2(g)$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0, x_1 et x_2. Donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

(3) Traiter de nouveau ces deux questions en utilisant la forme de Newton.

(4) Comparer les deux méthodes et conclure.

EXERCICE 3.2. Soit la fonction à valeurs réelles :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction f aux nœuds équidistribués $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(1) Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ en fonction du degré n du polynôme $\Pi_n f$. Etudier le comportement de l'erreur lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

(2) Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$.

(3) Est-ce que tous les résultats sont encore valables pour g définie par

$$\forall x \in [6000, 6001], \quad g(x) = \sin\left(\frac{x-6000}{3}\right) ?$$

EXERCICE 3.3. Soit la fonction f à valeurs réelles :

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [0,1].$$

On considère le polynôme composite $\Pi_1^h f$ de degré 1 par morceaux qui interpole la fonction f sur N sous-intervalles de longueur uniforme h.
Trouver le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur $E_1^h(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_1^h f(x)|$ soit inférieure à $5\,10^{-7}$.

EXERCICE 3.4.
On dispose des résultats expérimentaux pour la position $f(t)$ d'une étoile à différents temps t,

t	1	$1,500\,0$	2	$2,500\,0$	3	$3,500\,0$	4
$f(t)$	$4,483\,6$	$5,408\,6$	$6,550\,9$	$7,830\,7$	$9,206\,0$	$10,610\,5$	$12,007\,6$

(1) Utiliser la forme de Newton du polynôme d'interpolation (table des différences divisées) pour estimer la position de l'étoile au temps $\tau = 3.1$, au moyen d'un polynôme cubique.

(2) Donner l'expression analytique de l'erreur pour le polynôme obtenu.

(3) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation.

On pourra consulter l'exercice très proche 3.6.

Exercices facultatifs

EXERCICE 3.5.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, et des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ deux à deux distincts. Soit Π_n relatif au support $\{x_0, ..., x_n\}$ tel que,

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad \Pi_n(x_i) = y_i.$$

(1) Construire des points $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que Π_n soit de degré exactement égal à p.

(2) Application numérique :

On choisit $n = 3$, $p = 2$ et les points $(x_i)_{0 \leq i \leq 3}$ donnés par

$$\forall i \in \{0, ..., 3\}, \quad x_i = i.$$

Déterminer des valeurs de y_i et construire Π_3.

EXERCICE 3.6.
En course à pied sur route, on utilise des modèles d'interpolation pour estimer, à partir de performances (temps) qu'un coureur a déjà réalisées sur certaines distances, les performances qu'il pourrait réaliser sur d'autres distances. On cherche ainsi à approcher la fonction $t(x)$ qui indique le temps en secondes que le coureur mettrait pour parcourir x mètres. On considère ici un coureur dont les performances sont indiquées dans le tableau suivant :

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

(1) Utiliser un polynôme d'interpolation de degré 2 pour estimer la performance que devrait réaliser ce coureur sur une distance de 5000 m.

(2) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation en calculant l'écart absolu avec l'estimation par un polynôme d'interpolation de degré 3.

TRAVAUX DIRIGÉS 4

Intégration numérique

On pourra consulter les formules d'erreur données en page **??**.

EXERCICE 4.1. On recherche une approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, dont on ne connaît pas la primitive.

(1) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode du trapèze composite sur 4 sous-intervalles.

(2) Indiquer le terme d'erreur globale que l'on fait par cette méthode de trapèze composite.

Théoriquement de combien devrait-on diminuer le pas d'intégration, *i.e.*, la largeur des intervalles, pour faire une erreur 4 fois moins grande que celle commise en question 1 ? Justifier votre réponse.

(3) Déterminer alors le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode du trapèze composite avec une erreur égale à

$$\varepsilon = 10^{-4}. \tag{4.1}$$

(4) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode de simpson composite sur 2 sous-intervalles.

(5) Déterminer maintenant le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode de Simpson composite avec la même erreur que précédemment, donnée par (4.1).

Bibliographie

[BC04] J. Bastien et D. Chamoret. *Mathématiques : Applications.* Travaux Dirigés de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31. 2004. 47 pages.

[BD01] G. Blanchard et M.-C. Duban. *Révision d'algèbre et d'analyse (cours de MT11).* Université de Technologies de Compiègne. 2001.