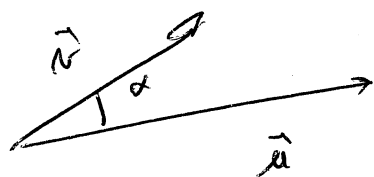


Règles pratiques du "Projet"

①



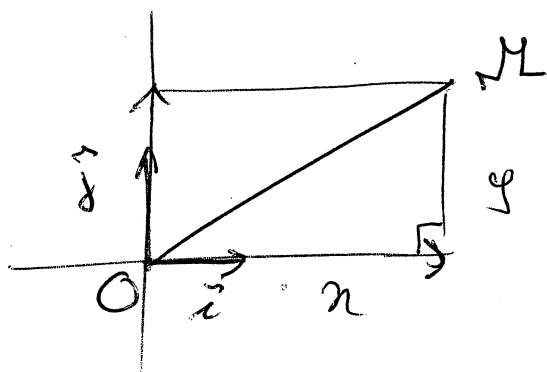
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$

$$(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{w} + \beta \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \cos \alpha \vec{v} \text{ or } \cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$



$(\vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormal

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} &\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{i} \\ &= x\vec{i} \cdot \vec{i} + y\vec{j} \cdot \vec{i} \\ &= x\|\vec{i}\|\|\vec{i}\| + y \times 0 \\ &= x \times 1 = x \end{aligned}$$

$$\text{et même } \vec{u} \cdot \vec{j} = y$$

$$\text{donc } \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} \quad (1)$$

exer & Théorème de Pythagore

②

$$\boxed{OM^2 = x^2 + y^2} \quad \text{②} \quad \text{q.s. ligne}$$

$$\text{et donc } \|x\|^2 = (\overline{ox} \cdot \vec{i})^2 + (\overline{ox} \cdot \vec{j})^2$$

Dans les géométries en dimension

Espace Euclidien E $\text{q. dim } m \in \mathbb{N}$ $\text{q. } \dim E = m$

- espace vectoriel, de dimension finie $(\subset \mathbb{R}) \quad 1 \leq h \leq m$
 $\downarrow$
base

$$\text{ainsi } \forall x \in E, \exists (x_i) \in \mathbb{R}^m \quad x = \sum x_i e_i$$

- On définit un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ (noté)

qui satisfait :

Soit bilinéaire, symétrique, de forme positive, ad.

- $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$

idem à droite

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

- $\langle u, u \rangle \geq 0$

- $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

on considère la norme $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

(3)

espace pro-euctalien (réel)

ou bien (2)

produit scalaire continu mais pas nécessairement d'index fini.

C'est-à-dire, bases orthonormales, qu'il existe $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de dérivées
 tel que (4) et (5) aient lieu en disant quelque

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \quad (5)$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 \quad (7)$$

→ SERVIRA DIRECTEMENT PAR PARIÈRE

(2) ou bien (PB) Base orthonormale $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases}$

• $\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ (4) génératrice (1)

en fait $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ de par la (4)

$$\langle x, e_l \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta_{kl} + x_l \delta_{ll} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \times 0 + x_l = x_l$$

$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2$ (5) génératrice (2)

Fin de cpli

3 BIS

Preuve de (5)

$$\begin{aligned}
 \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{l=1}^n x_l e_l \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l=1}^n x_k x_l \langle e_k, e_l \rangle \\
 &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n x_k x_l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{=0} + \sum_{k=1}^n x_k^2
 \end{aligned}$$

Es gilt hier auch $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

⑤

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{2i\pi n}{T}t} e^{-\frac{2i\pi m}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{At} dt \quad \text{mit } A = \frac{2i\pi}{T}(n-m) \end{aligned}$$

$$\text{si } A=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{T} \times \int_0^T dt = 1$$

$$\text{si } A \neq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{AT} [e^{At}]_0^T = 0$$

oder also $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$ d.h. das System ist das

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

somit
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2i\pi n}{T}t} \quad (8)$$

oder
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-\frac{2i\pi n}{T}t} dt \quad (9)$$

(or: über satz orthog. & Parseval)

Parseval (orthog. & Parseval)

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (10)$$

(2) f a lieu en TT T si

(6)

f est périodique de période T , de même que $f(t+T)$ est. f peut n'avoir qu'une seule amplitude dans une période, donc on replace $f(t)$ par

$$\frac{1}{2} (f(t+T) + f(t-T)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$$

Compte tenu $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

orthogonalité ou non. $f(t)$ doit:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}} + C_{-n} e^{-\frac{2i\pi n t}{T}}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \left(\cos \frac{2\pi n t}{T} + i \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) + (a_{-n} + ib_{-n}) \left(\cos \frac{2\pi n t}{T} - i \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

$$C_n = a_n + ib_n$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt + i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt$$

a_n b_n

donc $a_{-n} = a_n$ $b_{-n} = -b_n$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt$$

(7)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + 2b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

eg. an m.f.s. & f.c.f.s

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \\ f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \\ \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(t) dt &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) + \frac{a_0^2}{4} \quad (11) \end{aligned}$$

Con. Period $T = 2\pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (12) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$