

Contrôle continu 1 du 16 janvier 2025

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet***Calculatrice autorisée :** OUI NON *Tout type***Exercice 1.**

- (1) Former le développement limité en zéro de la fonction $f(x) = \ln(x + 1)$ à l'ordre 4.
- (2) Former le développement limité en zéro de la fonction $g(x) = \ln(\sin(x) + 1)$ à l'ordre 2.

Exercice 2.On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$:

$$g(x_0) = 0, \quad g(x_1) = 1, \quad g(x_2) = 2.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 , x_1 et x_2 .
- (2) Pour $\alpha = 0$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 3.Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = e^{-x} (x + 4x^2), \quad (1a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^1 f(x) dx. \quad (1b)$$

- (1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.
- (b) On note

$$M_p = \max_{x \in [0, 1]} |f^{(p)}(x)|, \quad (2)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p -ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 et M_2 :

$$M_1 = 2.1297786519540 ; \quad (3a)$$

$$M_2 = 6. \quad (3b)$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.

- (c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = 9 - 22e^{-1}, \quad (4a)$$

soit encore

$$I = 0.9066522942283. \quad (4b)$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \quad (5)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>