Corrigé du contrôle continu 1 du 16 janvier 2025

Correction de l'exercice 1.
On trouve respectivement en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

(1)
$$f(x) = -1/4\,x^4 + 1/3\,x^3 - 1/2\,x^2 + x + o\left(x^4\right),$$

(2)
$$g(x) = -1/2\,x^2 + x + o\left(x^2\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x+1)\,(x-3)}{(1+1)\,(1-3)},$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)\,(x-3)}{(-1-1)\,(-1-3)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)\,(x+1)}{(3-1)\,(3+1)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = -1/4\,x^2 + 1/2\,x + 3/4, \tag{2a}$$
$$l_1(x) = 1/8\,x^2 - 1/2\,x + 3/8, \tag{2b}$$
$$l_2(x) = 1/8\,x^2 - 1/8. \tag{2c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{3}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(g)(x) = 3/8\,x^2 - 1/2\,x + 1/8. \tag{4}$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	$\boxed{0}$		
		$\boxed{-1/2}$	
$x_1 = -1$	1		$\boxed{3/8}$
		$1/4$	
$x_2 = 3$	2		

TABLE 1. Différences divisées de g.

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{5}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 1, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 1. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

(2) Pour $\alpha = 0$, on obtient alors :

$$\Pi_2(g)(\alpha) = 1/8 \approx 0.125000,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Correction de l'exercice 3.

(1) (a) En utilisant le tableau 4.1 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 5/2\, e^{-1} \tag{6}$$

soit

$$I^T = 0.91969860292861. \tag{7}$$

(b) On note

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{8}$$

Le tableau 4.2 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{9}$$

où η appartient à $]a,b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{10}$$

Grâce à (8) et et aux valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.5000000000. \tag{11}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |0.9066522942283 - 0.9196986029286| = 0.0130463087003$$

qui est inférieure à celle donnée par (11).

(2) (a) En utilisant le tableau 4.3 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = 5/6\, e^{-1} + \frac{7}{27}\, e^{-1/3} + \frac{22}{27}\, e^{-2/3} \tag{12}$$

soit

$$I_3^T = 0.91067345255893. \tag{13}$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \tag{14}$$

Le tableau 4.4 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{15}$$

où η appartient à $[A,B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{16}$$

soit

$$h = \frac{(1)-(0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333. \tag{17}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \tag{18}$$

En utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 5.555556\, 10^{-2}. \tag{19}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |0.9066522942283 - 0.9106734525589| = 4.021157\, 10^{-3}$$

qui est inférieure à celle donnée par (19).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (18) que l'on ait :

$$h^2\frac{B-A}{12}M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (16),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2\frac{B-A}{12}M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon}M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{20}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3),

$$N = 7072. \tag{21}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{7072}^T = 0.906652295013924,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{7072}^T - I\right| = 7.8565487\,10^{-10},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (5) de l'énoncé.