Systèmes Industriels et Robotique 3A MPISIR — Automne 2024

Corrigé du contrôle continu 2 du 23 janvier 2025

Correction de l'exercice 1.
Voir correction du QCM n° 2 en date du 23 janvier 2025, disponible sur Internet.

Correction de l'exercice 2.

(1) Ici, on dispose des valeurs de f pour $N = 5$ points équirépartis dans l'intervalle $[A, B] = [1, 3]$ avec un pas égal à $h = 0.5$.

$$I_N^T = \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + h\sum_{i=1}^{N-1} f(t_i)\,. \tag{1}$$

On trouve numériquement

$$I_N^T = 13.304200, \tag{2}$$

Remarque 1. On dispose des valeurs de f pour $N = 5$ points équirépartis dans l'intervalle $[A, B] = [1, 3]$ avec un pas égal à $h = 0.5$. L'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composites des rectangles (non vues en cours et non exigée ici) est donnée par :

$$I_N^R = h\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\,. \tag{3}$$

Il suffit donc d'appliquer cette formule en utilisant les donnés du tableau On trouve numériquement

$$I_N^R = 12.123150, \tag{4}$$

ce qui est très proche du résultat donné par (2).

(2) (a) Si on veut utiliser la méthode du milieu ou de Simpson, on a deux méthodes :

(i) On peut remarquer que le nombre de points $N = 5$ où f est connue est impair. On peut donc utiliser la méthode composite du point milieu

$$I_N^M = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right). \tag{5}$$

ou celle de Simpson

$$I_N^S = \frac{h}{6}\left(f(A) + f(B) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right) \tag{6}$$

où le pas h est cette fois-ci égal à $h = 1.0$ et les points t_i correspondent aux valeurs de rang impaires des réels t donnés dans le tableau tandis que les points milieux $t_i + h/2$ correspondent aux valeurs de rang paires des réels t donnés dans ce même tableau.

(ii) On peut aussi considérer le pas $h = 0.5$ et utiliser la formule (5) ou (6) où les points t_i sont donnés dans le tableau tandis que les points milieux correspondent à des réels où f n'est pas connue et il nous faut donc les valeurs de ces réels par la splines.

(b) Pour cette question, l'énoncé incitait fortement à utiliser la méthode 2(a)ii ! En effet, dans l'énoncé était fourni le tableau suivant qui contient les valeurs de f évaluées aux différents milieux grâce à la spline utilisée :

t	$f(t)$
1.25000	4.90144
1.75000	5.95423
2.25000	7.17272
2.75000	8.49701

Il suffit donc d'appliquer cette formule en utilisant les données du tableau On trouve numériquement en utilisant (5) pour le point milieu

$$I_N^M = 13.262700, \tag{7a}$$

et pour Simpson en utilisant (6)

$$I_N^S = 13.276533, \tag{7b}$$

Si on avait utilisé la méthode 2(a)i, on aurait trouvé pour le point milieu

$$I_N^M = 13.221200, \tag{8a}$$

et pour Simpson

$$I_N^S = 13.276533. \tag{8b}$$

On constate que la valeur donnée par (8a) est proche de la valeur donnée par (7a), tandis que celles données par (7b) et (8b) semblent identiques !

(3) La méthode composite de Simpson appliquée à la spline sur $[A, B]$ consiste à sommer les différentes intégrales approchées données par la méthode élémentaire de Simpson sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, elle-mêmes étant de degré (d'exactitude) 3, c'est-à-dire, intégrant exactement les polynômes de degré 3. Or la spline construite est bien de degré au plus 3 (par morceaux, c'est-à-dire sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$) et donc intégrée exactement par la méthode composite de Simpson.

Remarque 2. On est obligé d'utiliser la méthode d'intégration élémentaire de Simpson pour justifier cela. On pourra être tenter d'utiliser le raisonnement suivant : l'erreur de la méthode composite de Simpson est donnée par $-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$ où η appartient à $[A, B]$ et cette quantité est nulle si f est polynômiale par morceaux de degré au plus 3. En effet, la spline construite a une dérivée première et seconde continue et n'est donc pas de classe C^4, comme l'exige le raisonnement ainsi fait.

Remarque 3. Numériquement, on est capable de déterminer les coefficients de la spline sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. On obtient la valeur suivante de l'intégrale exacte de la spline :

$$I = 13.276533, \tag{9}$$

ce qui est bien la valeur donnée par (7b). Si on fait la différence entre les deux méthodes, on obtient bien une erreur égale à 0.

Remarque 4. On pouvait aussi répondre plus rapidement aux trois questions relatives aux calcul par la méthode des rectangles, des milieux des trapèzes et de Simpson, en remarquant la chose suivante : on pose

$$S = h \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i),$$
$$S' = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right),$$

quantités que l'on calcule une fois pour toute grâce aux deux tableaux fournis dans l'énoncé. On a alors

$$\begin{aligned}
I_N^R &= hf(t_0) + S,\\
I_N^M &= S',\\
I_N^T &= \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + S,\\
I_N^S &= \frac{1}{6}\left(h\big(f(A) + f(B)\big) + 2S + 4S'\right).
\end{aligned}$$

Numériquement on retrouve bien les valeurs déjà calculées :

$$\begin{aligned}
I_N^R &= 12.123150,\\
I_N^M &= 13.262700,\\
I_N^T &= 13.304200,\\
I_N^S &= 13.276533.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.

On procède exactement comme dans la section 5.4.2.2 page 85 du cours pour résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \cos(t) + e^{-t}(t+2), \tag{10a}$$
$$y(0) = 1, \tag{10b}$$
$$y'(0) = 0. \tag{10c}$$

(1) On détermine la transformée de Laplace du second membre de (10a), notée G par linéarité :

$$\begin{aligned}
G(p) &= \mathcal{L}(\cos(t) + e^{-t}(t+2))(p),\\
&= \mathcal{L}(\cos(t))(p) + \mathcal{L}(te^{-t})(p) + 2\mathcal{L}(e^{-t}),
\end{aligned}$$

en utilisant l'annexe F :

$$= \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p+1} + \mathcal{L}(te^{-t})(p),$$

en utilisant ensuite le théorème 5.15 :

$$= \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p+1} + g(p+1),$$

où $g = \mathcal{L}(t)$, qui est de nouveau donnée par l'annexe F :

$$= \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2},$$

et donc (la réduction au même dénominateur peut être faite, mais on peut laisser sous cette forme-là !)

$$G(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}. \tag{11}$$

(2) On applique la transformée de Laplace du membre de gauche de (10a), noté h : on utilise le théorème 5.19 du cours le résultat suivant : avec les hypothèses adéquates

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \max(\alpha, \alpha', \alpha''), \quad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+), \tag{12}$$

qui est la généralisation de (5.28) du cours (il suffit de l'appliquer deux fois). On obtient alors

$$\mathcal{L}(h)(p) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - pty(0) - y'(0) + 4\left(p\mathcal{L}(y)(p) - y(0)\right) + \mathcal{L}(y)(p)$$

et en notant $Y = \mathcal{L}(y)$, on a donc en utilisant les conditions initiales (10b) et (10c)

$$\mathcal{L}(h)(p) = p^2Y(p) - p + 4py(p) - 4 + 4Y(p).$$

On a donc

$$\mathcal{L}(h)(p) = (p^2 + 4p + 4)Y(p) - (p + 4)$$

et en utilisant la transformée G du second membre, on a

$$(p^2 + 4p + 4)Y(p) - (p + 4) = G(p)$$

soit, d'après (11),

$$(p^2 + 4p + 4)Y(p) = p + 4 + \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

On remarque que $p^2 + 4p + 4$ est un carré parfait qui vaut $(p + 2)^2$ et en divisant par cela, on obtient

$$Y(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2} + \frac{p}{(p^2+1)(p+2)^2} + \frac{2}{(p+1)(p+2)^2} + \frac{1}{(p+1)^2(p+2)^2}, \tag{13}$$

que l'on pouvait laisser sous cette forme, sans la réduire au même dénominateur.

(3) Il faut maintenant s'armer de courage et décomposer en éléments simple la fraction donnée par

$$\Psi(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2} + \frac{p}{(p^2+1)(p+2)^2} + \frac{2}{(p+1)(p+2)^2} + \frac{1}{(p+1)^2(p+2)^2}, \tag{14}$$

Vu la forme des dénominateurs de (14), on sait qu'il existe des réels A, B, C , D, E et F tels que

$$\Psi(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1} + \frac{E}{p+2} + \frac{F}{(p+2)^2}. \tag{15}$$

On pouvait tout réduire au même dénominateur, mais on aboutit à système à 6 équations lourd à écrire et à résoudre. On procède donc de la façon suivante :

(a) On multiplie dans (14) et (15) par $p^2 + 1$ et on fait tendre p vers i ce qui annule $p^2 + 1 = 0$ et

$$\frac{i}{(i+2)^2} = Ci + D,$$

et après calculs (en multipliant par la quantité conjuguée $-i + 2$) et identification (puisque C et D sont réels) :

$$C = \frac{3}{25}, \tag{16a}$$

$$D = \frac{4}{25}. \tag{16b}$$

(b) On multiplie dans (14) et (15) par $p + 2$ et on fait tendre p vers -2 ce qui annule $p + 2 = 0$ et on obtient directement

$$F = \frac{3}{5}. \tag{17}$$

(c) On multiplie dans (14) et (15) par $(p + 1)^2$ et on fait tendre p vers -1 ce qui annule $p + 1 = 0$ et on obtient directement

$$B = 1. \tag{18}$$

(d) Il reste donc A et E à déterminer. On remplace toutes les valeurs de B, C, D et F obtenues et définies par (16), (17) et (18), dans (15). Dans cette équation et dans (14), on multiplie par p et on fait tendre p vers l'infini ce qui donne

$$A + E + \frac{3}{25} = 1, \tag{19}$$

et on remplace de même p par 0 ce qui donne

$$A + \frac{E}{2} + \frac{131}{100} = \frac{7}{4}. \tag{20}$$

On résoud le système linéaire (19) et (20) et on obtient après calculs

$$A = 0, \tag{21a}$$

$$E = \frac{22}{25}. \tag{21b}$$

Remarque 5. Comme l'a fait l'un d'entre vous, on pouvait aussi décomposer la décomposition en éléments simples et remarquer que d'après (14), on peut écrire

$$\Psi(p) = \Psi_1(p) + \Psi_2(p) + \Psi_3(p) + \Psi_4(p), \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_1(p) &= \frac{p+4}{(p+2)^2}, && (23a)\\
\Psi_2(p) &= \frac{p}{(p^2+1)(p+2)^2}, && (23b)\\
\Psi_3(p) &= \frac{2}{(p+1)(p+2)^2}, && (23c)\\
\Psi_4(p) &= \frac{1}{(p+1)^2(p+2)^2}, && (23d)\\
& && (23e)
\end{aligned}$$

et décomposer chaucun des termes Ψ_k, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Psi_1(p) &= \frac{b}{p+2} + \frac{c}{(p+2)^2}, && (24a)\\
\Psi_2(p) &= \frac{d}{p+2} + \frac{e}{(p+2)^2} + \frac{fp+g}{p^2+1}, && (24b)\\
\Psi_3(p) &= \frac{h}{p+1} + \frac{k}{p+2} + \frac{l}{(p+2)^2}, && (24c)\\
\Psi_4(p) &= \frac{m}{p+1} + \frac{n}{(p+1)^2} + \frac{p}{p+2} + \frac{q}{(p+2)^2}. && (24d)\\
& && (24e)
\end{aligned}$$

On détermine alors chacune des décompositions en éléments simples comme ci-dessus et on rassemble ensuite tous les termes ensemle.

(4) Grâce aux valeurs numériques données par (16), (17), (18) et (21), l'expression de Y est donc totalement donnée par (13) et (14). On a donc

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \left(\frac{3}{25}p + \frac{4}{25}\right)\frac{1}{p^2+1} + \frac{22}{25}\frac{1}{p+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{(p+2)^2}. \tag{25}$$

Il ne reste plus qu'à revenir à la fonction $y(t)$ en utilisant à l'envers la table du cours (annexe F page 102) et les différentes propriétés vue en cours. On obtient alors la solution de l'équation différentielle (10). Plus précisément :

(a) On sait que d'après l'annexe F :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)(t) = t, \tag{26}$$

et donc en utilisant le théorème 5.15, il vient

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\right)(t) = te^{-t}. \tag{27}$$

(b) On sait que d'après l'annexe F :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)(t) = \cos(t), \tag{28}$$

(c) On sait que d'après l'annexe F :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)(t) = \sin(t), \tag{29}$$

(d) On sait que d'après l'annexe F :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t) = 1,$$

et donc en utilisant le théorème 5.15, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)(t) = e^{-2t}. \tag{30}$$

(e) Enfin, en utilisant (30) et le théorème 5.15, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\right)(t) = te^{-2t}. \tag{31}$$

Enfin, par linéarité, d'après (25), (27), (28), (29), (30) et (31), on a

$$y(t) = te^{-t} + \frac{3}{25}\cos(t) + \frac{4}{25}\sin(t) + 1/25\, e^{-2\,t}\,(22 + 15\,t)\,. \tag{32}$$

(5) Par acquis de conscience, on pouvait vérifier que (10a) avait bien lieu ainsi que les conditions initiales (10b) et (10c).