Systèmes Industriels et Robotique 3A MPISIR

Automne 2024

Contrôle continu 2 (rattrapage) du 06 février 2025

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

On se propose, dans cet exercice, de montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{1}$$

est convergente et d'en calculer une valeur approchée par la méthode de Simpson à ε près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé).

(1) Peut-on calculer directement I par la méthode de Simpson ? Pourquoi ?

(2) Soit A appartenant à $[1, +\infty[$. On veut évaluer

$$I_A = \int_0^{A} e^{-x^2} dx$$

à $\varepsilon/2$ près.

(a) Soit la fonction g donnée par

$$g(x) = e^{-x^2} p(x), \tag{2}$$

où p est un polynôme quelconque.

Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété suivante : il existe un polynôme p_n tel que la dérivée n-ième de g vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = e^{-x^2} p_n(x), \tag{3}$$

où les polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$p_0 = p, \tag{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2xp_n(x). \tag{5}$$

(b) En déduire la dérivée quatrième $f^{(4)}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

(c) Déterminer un majorant M de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[0, A]$.
On pourra admettre que, pour tout A, $M = 12$.

(d) En déduire, en fonction de A, M et de ε, le pas maximal $h_{\max}$ autorisé en méthode de Simpson pour que l'erreur d'intégration commise soit de valeur absolue inférieure à $\varepsilon/2$.

(3) Convergence de I et choix de A.
Soit X un réel vérifiant $X \geq A$ et A un élément de $[1, +\infty[$.

(a) On pose

$$R(X) = \int_A^X e^{-x^2} dx.$$

Montrer que $R(X)$ est défini et que

$$R(X) \leq \int_A^X e^{-x} dx. \tag{6}$$

(b) Calculer

$$b(X) = \int_A^X e^{-x} dx \text{ et } l = \lim_{X \to +\infty} b(X) \text{ en fonction de } A.$$

(c) Montrer que

$$\forall X \geq A, \quad R(X) \leq e^{-A}. \tag{7}$$

(d) En déduire que I est convergente et que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq e^{-A}. \tag{8}$$

(e) Déterminer en fonction de ε une valeur de A telle que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

(4) Bilan
On donne $\varepsilon = 10^{-4}$.

(a) Déterminer A issu de la question 3e.

(b) Déterminer le pas maximal h_{max} issu des questions 2c et 2d.

(c) Conclure sur le nombre de sous-intervalles à considérer pour évaluer I à 10^{-4} près.

Exercice 2.

(1) (a) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f (causale) définie par

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = t^2 e^{-3t}.$$

(b) Quel est son indice de sommabilité ?

(2) (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction f (causale) définie par

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = t^n e^{at}.$$

est donnée par

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > a, \quad \mathcal{L}(f)(p) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

On pourra raisonner par récurrence sur n.

(b) Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice 3.
Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f (causale) définie par

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = t\sin(3t)e^{-2t}.$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`