

**Corrigé du contrôle continu (rattrapage) du
12 juin 2025**

Examen et corrigé préparé grâce à Chat GPT.

Voir <https://chatgpt.com/share/684a7a43-6bfc-8011-a022-c2be5bc7c071>, à peine modifié pour l'énoncé plus pour le corrigé, car il y avait des erreurs de calculs !

Correction de l'exercice 1.

- (1) Méthode des rectangles à gauche ($n=4$)

Pas : $h = 0.5$

$$I_{\text{rect}} = 0.5 [f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5)] \\ \approx 0.5 \times (0 + \ln(1.25) + \ln(2) + \ln(3.25)) \approx 1.0475$$

- (2) Méthode des trapèzes ($n=4$)

$$I_{\text{trap}} = \frac{0.5}{2} [f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2)] \approx 1.4498$$

- (3) Méthode de Simpson ($n=4$)

$$I_{\text{simp}} = \frac{0.5}{3} [f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)] \approx 1.4331$$

- (4) Comparaison des résultats

Méthode	Approximation	Erreur absolue
Rectangles	1.0475	0.3857
Trapèzes	1.4498	0.016
Simpson	1.4331	2.059×10^{-6}

- (5) Influence de n

- Rectangles : ordre $O(h)$ - Trapèzes : ordre $O(h^2)$ - Simpson : ordre $O(h^4)$

Plus n est grand, plus la précision de Simpson s'améliore rapidement. L'erreur est divisée respectivement par 2, 4 et 16 quand le nombre n double.

Correction de l'exercice 2.

- (1) Application de la transformée de Laplace

L'équation devient :

$$q''(t) + 2q'(t) + q(t) = e^{-t}$$

Transformée de Laplace avec $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$:

$$s^2 Q(s) + 2sQ(s) + Q(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Q(s)(s^2 + 2s + 1) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Q(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

(2) Transformée inverse

On utilise :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^3} \right\} = \frac{t^2}{2} e^{-t} \Rightarrow q(t) = \frac{t^2}{2} e^{-t}$$

(3) Vérification

$$q(0) = 0, \quad q'(t) = e^{-t} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Rightarrow q'(0) = 0$$

(4) Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{2} e^{-t} = 0 \Rightarrow \text{la charge tend vers 0 : le condensateur se décharge.}$$