Chapitre 6

Transformées de Fourier

6.1. Décomposition en série de Fourier

Rédaction partielle, un certain nombre de passages sont manuscrits et fournis sur internet, à l'adresse habituelle, indiqués dans ce document

Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/somme_fourier.pdf`.

On pourra aussi consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier` ou `https://chatgpt.com/share/69315a1f-7794-8002-8977-3e5e66dfc236`.

6.1.1. Le produit scalaire dans le plan

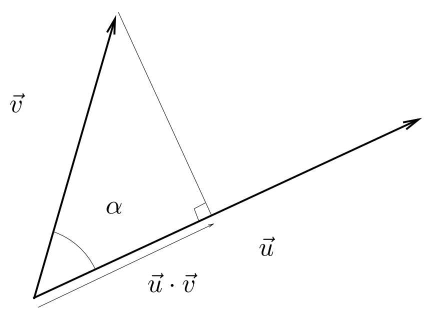

FIGURE 6.1. Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est défini par (voir figure 6.1) :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha, \tag{6.1}$$

où $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et α sont les normes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et α l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En dimension 2, on considère un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Voir figure 6.1. Dire que le point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ revient à écrire

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{6.2}$$

Puisque le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé, on a les égalités

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0, \tag{6.3a}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1, \tag{6.3b}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1. \tag{6.3c}$$

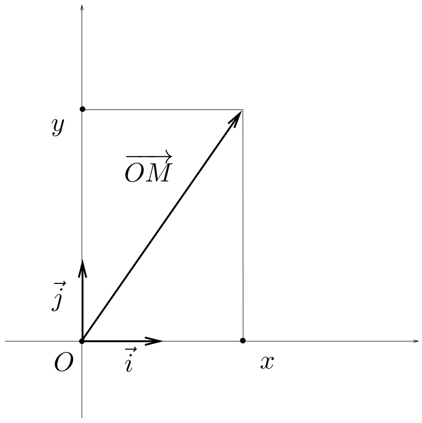

FIGURE 6.2. le vecteur $\vec{x}$ et le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Par linéarité, on déduit successivement de (6.2), (6.3a) et (6.3b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i} &= \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\vec{i},\\ &= x\vec{i}\cdot\vec{i}+y\vec{j}\cdot\vec{i},\\ &= x\times 1+y\times 0,\\ &= x.\end{aligned}$$

De même, on a $y=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}$ et donc, (6.2) devient

$$\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}\right)\vec{i}+\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}\right)\vec{j}. \tag{6.4}$$

Le fameux théorème de Pythagore implique

$$OM^2=x^2+y^2,$$

et donc

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2=\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}\right)^2+\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}\right)^2. \tag{6.5}$$

Toute la suite de ce chapitre, y compris les recompositions de Fourier n'est qu'une généralisation [1] des égalités (6.4). et (6.5).

6.1.2. Espaces Euclidiens

Lire aussi [Bas11a, Chapitre "Produits scalaires, espaces préhilbertien réel et espace euclidien", en particulier la section "Produits scalaires, espaces préhilbertien réel"] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/54/85/PDF/coursMT25_P07.pdf`.

6.1.3. Espaces préhilbertiens réels

On pourra consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/Base_de_Hilbert`

Soit E un espace préhilbertien réel.

Lire aussi [Bas11a, Chapitre "Produits scalaires, espaces préhilbertien réel et espace euclidien", en particulier la section "Produits scalaires, espaces préhilbertien réel"] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/54/85/PDF/coursMT25_P07.pdf`.

1. Avec un peu d'abstraction tout de même !

PROPOSITION 6.1. *On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une base orthormée d'un espace préhilbertien réelle, dite base Hilbertienne, qui vérifie*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}. \tag{6.6}$$

Sous certaines hypothèses, on a, pour tout $x \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \tag{6.7a}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2. \tag{6.7b}$$

6.1.4. Cas particulier d'un espace de fonctions

PROPOSITION 6.2. *Soit f, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, T-périodique, de carré localement intégrable[2]. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{2in\pi t}{T}} dt. \tag{6.8}$$

Alors on a l'égalité dite de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \tag{6.9}$$

De plus, si f est dérivable à droite et à gauche, admet une limite à droite et à gauche en t, alors

$$\frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi t}{T}} dt. \tag{6.10}$$

PROPOSITION 6.3. *Soit f, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodique, de carré localement intégrable. On pose,*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \tag{6.11a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt, \tag{6.11b}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt. \tag{6.11c}$$

Alors on a

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{6.12}$$

De plus, si f est dérivable à droite et à gauche, admet une limite à droite et à gauche en t, alors

$$\frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \tag{6.13}$$

---

2. Ce qui signigie que pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, $\int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty$. En particulier, cela a lieu si f est continue par morceaux par exemple.

De plus, si f est paire

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt, \tag{6.14a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt, \tag{6.14b}$$

$$b_n = 0, \tag{6.14c}$$

et si f est impaire

$$a_0 = 0, \tag{6.15a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 0, \tag{6.15b}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt. \tag{6.15c}$$

Le cas particulier habituel $T = 2\pi$ donne :

PROPOSITION 6.4. *Soit f, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de carré localement intégrable. On pose,*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \tag{6.16a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \tag{6.16b}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt. \tag{6.16c}$$

Alors on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{6.17}$$

De plus, si f est dérivable à droite et à gauche, admet une limite à droite et à gauche en t, alors

$$\frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) \tag{6.18}$$

De plus, si f est paire

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt, \tag{6.19a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \tag{6.19b}$$

$$b_n = 0, \tag{6.19c}$$

et si f est impaire

$$a_0 = 0, \tag{6.20a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 0, \tag{6.20b}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt. \tag{6.20c}$$

6.2. Transformées de Fourier

Non rédigé et non au programme cette année

Voir [Esc22, chapitre 3 : Série et transformée de Fourier].