Mécanique 4A OMI3 Automne 2023

QCM (maison) pour le 9 octobre 2023

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 2, section 2.5

Question 1 La limite de $\mathrm{Ln}(z)$ quand z tend vers zéro en étant non nul

- [x] est égale à $-\infty$
- [ ] n'existe pas
- [ ] est égale à $+\infty$
- [ ] est égale à 0
- [ ] est égale à $i\pi$

Explication **:** Voir la remarque 2.51 page 22 du cours.

Question 2 Le nombre $\mathrm{Ln}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ est égal à

- [x] $\ln(2) + 1/3\, i\pi$
- [ ] $2\,\ln(2) + 1/9\, i\pi$

Explication **:** Voir la définition du Logarithme complexe (2.48) du cours et le fait qu'on obtient facilement $|z| = 2$ et $\arg(z) = 1/3\,\pi$.

Question 3 ♣ La fonction $z \mapsto \mathrm{Ln}(z)$

- [x] est dérivable sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$
- [x] est continue sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$
- [ ] est dérivable sur $\mathbb{C}$
- [ ] est continue sur $\mathbb{C}$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication **:** Voir la proposition du cours 2.36.

Question 4 Pour tout θ, θ' dans $\mathbb{R}$, les égalités

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta',$$
$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta.$$

■ sont vraies ☐ sont fausses

Explication : Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice suivant, qui servira aussi pour la correction de la question 5.

Énoncé

1. En utilisant l'équation (2.28) du cours et/ou les formules d'Euler du cours (2.29) rappelées ici :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{1}$$

et pour tout réel θ

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \tag{2a}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right). \tag{2b}$$

montrer les formules suivantes : pour tout θ, θ' réels,

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta', \tag{3a}$$
$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta. \tag{3b}$$

2. Les formules (3) sont-elles valables pour θ et θ' complexes ? Si oui, démontrez-les !

Corrigé

1. Nous proposons deux façons de faire.
   (a) On raisonne exactement comme dans l'annexe A du cours.
   En effet, on utilise l'équation (1) de l'énoncé et on remplace dans
   $$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'},$$
   - $e^{i(\theta+\theta')}$ par $\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$,
   - $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$
   - et $e^{i\theta'}$ par $\cos\theta' + i\sin\theta'$.

   On obtient donc
   $$\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
   et, puisque,
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right), \tag{4}$$
   on a donc
   $$\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right),$$
   En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient donc les équations (3a) et (3b) de l'énoncé.

   (b) On peut aussi, plus longuement, utiliser les formules (1) et (2) de l'énoncé qui nous donnent successivement
   $$\cos(\theta+\theta') = \frac{1}{2}\left(e^{i(\theta+\theta')} + e^{-i(\theta+\theta')}\right), = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}e^{i\theta'} + e^{-i\theta}e^{-i\theta'}\right),$$
   et donc
   $$\cos(\theta+\theta') = \frac{1}{2}\Big((\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right) + (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\cos\theta' - i\sin\theta'\right)\Big),$$
   soit encore, grâce à (4) et la même égalité appliquée à $-\theta$ et $-\theta'$
   $$\cos(\theta+\theta') = \frac{1}{2}\Big(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right) + \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' - i\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right)\Big)$$
   et donc
   $$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta',$$
   ce qui fournit l'équation (3a) de l'énoncé. On montrerait de la même façon l'équation (3b) de l'énoncé.

2. Naturellement, les formules (3) de l'énoncé sont valables pour θ et θ' complexes. Démontrons-les. Nous proposons là encore deux façons de faire. Remarquons tout d'abord que les formules (1) et (2) de l'énoncé sont encore valables pour θ complexes. En effet, (2) n'est autre que la définition du cosinus et du sinus complexes donnés dans la proposition 2.27 du cours, dont (1) découle.
   (a) On ne peut utiliser la preuve du point 1a, fondée sur le fait que θ et θ' sont réels, puisque l'on a séparé la partie réelle et la partie imaginaire. En revanche, cet aspect n'a pas été utilisé dans la preuve du point 1b que l'on peut écrire pour θ et θ' complexes et qui utilise les équations (1) et (2) de l'énoncé, valables pour θ complexes.

   (b) Plus subtilement, on peut raisonner de la façon suivante, en utilisant la preuve uniquement du point 1a. Fixons tout d'abord θ' dans $\mathbb{R}$. Considérons les fonctions F et G définies sur $\mathbb{C}$ par : pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$F(z) = \cos(z+\theta') - \left(\cos z\cos\theta' - \sin z\sin\theta'\right), \tag{5a}$$
   $$G(z) = \sin(z+\theta') - \left(\cos z\sin\theta' + \cos\theta'\sin z\right). \tag{5b}$$
   Il est clair que F et G sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$, en zéro, de rayon de convergence égal à $+\infty$. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{6a}$$
   $$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \tag{6b}$$
   où a_n et b_n sont réels. D'après ce qu'on a démontré dans le point 1a, F et G sont nulles sur $\mathbb{R}$. Leur développement en série entière réel (de rayon de convergence aussi égal à $+\infty$) est donc nul et, par unicité du développement en série entière, les coefficients a_n et b_n sont donc tous nuls. D'après (6), F et G sont donc nulles sur $\mathbb{C}$. On fixe maintenant $z \in \mathbb{C}$ et on considère $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ définies par pour tout $z' \in \mathbb{C}$:
   $$\widetilde{F}(z') = \cos(z+z') - \left(\cos z\cos z' - \sin z\sin z'\right), \tag{7a}$$
   $$\widetilde{G}(z') = \sin(z+z') - \left(\cos z\sin z' + \cos z'\sin z\right). \tag{7b}$$
   On raisonne de la même façon en montrant que l'on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$\widetilde{F}(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{a}_n (z')^n, \tag{8a}$$
   $$\widetilde{G}(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{b}_n (z')^n, \tag{8b}$$
   où a_n et b_n sont cette fois-ci complexes. Pour tout z complexe fixé, $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ sont cette fois-ci nulles sur $\mathbb{C}$. On a donc montré que, pour tout z et z' complexes :
   $$\cos(z+z') - \left(\cos z\cos z' - \sin z\sin z'\right) = 0, \tag{9}$$
   $$\sin(z+z') - \left(\cos z\sin z' + \cos z'\sin z\right) = 0, \tag{10}$$
   ce qui nous permet de conclure.

Question 5 Pour tout θ, θ' dans $\mathbb{C}$, les égalités

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta',$$
$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta.$$

■ sont vraies

□ sont fausses

Explication **:** Voir la correction de la question 4.

Chapitre 3, section 3.2

Question 6 Pour définir l'intégrale d'une fonction f sur un chemin γ, il nous faut connaître

■ un paramétrage de γ et une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui contient γ.

□ une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui contient γ.

□ un chemin γ inclus dans le plan fendu $U = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

Explication **:** Voir la définition 3.1.

Question 7 L'intégrale de $f = z$ sur le chemin paramétré par $\gamma(t) = e^{it}$, pour $t \in [0, \pi/2]$ vaut

■ -1 □ -2 □ 4

Explication **:** Voir l' exemple 3.4.

Chapitre 3, section 3.3

Question 8 On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \cos(z)\, e^{iz}$$

On pose

$$I = \int_\gamma f(z)dz,$$

où γ est le segment $[A, B] = [1 + i, 3 + 2\, i]$.

■ On a
$$I = \frac{1}{4}\left(-e^{-4}\sin(6) - e^{-2}\sin(2) + i\left(-e^{-4}\cos(6) + e^{-2}\cos(2)\right)\right) + 1 + \frac{i}{2}.$$

□ On a
$$I = \frac{1}{2}\left(-e^{-4}\sin(6) - e^{-2}\sin(2) + i\left(-e^{-4}\cos(6) + e^{-2}\cos(2)\right)\right) + 1 + \frac{i}{2}.$$

□ On a
$$I = \frac{1}{4}\left(-e^{-4}\sin(6) - e^{-2}\sin(3) + i\left(-e^{-4}\cos(6) + e^{-2}\cos(7)\right)\right) + 1 + \frac{i}{2}.$$

Explication **:** Voir la correction de l'exercice de TD 3.8 page 33.

Question 9 Une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.

■ est analytique sur U

□ n'est sûrement pas assez régulière pour être analytique sur U

Explication **:** Voir le théorème 3.28.

Chapitre 3, section 3.4

Question 10 On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}.$$

Le résidu de f en $z = 1$ vaut

■ 1/3 □ 2/3 □ 5

Explication **:** C'est un pôle d'ordre $m = 1$. Voir le lemme 3.47.

Question 11 On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{(z+1)^2 (z-i)}.$$

Le résidu de f en $z = -1$ vaut

- [x] $1/2\, i \sin(1) - 1/2\, \sin(1) + 1/2\, i \cos(1)$
- [ ] $3/2\, i \sin(1) - 3/2\, \sin(1) + 3/2\, i \cos(1) + 4$
- [ ] $i \sin(1) - \sin(1) + i \cos(1)$

Explication **:** C'est un pôle d'ordre $m = 2$. Voir le lemme 3.48.

Chapitre 5, section 5.1

Question 12 On pose

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4\cos t}.$$

I vaut

- [x] $\frac{2\pi}{3}$
- [ ] $\frac{4\pi}{3}$
- [ ] 0

Explication **:** Voir l'exemple 5.3 du cours.

Question 13 On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X, Y) = \frac{Y+1}{X-8}.$$

On pose

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt.$$

I vaut

- [x] $-2/21\, \sqrt{7}\pi$
- [ ] $-2/21\, \sqrt{5}\pi$
- [ ] 0

Explication **:**
Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 47 du cours. On vérifie que l'hypothèse (5.1) est vérifiée. Ensuite, on définit la fonction f à partir de l'équation (5.2) du cours qui donne après calculs

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = -\frac{(z+i)^2}{z\,(z^2 + 1 - 16\,z)}.$$

Les pôles de f correspondent aux zéros de

$$z\left(z^2 + 1 - 16\,z\right).$$

Les pôles à l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon 1 appartiennent à l'ensemble

$$\left\{0, 8 - 3\sqrt{7}\right\},$$

Chacun de ces pôles est d'ordre 1 et le lemme 3.47 page 41 du cours permet de calculer les résidus de f en ces points donnés par

$$\left\{1, \frac{-63\sqrt{7} - 8\,i\sqrt{7} + 168 + 21\,i}{63\sqrt{7} - 168}\right\}.$$

On en déduit alors l'intégrale I de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) et qui vaut, selon l'équation (5.4) du cours :

$$I = -2/21\,\sqrt{7}\pi.$$

Chapitre 5, section 5.2

Question 14 Pour un écoulement plan irrotationnel incompressible associé au potentiel complexe f les équipotentielles sont définies par

- [x] $\phi = \mathrm{Re}(f)$ =constantes
- [ ] $\psi = \mathrm{Im}(f)$ =constantes

Explication **:** Voir la proposition 5.21.

Question 15 Pour un écoulement plan irrotationnel incompressible associé au potentiel complexe f lignes de courant sont définies par

- ☐ $\phi = \mathrm{Re}(f)$ =constantes
- ■ $\psi = \mathrm{Im}(f)$ =constantes

Explication : Voir la proposition 5.21.