Mécanique 4A OMI3

Automne 2023

QCM (maison) pour le 8 Novembre

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 1, section 1.1 et Annexe A

Question 1

Ce problème traite du calcul de $\cos(2\pi/5)$.

Pour tout ce problème, on considère le complexe z défini par $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, et on pose $c = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\quad s = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que $z^5 = 1$, puis que $z^3 = \overline{z}^2$.
2. En déduire deux équations en c et s puis en déduire que $4c^2 + 2c - 1 = 0$.
3. En déduire que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
4. Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/5)$?

☐ f ☐ p ☐ m ■ j *Reservé*

Voir section A.3.5, page 134 du cours.

Chapitre 3, section 3.3

Question 2 ♣ Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, une fonction f continue sur Ω et γ un chemin fermé inclus dans Ω. Je dis que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

- ■ C'est faux.
- ■ C'est vrai si f admet une primitive sur Ω.
- ■ C'est vrai si f est holomorphe sur Ω.
- ■ C'est vrai si f est holomorphe sur Ω sauf un nombre de point fini.
- □ C'est vrai.
- □ C'est vrai si f n'a pas de pôles sur Ω.
- □ C'est vrai si f n'a que des pôles simplessur Ω.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication **:** Voir les propositions 3.22 et 3.25.

Question 3

1. Démontrer le lemme 3.19 page 32 du cours, rappelé ici :

   Lemme 1 (Intégration par partie complexe)**.** *Soient f et g deux fonction holomorphes sur ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et un chemin γ dans l'ouvert Ω, d'origine z_0 et d'extrémité z_1. On a*

$$\int_\gamma f'(z)g(z)dz = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz + [fg]_{z=z_0}^{z=z_1} = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz + f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0). \qquad (1)$$

2. (a) En utilisant une intégration par partie complexe, déterminez l'intégrale de $f(z) = z\cos(z)$ sur le chemin $[0, i]$.

   (b) Auriez-pu faire ce même calcul sans intégration par partie complexe ?

☐ f ☐ p ☐ m ■ j *Reservé*

Voir correction de l'exercice de TD 3.9.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chapitre 3, section 3.4

Question 4 ♣ Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé inclus dans Ω, f une fonction holomorphe sur Ω sauf en un nombre fini de points où f admet un pôle. Je dis que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

- ■ C'est faux.
- ■ C'est vrai si tous les résidus de f en ces points sont nuls.
- ■ C'est vrai si f peut être prolongée de façon continue sur Ω.
- □ C'est vrai.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : D'après la proposition 3.44, on a, en notant α_k les pôles de f.

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \text{Rés}(f, \alpha_k)\text{Ind}_\gamma(\alpha_k).$$

De façon générale, la somme de droite est non nulle. Si tous les résidus sont nuls, cette somme est nulle. Si f est continue en chacun de ces pôles, cela signifie que f admet une singularité illusoire en chacun de ces points (voir le théorème 3.38 page 42 de la version longue, rappelé dans l'exercice 3.13 de TD). Dans ce cas, le résidu est encore nul en chacun de ces points et la somme est bien nulle. On peut aussi dire que f est prolongée de façon continue en chacun des points α_k et utiliser la proposition 3.25.

Question 5 ♣ L'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ vaut

- ■ $-i\pi \frac{i}{2e}$
- ■ $\frac{\pi}{2e}$
- ■ $i\pi \,\text{Rés}(f, i)$ où $f(z) = e^{iz}/(1+z^2)$
- □ $\frac{\pi}{4e}$
- □ $2\frac{\pi}{e}$
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir l'exemple 3.46 du cours, en utilisant le fait que, par parité,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

Chapitre 5, section 5.1

Question 6 On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X, Y) = \frac{X+1}{Y-4}.$$

On pose

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

I vaut

■ $-2/15\sqrt{15}\pi$. □ $-4/15\sqrt{15}\pi$. □ 0

Explication : Voir l'exerice de TD facultatif 5.6.

Question 7 On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X, Y) = X^3.$$

On pose

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

I vaut

■ 0 □ -1 □ 1 □ -2

Explication : Attention, cette fraction rationnelle "sans dénominateur" peut s'écrire aussi :

$$R(X, Y) = \frac{X^3}{1}.$$

Voir correction de l'exercice de TD 5.10.

Question 8 En appliquant la proposition 5.5 du cours à la fraction rationnelle $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{R}(z) = \left(z^2 + z + 1\right)^{-1},$$

on montre que la valeur de l'intégrale I donnée par

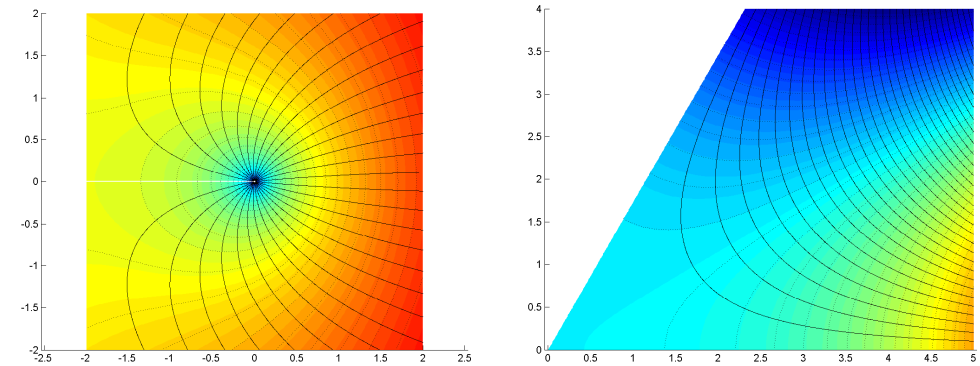
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + x + 1\right)^{-1} dx,$$

est donnée par

☒ $2/3\,\pi\,\sqrt{3}$ ☐ $2/3\,\pi\,\sqrt{3}\,i$ ☐ $4/3\,\pi\,\sqrt{3}$ ☐ 0

Explication : Voir correction de l'exercice de TD 5.11.

Chapitre 5, section 5.2



(a) (b)

Figure 1 – Un écoulement.

Question 9 Parmi les deux figures de la page 6, celle qui représente l'écoulement associé au potentiel complexe $f(z) = Uz + \mathrm{Ln}(z)$ est la figure :

☐ 1(b) ☒ 1(a)

Explication : Voir la page 55 du cours.