TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE OMI3

Mécanique 4A

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR 3

2023-2024, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 27 juillet 2023

Le lien original de ce document est le suivant :
http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/TDOMI3.pdf

# Liste des Travaux Dirigés

# Avant-propos

Ce polycopié constitue les TD de Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3 de Mécanique 4A (2023-2024, Automne).

Ce polycopié de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Mécanique 4A`'.
  — enfin sur '`OMI3`'.

Des exercices facultatifs, non traités en séances (sauf si demande), sont proposés sur cette version distribuée sur le Ouaib et le réseau.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

# Rappels sur les complexes et fonctions holomorphes

## Rappels sur les complexes

EXERCICE 1.1.
Déterminer les racines du polynôme $z^4 + z^2 + 1$.
Ce résultat sera utilisé dans l'exercice de TD 5.2 et généralisé dans l'exercice 1.5.

On pourra aussi traiter quelques un des exercices proposés dans l'exercice facultatif 1.6.

## Fonctions holomorphes

EXERCICE 1.2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $z \mapsto z^n$ est $\mathbb{C}$ dérivable. La preuve est-elle différente de celle où $f$ est considérée comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?
On pourra consulter les exercices 1.8 et 1.9.

EXERCICE 1.3.
Soit $\phi$ un réel quelconque. On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + iy) = x + ye^{i\phi} \tag{1.1}$$

(1) Montrer que $f$ est $\mathbb{R}^2$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et de classe $C^1$ (en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$).
(2) Montrer que $f$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable que si

$$\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

où $k$ appartient à $\mathbb{Z}$. Que vaut $f$ dans ce cas ?

EXERCICE 1.4.

(1) Soit $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$. Montrer que $f$ est $\mathbb{R}^2$-différentiable sur $\mathbb{C}$ tout entier mais ne vérifie les conditions de Cauchy-Riemann qu'en $z = 0$.
(2) Soit $f(z) = \sqrt{|xy|}$ pour $z = x+iy$. Montrer qu'en $z = 0$, $f$ vérifie bien les conditions de Cauchy-Riemann en $z = 0$, mais n'y est pas dérivable. Commenter.

## Exercices facultatifs

EXERCICE 1.5.
Cet exercice généralise le résultat de l'exercice 1.1.
*En cours de rédaction*

EXERCICE 1.6. On pourra traiter, à titre de révisions sur les nombres complexes, les exemples A.2, A.3, A.5 ou les exercices A.7, A.8, A.9, A.10, A.11, A.12, A.13 A.15, A.16, A.17, A.18, A.19, A.20, A.25 ou les problèmes corrigés de la section A.3 de l'annexe A.

EXERCICE 1.7.
Démontrer le résultat suivant

LEMME 1.1. *Si $f$ et $g$ sont $\mathbb{C}$-dérivables en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors $fg$ l'est aussi et on a*

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

La preuve est-elle différente du cas réel ?

EXERCICE 1.8.

(1) Redémontrer le résultat de l'exercice 1.2 en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann.
(2) Cette méthode est-elle pertinente ?

EXERCICE 1.9.

(1) Redémontrer le résultat de l'exercice 1.2 en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires. On posera donc $z = re^{i\theta}$ et on calculera les dérivées partielles de la fonctions par rapport à $r$ et $\theta$.
(2) Cette méthode est-elle pertinente ?

EXERCICE 1.10.
Démontrer le sens 2$\Longrightarrow$1 de la proposition 1.13 du cours.

EXERCICE 1.11.
Sur les figures 1.2, 1.3 et 1.4 du cours, les déformées des grilles tracées semblent former un réseau de courbes localement orthogonales. Nous reviendrons là-dessus au cours du chapitre 4 du cours. Le but de cet exercice est de montrer cette propriété « à la main ».
On considère une fonction $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ holomorphe en un complexe $z_0$ avec $f'(z_0) \neq 0$.

(1) En posant $f'(z) = \rho e^{i\theta}$, quelle est la nature de l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui a $h$ associe $f'(z)h$ ?
(2) Montrez que si $h$ tend vers zéro en restant à argument fixe, alors la courbe d'équation $f(z_0 + h)_{h\in\mathbb{R}}$ est tangente à la droite d'équation $Z = f(z) + hf'(z)$.
(3) Déduire des deux questions 1 et 2 que si le nombre $\rho$ est assez petit, les deux courbes $f(z_0 + h)_{h\in\mathbb{R} \text{ et } |h|\leq\rho}$ et $f(z_0 + ih)_{h\in\mathbb{R} \text{ et } |h|\leq\rho}$, sont localement perpendiculaires, c'est-à-dire que leurs tangentes sont perpendiculaires.

On pourra consulter l'exercice 1.12 pour étudier ce qui se passe dans le cas où $f'(z_0) = 0$.

EXERCICE 1.12. On considère la fonction $f(z) = z^p$ pour $p$ entier supérieur ou égal à 2 au voisinage de $z_0 = 0$, où la dérivée est donc nulle.

(1) Dans le cas $p = 2$, quelles sont les images des demi-droites d'équation $z = t$ et $z = it$ pour $t$ décrivant $\mathbb{R}^p$ par $f$ ? Conclure, par rapport à l'exercice 1.11.
(2) Dans le cas général $p \geq 2$, quelles sont les images des demi-droites d'équation $z = te^{i\theta}$ et $z = te^{i\theta}e^{i\alpha}$ pour $t$ décrivant $\mathbb{R}^p$ par $f$, pour $\theta$ et $\alpha$, deux angles fixés ? Conclure, par rapport à l'exercice 1.11.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

# Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$

EXERCICE 2.1.

(1) Calculer les logarithmes complexes des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} &z = 1 + i, \\ &z = 1, \\ &z = 1 - i, \\ &z = -1 + \varepsilon i, \text{ où } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \\ &z = -1 - \varepsilon i, \text{ où } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \\ &z = -1 + i, \\ &z = -1 - i. \end{aligned}$$

(2) Déterminer les limites de $\text{Ln}(-1 + \varepsilon i)$ et $\text{Ln}(-1 - \varepsilon i)$ où $\varepsilon$ tend vers 0 par valeurs strictement positives et commenter.

EXERCICE 2.2.

(1) Pour $x = 1$, $y = 1$ et $z = x + iy$, calculer $\exp(\text{Ln}(z)) - z$ et conclure.
(2) Pour $x = 2$, $y = 10$ et $z = x + iy$, calculer $\text{Ln}(\exp(z)) - z$ et conclure.
(3) Pour $z_1 = 2e^{0.9i\pi}$ et $z_2 = 10e^{0.8i\pi}$, calculer $\text{Ln}(z_1 z_2) - \text{Ln}(z_1) - \text{Ln}(z_2)$ et conclure.

EXERCICE 2.3.
Développez en série entière à l'origine $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

## Exercices facultatifs

EXERCICE 2.4.
Dans le cours, le point 3 de la proposition 2.36 donne le lien entre $\overline{\text{Ln}(z)}$ et $\text{Ln}\,(\overline{z})$. Dans cet exercice, nous déterminons de même le lien entre les logarithmes de $z$ et $z'$, le symétrique de $z$ par rapport à l'axe des $y$.
Soit $z \in U$, le complémentaire de l'axe négatif (le plan fendu), donné par $U = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. On note $\theta$ la détermination principale de l'argument de $z$.

(1) En supposant $\theta \in ]0, \pi[$, déterminer $\text{Ln}(z')$ en fonction de $\text{Ln}(z)$.
(2) Faire de même en supposant $\theta \in ]-\pi, 0[$

EXERCICE 2.5.

(1) Rappeler d'où vient le résultat (2.31) du cours, rappelé ici :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)\,. \tag{2.1}$$

(2) En utilisant cette définition, déterminer les dérivées partielles de $f$ définie par $f(z) = f(x, y) = e^{x+iy}$ et retrouver ainsi la dérivée de $f$.

(3) *Question facultative*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, déterminer
$$\lim_{H\to 0} \frac{f(z+H)-f(z)}{H},$$
et en déduire la dérivée de $f$.

*Indication*

On posera $H = (h,k)$ où $h$ et $k$ sont réels et on écrira
$$f(x+h,y+k)-f(x,y) = (f(x+h,y+k)-f(x,y+k)) + (f(x,y+k)-f(x,y)).$$

EXERCICE 2.6.

(1) (a) Rappeler la définition de $z^\alpha$ pour $z$ et $\alpha$ complexes.
   (b) Pourquoi cette définition n'est pas valable pour $z$ dans $\mathbb{R}_-$ ?
(2) Quelle est la définition usuelle de $z^n$ pour $n$ entier et $z$ complexe. Cette définition est-elle valable pour $z$ dans $\mathbb{R}_-$ ?
(3) Montrer que les deux définitions coïncident finalement, en montrant le passage de l'une à l'autre.

EXERCICE 2.7.

(1) Déterminer $\mathrm{Ln}(e^{ix})$ pour $x$ réel, appartenant à $]-\pi,\pi[$.
(2) Donner une condition suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $\ln(e^{iz}) = iz$.

EXERCICE 2.8.
Développez en série entière en $z_0$, pour $z_0 \neq 1$, $\frac{1}{z-1}$.

EXERCICE 2.9.
Développez en série entière en $z_0$, pour $z_0 \neq 1$, $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus, on demande d'indiquer le rayon de convergence de déterminer explicitement la série entière.

EXERCICE 2.10.
Déterminer en tout point $z_0$ où elle est définie la série entière de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de $z_0$.

EXERCICE 2.11.
On considère la série entière
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$$
.

(1) Quel est son rayon de convergence ?
(2) On note $f(z)$ sa somme. Que vaut $\lim_{t\to 1} f(t)$ ? (on prend $0 < t < 1$ ; minorer $f$ par ses sommes partielles).
(3) Plus généralement que vaut $\lim_{t\to 1} f(tw)$ (ici encore $t$ est pris dans $]0,1[$), lorsque $w$ vérifie une équation $w^{2^N} = 1$ ?
(4) En déduire qu'il est impossible de trouver un ouvert $U$ connexe intersectant $D(0,1)$ mais non inclus entièrement dans $D(0,1)$ et une fonction holomorphe $g(z)$ sur $U$ tels que $g = f$ sur $U \cap D(0,1)$.
(5) Pour tout $z_0 \in D(0,1)$ déterminer alors le rayon de convergence de la série entière de $f$ au point $z_0$.

TRAVAUX DIRIGÉS 3

# Intégration des fonctions complexes

EXERCICE 3.1.
On considère la fonction $f$ définie par

$$f(z) = ze^{(z^2)}$$

Déterminer

$$I = \int_\gamma f(z)dz,$$

où $\gamma$ est le segment $[A, B] = [1 + i, 3 + 2\,i]$.

EXERCICE 3.2.

(1) Quelle est la primitive de $z \mapsto 1/z^2$ (au sens complexe) ?

(2) En déduire

$$\mathcal{I} = \int_S \frac{dz}{z^2}, \tag{3.1}$$

où $y > 0$ est un paramètre fixé et $S$ est le segment d'extrémités $z_1 = iy$ et $z_2 = 1 + iy$.

(3) Montrer que

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{3.2}$$

(4) Exprimez maintenant l'intégrale $\mathcal{I}$ en utilisant un paramétrage adapté et déduire des questions précédentes, la valeur de $F(y)$ donnée par

$$\forall y > 0, \quad F(y) = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx. \tag{3.3}$$

(5) *Question facultative*

Pourriez-vous établir le résultat de la question 4, à la main, sans utiliser le calcul complexe.

EXERCICE 3.3.

(1) On considère l'intégrale complexe suivante :

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} \tag{3.4}$$

où $\gamma$ est le segment $[1, 1 + i]$.

(a) En considérant un paramétrage simple de ce segment, exprimer $I$ en fonction de

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + it} \tag{3.5}$$

(b) Calculer les primitives des parties réelles et imaginaires de $\mathcal{I}$ et en déduire que

$$I = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4}. \tag{3.6}$$

(c) Retrouver ce résultat plus rapidement, en utilisant une primitive de $1/z$.

(2) Refaire rapidement tous les calculs de la question 1 en considérant cette fois-ci le segment $[1-i, 1+i]$.

(3) (a) On admet qu'en faisant des calculs identiques à ceux de la question 1a-1b, sur le segment $[-1-i, -1+i]$, on aurait cette fois-ci :

$$I = \int_{[-1-i,-1+i]} \frac{dz}{z} = i \int_{-1}^{1} \frac{1}{-1+it} dt = -\frac{i\pi}{2}. \tag{3.7}$$

Montrer qu'en utilisant la méthode de la question 1c, on ne tombe plus sur ce résultat !

(b) *Question facultative*

Pourquoi ?

(c) *Question facultative*

Comment remédier à cela pour retrouver le résultat (3.7) en utilisant une primitive de $1/z$ ?

EXERCICE 3.4.
Cet exercice a été donné à l'interrogation de TD (Automne 2022).

(1) En raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, mettre la fonction $f(z) = e^z/z$ sous la forme de la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction non continue en zéro.
(2) Conclure sur l'ordre du pôle 0 de la fonction $f$.
(3) Retrouver la valeur du coefficient devant $1/z$ en utilisant un calcul de résidu.

EXERCICE 3.5.
Cet exercice a été donné à l'examen (Automne 2022).
On considère la fonction $\psi$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

Déterminez le résidu de $\psi$ en 0.

EXERCICE 3.6.

(1) On considère la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + z - 2}.$$

Déterminez le résidu de $f$ en 1.

(2) On considère la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \frac{\mathrm{Ln}(2+z)}{z^2}.$$

Déterminez le résidu de $f$ en 0.

## Exercices facultatifs

EXERCICE 3.7.
Démontrer les formules de l'exemple 3.7 page 29 du cours.

EXERCICE 3.8.
On considère la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \cos(z)\, e^{iz}$$

Déterminer

$$I = \int_\gamma f(z) dz,$$

où $\gamma$ est le segment $[A, B] = [1+i, 3+2\,i]$.

EXERCICE 3.9.

(1) Démontrer le lemme 3.19 page 32 du cours, rappelé ici :

LEMME 3.1 (Intégration par partie complexe). *Soient $f$ et $g$ deux fonction holomorphes sur ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ et un chemin $\gamma$ dans l'ouvert $\Omega$, d'origine $z_0$ et d'extrémité $z_1$. On a*

$$\int_\gamma f'(z)g(z)dz = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz + [fg]_{z=z_0}^{z=z_1} = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz + f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0). \tag{3.8}$$

(2) (a) En utilisant une intégration par partie complexe, déterminez l'intégrale de $f(z) = z\cos(z)$ sur le chemin $[0, i]$.

(b) Auriez-pu faire ce même calcul sans intégration par partie complexe ?

EXERCICE 3.10.

On cherche, dans cet exercice, à redémontrer l'équation (3.14) de l'exemple 3.23 du cours par une méthode alternative.

(1)

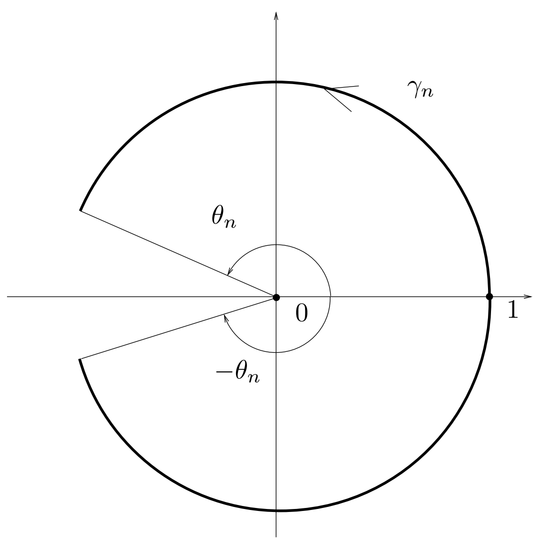


FIGURE 3.1. Le chemin $\gamma_n$.

Considérer le chemin $\gamma_n$ défini sur la figure 3.1 défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(\theta_n)$ étant une suite strictement croissante de réels, tendant vers $\pi$ et calculer

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z}. \tag{3.9}$$

(2) En passant à la limite $n \to +\infty$ dans le résultat précédent, retrouver l'équation (3.14) de l'exemple 3.23 du cours.

EXERCICE 3.11.

Cet exercice a été donné à l'examen (Automne 2022).

(1) En raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, mettre la fonction $f(z) = e^z/z^2$ sous la forme de la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction non continue en zéro.

(2) Conclure sur l'ordre du pôle 0 de la fonction $f$.

(3) Retrouver la valeur du coefficient devant $1/z$ en utilisant un calcul de résidu.

EXERCICE 3.12.
Cet exercice a été donné à l'examen (Automne 2022).
On considère la fonction $\psi$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$$

Déterminez le résidu de $\psi$ en 0.

EXERCICE 3.13.
Démontrer le théorème 3.38 de la version longue du cours, rappelé ici :

THÉORÈME 3.2 (Théorème de prolongement de Riemann). *Soient $a$ un complexe, $U$ un ouvert contenant $a$ et $f$ holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) La singularité $a$ de $f$ est illusoire ;*

*(2) $f$ possède possède un prolongement continu en $a$ ;*

*(3) $f$ est bornée sur $U \setminus \{a\}$.*

*(4) On a*

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0. \tag{3.10}$$

EXERCICE 3.14.

(1) Soit $G$ une fonction holomorphe sur un voisinage $U$ de l'origine.

   (a) On pose

   $$\forall z \in U \setminus \{0\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2} G(z).$$

   En écrivant, $f$ sous la forme de l'équation (3.24) du cours, déterminez une conditions sur les coefficients du développement en série entière de $G$ pour que 0 soit un pôle d'ordre 2 de $f$ mais que le résidu de $f$ en zéro soit nul.

   (b) Exhibez explicitement une telle fonction $G$.

(2) Sauriez-vous de même exhiber une fonction $G$ qui ait un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ à l'origine avec un résidu en zéro nul ?

TRAVAUX DIRIGÉS 4

# Transformations conformes

Ce chapitre, désormais non traité, est facultatif.

EXERCICE 4.1. On cherche à trouver une transformation conforme qui envoie un cercle sur une droite. On pose, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ fixé et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{4.1}$$

(1) Montrer que si $ad - bc \neq 0$, $f$ est une application injective de tout ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ dans $f(U)$. Que peut-on en déduire.

(2) Dans le cas, où $a = c = 1$, $b = -i$ et $d = i$, montrer que $f$ est une transformation conforme entre l'axe des réels et le cercle de rayon 1 et de centre l'origine, sauf le point 1.

TRAVAUX DIRIGÉS 5

# Applications de l'analyse complexe

## Calculs d'intégrales

EXERCICE 5.1.
Considérons la fonction de deux variables

$$R(X,Y) = \frac{1}{Y-2}.$$

(1) Montrer que cette fonction satisfait les hypothèses de la proposition 5.1 du cours et en déduire l'expression de l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin t - 2} dt,$$

sous la forme d'une somme de résidus, d'une fonction convenablement choisie.

(2) Calculer cette somme et conclure.

(3) *Question facultative*

Comment auriez-vous fait pour calculer l'intégrale $I$ sans théorème des résidus ?

*Dans tous les exercices qui suivent, on montrera d'abord de préférence, l'existence des intégrales définies sur des intervalles non bornés avant de les calculer !*

EXERCICE 5.2.
On considère la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4+z^2+1}.$$

(1) Déterminer les points singuliers de $f$ et leur nature (c'est-à-dire déterminer les pôles et leur multiplicité).

(2) Soit le chemin $\gamma$ formé de

$$I = \{z \in \mathbb{C} : \quad z \in \mathbb{R}, \quad -a \leq z \leq a\}, \quad a > 0,$$

et

$$J = \left\{z \in \mathbb{C} : \quad z = ae^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\right\}.$$

Montrer que la limite de $\int_J f(z)dz$ quand $a$ tend vers l'infini est nulle.

(3) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$A = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+x^2+1} dx.$$

(4) Reprendre rapidement les questions 2 et 3, en utilisant directement la proposition 5.8 page 51 du cours.

Le résultat de cet exercice sera généralisé dans l'exercice 5.13.

EXERCICE 5.3.
Soit $a > 0$ un réel. On cherche à calculer avec le théorème des résidus l'intégrale suivante :

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx.$$

(1) Montrer que $I(a)$ existe.

(2) Appliquer la proposition 5.8 du cours à la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2}$$

pour calculer $I(a)$.

(3) (a) Montrer rapidement les formules de la proposition 2.27 du chapitre 2.

(b) Aurait-on pu appliquer la proposition 5.8 du cours à la fonction $g$ définie par

$$g(z) = \frac{\cos az}{(1+z^2)^2},$$

pour calculer $I(a)$ ? Expliquer !

## Applications à la mécanique des fluides

EXERCICE 5.4.

(1) On étudie le potentiel complexe donné par l'équation (5.32h) du cours :

$$f(z) = kz^n, \text{ pour } k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.1}$$

Voir la figure 5.6 du cours.

Montrer que les droites passant par l'origine et faisant un angle $K\pi/n$ pour $K \in \mathbb{Z}$ sont des lignes de courant.

(2) (a) Que est l'inconvénient de considérer $n$ entier ?

(b) Montrer que l'on peut prendre $n$ réel quelconque.

EXERCICE 5.5.

On étudie le potentiel complexe donné par l'équation (5.32e) du cours :

$$f(z) = Uz + K/z, \text{ pour } U, K \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Nous allons montrer que cet écoulement est de vitesse $(U, 0)$ à l'infini et tel qu'un cercle est une ligne de courant (donc pourra être considéré comme condition aux limites correspondant à un obstacle). Voir la figure 5.1 page suivante correspondant à $U = 10$ et $K = 1$ (que vous ferez vos-même lors des Travaux Pratiques, voir la question 1.6 de l'exercice 5 du TP 1).

(1) Montrer qu'une des lignes de courant est la réunion du cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine et de rayon $R = \sqrt{K/U}$ et de l'axe $x$.

(2) Montrer que le champ des vitesses à l'infini est $(U, 0)$.

(3) (a) Montrer que si l'on pose $K = UR^2$, alors l'équation des lignes de courant se met sous la forme

$$y\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = C_2. \tag{5.3}$$

(b) En déduire que les lignes de courant sont symétriques par rapport à l'axe $y$ et que deux lignes correspondant à $C_2$ et $-C_2$ sont symétriques par rapport à l'axe $x$.

(c) Quelle est l'asymptote de la ligne de courant qui coupe l'axe $y$ au point d'ordonnée $b$ ?

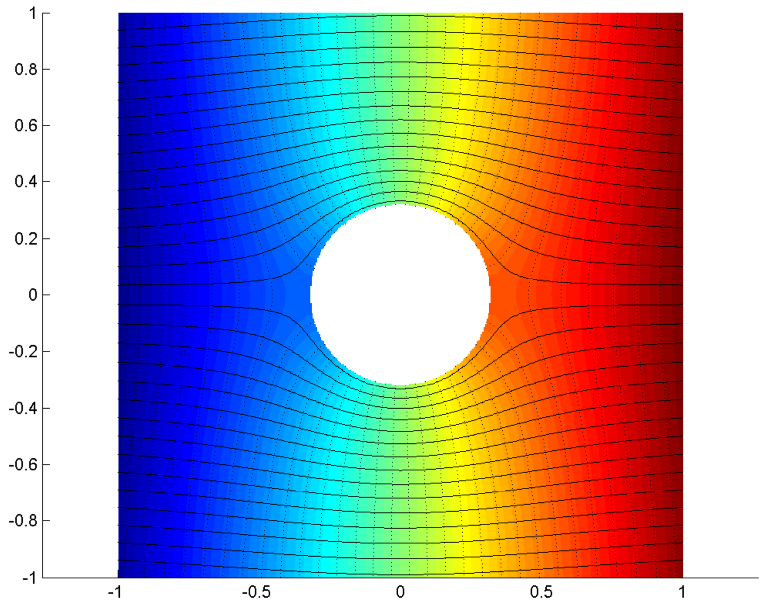


FIGURE 5.1. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.2).

## Exercices facultatifs

EXERCICE 5.6.
On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X,Y) = \frac{X+1}{Y-4}.$$

Déterminer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

EXERCICE 5.7.
Cet exercice a été donné à l'examen de TD de l'Automne 2020.
On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X,Y) = \frac{X^2}{Y-4}.$$

Déterminer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

EXERCICE 5.8.
Cet exercice a été donné à l'examen de TD de l'Automne 2020.
On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X,Y) = \frac{Y^2}{X-4}.$$

Déterminer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

EXERCICE 5.9.
On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X, Y) = \frac{X^2 + 2}{1}.$$

Déterminer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt.$$

EXERCICE 5.10.
On considère la fraction rationnelle $R(X, Y)$ définie par

$$R(X, Y) = \frac{X^3}{1}.$$

Déterminer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt.$$

EXERCICE 5.11.
Cet exercice a été donné à l'examen de TD de l'Automne 2020.

(1) Appliquer la proposition (5.5) du cours à la fraction rationnelle $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{R}(z) = \left(z^2 + z + 1\right)^{-1}.$$

(2) En déduire la valeur de l'intégrale $I$ donnée par

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + x + 1\right)^{-1} dx.$$

(3) Comment feriez-vous pour déterminer à la main (sans utiliser le théorème des résidus) la valeur de l'intégrale $I$ ?

EXERCICE 5.12.
Cet exercice a été à donné l'examen de TD de l'Automne 2020.

(1) Appliquer la proposition (5.5) du cours à la fraction rationnelle $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{R}(z) = \frac{z + i}{z^4 + 1}.$$

(2) En déduire la valeur de l'intégrale $J$ donnée par

$$J = \int_0^{\infty} \left(x^4 + 1\right)^{-1} dx.$$

(3) Comment feriez-vous pour déterminer à la main (sans utiliser le théorème des résidus) la valeur de l'intégrale $J$ ?

EXERCICE 5.13.
Cet exercice généralise le résultat donné dans l'exercice 5.2.
*En cours de rédaction*

EXERCICE 5.14.
Soit, pour $\alpha$ réel, $0 < \alpha < 1$, l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1 + x)}.$$

On considérera le chemin représenté sur la figure 5.2 page suivante.

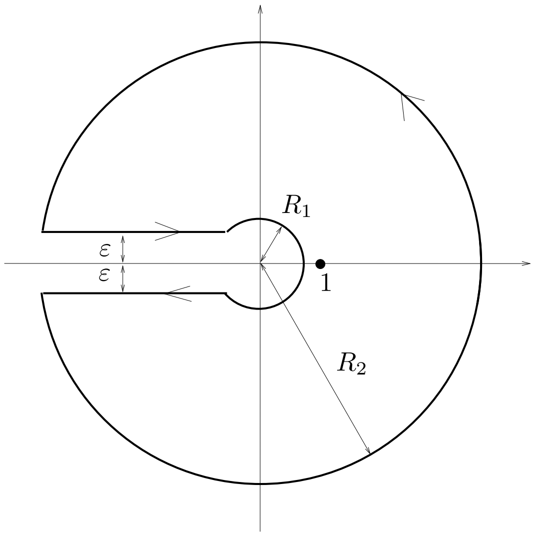


FIGURE 5.2. Le chemin $\gamma$ utilisé.

On utilisera le théorème des résidus appliqué à la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{z^{1-\alpha}(1-z)} = \frac{1}{e^{(1-\alpha)\,\mathrm{Ln}(z)}(1-z)}$$

en passant à la limite $\varepsilon$ et $R_1$ tendant vers zéro et $R_2$ vers l'infini et on en déduira $I(\alpha)$.

EXERCICE 5.15.
On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2} dx. \tag{5.4}$$

(1) On considère la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{1+z^2}. \tag{5.5}$$

Montrer que pour tout complexe $z = \rho e^{i\theta}$, on a

$$|f(z)| = \frac{\rho e^{-\rho \sin\theta}}{|1+\rho^2 e^{2i\theta}|}. \tag{5.6}$$

(2) (a) On considère $\widetilde{\gamma}_R$ le demi cercle de centre l'origine de rayon $R$, inclus dans le demi-plan d'ordonnée positive, paramétré par $z = Re^{i\theta}$ où $\theta$ décrit $[0, \pi]$, En utilisant le lemme 3.10 du cours, et (5.6), montrer que

$$\left| \int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^2}{R^2-1} \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta. \tag{5.7}$$

(b) Montrer que, par symétrie,

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \tag{5.8}$$

(c) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{5.9}$$

(d) Déduire finalement de (5.7), (5.8) et (5.9) que

$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}, \tag{5.10a}$$

et que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz = 0. \tag{5.10b}$$

(3) Montrer enfin qu'en adaptant la preuve de la proposition 5.8 du cours, et en utilisant (5.10b), l'intégrale $I$ existe et que

$$I = \pi\,\text{Rés}(f,i). \tag{5.11}$$

(4) Déterminer $I$.

(5) (a) En choisissant $z = R$ avec $R$ tendant vers l'infini, déduire de (5.6) que $|zf(z)|$ ne peut tendre vers zéro quand $|z|$ tend vers l'infini.

(b) En déduire qu'il n'est pas possible d'appliquer la proposition 5.8 du cours à la fonction $f$.

EXERCICE 5.16.
Soit $a$ un réel positif. Calculer

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1-2a\cos x + a^2}dx,$$

en intégrant $z/(a-e^{-iz})$ le long du rectangle de sommets $\pi$, $-\pi$, $-\pi+in$, $\pi+in$ ($n$ entier). On pourra d'abord considérer le cas $a > 1$.

EXERCICE 5.17.
Soit $a$ un réel de valeur absolue strictement plus petite que 1. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx = \frac{\pi}{\cosh(a\pi/2)}$$

en intégrant $e^{az}/(\cosh z)$ le long du rectangle de sommets $-R$, $R$, $R+i\pi$, $-R+i\pi$.

EXERCICE 5.18.
Cet exercice, suggéré par Arie Biesheuvel, est issu des exemples 5.6.5 et 5.6.6 de [AF03] et servira lors du TP 1.
Il s'agit d'étudier un cas particulier de la fameuse transformation de Schwarz-Christoffel, évoquée dans [AF03, théorème 5.6.1], et qui permet de transformer un domaine à bord polygonal.

(1) (a) Montrer que la fonction $z \mapsto z^{1/2}$ est une bijection du plan fendu $U = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ vers le demi plan complexe $Q$, défini par

$$Q = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in ]-\pi/2,\pi/2[\right\}. \tag{5.12}$$

On notera $\sqrt{\ }$, cette fonction.

(b) Quelle est sa réciproque ?

(c) Conclure.

(2) *Attention*, contrairement au choix du cours, la fonction $\sqrt{\ }$ utilisée dans [AF03] est définie avec la coupure $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{C}$ (voir [AF03, p. 47]). Cela correspond au même choix pour le logarithme complexe (voir [AF03, p. 49]).

Comment modifier les résultats de la question 1 pour respecter ce choix ?

*Pour toute la suite de cet exercice, cette convention est désormais adoptée.*

(3) (a) Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et le demi plan complexe $Q$, défini par

$$Q = \left\{z \in Ce, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in ]0, \pi[\right\}. \tag{5.13}$$

Montrer que la fonction définie par

$$w = F(z) = s\sqrt{z^2 - 1}, \tag{5.14}$$

est une bijection de $Q$ sur lui-même.

(b) Quelle est la réciproque de la fonction $F$ ?

(c) Si $z$ est un réel négatif, quelle est la définition de $\sqrt{-z}$ ?

(d) En déduire les images respectives par $F$
— de 0 ?
— de 1 ?
— du segment $[0, 1]$ ?
— de l'intervalle $[1, \infty[$ ?
— de l'intérieur de $Q$ ($Q$ sans les axes ni la coupure) ?

(e) Quelles sont les images respectives par $F$
— du segment $[-1, 0]$ ;
— de l'intervalle $]-\infty, -1]$.

(f) Est-ce que la partie $\mathbb{R}_-$ a un antécédent par $F$ ?

(4) (a) En utilisant les notations de la section 5.2.1.3 de la version longue du cours, considérer l'écoulement laminaire défini par l'équation (5.32a) du cours avec $\alpha = 0$ et la transformation conforme $F$ mise en évidence dans ce qui précède. Quel est l'expression du potentiel complexe $g$ sur $\mathcal{D}$ dans le plan $w$ ?

(b) Quel sens physique donner aux parties $[0, is]$ et $\mathbb{R}_+$ dans le plan $w$ pour cet écoulement ?

(c) En utilisant les équations (5.60) de la version longue du cours, déterminer les équations des lignes de courant et des équipotentielles dans la plan $w$.

TRAVAUX DIRIGÉS 6

# Introduction aux distributions

## Limite de suite de distributions

EXERCICE 6.1.
Trouver la limite au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) quand $h$ tend vers zéro de la suite de distributions $(\delta_h - \delta_{-h})/(2h)$.

EXERCICE 6.2.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1, \tag{6.1a}$$

$$\int_{\mathbb{R}} yf(y)dy \text{ existe.} \tag{6.1b}$$

On considère la suite de fonctions définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nf(nx). \tag{6.2}$$

(1) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effectuant le changement de variable $x = y/n$ étudier la limite quand $n \to \infty$ de

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx. \tag{6.3}$$

(2) Que peut-on en déduire ?

(3) (a) Dans cette question, $f$ est définie comme la fonction porte [1] $f = \Pi$.

   (i) Tracer $f$ et $f_n$.

   (ii) Vérifier que la fonction porte vérifie (6.1).

   (iii) Y'a-t-il convergence simple de $f_n$ ? Y'a-t-il convergence de $f_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ?

  (b) Dans cette question, $f$ est définie comme la fonction affine par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, égale à 1 en 0.
  Répondre aux mêmes questions que dans la question 3a.

  (c) On admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}. \tag{6.5}$$

  Définir la fonction $f$ et répondre aux mêmes questions que dans la question 3a.

On pourra aussi consulter l'exercice de TD 6.17.

1. dont on rappelle l'expression

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & \text{si } t \notin [-1/2, 1/2]. \end{cases} \tag{6.4}$$

C'est aussi $\chi_{[-1/2,1/2]}$, la fonction caractéristique de $[-1/2, 1/2]$.

## Dérivation des distributions

EXERCICE 6.3.

(1) Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

On pose $\Omega = \mathbb{R}$.

(a) $f$ est-elle dérivable comme fonction ? Quelle est sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ?

(b) Notons $H$ la fonction de Heaviside.

(i) Peut-on écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = H(x)\,? \tag{6.7}$$

(ii) Peut-on écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = H(x)\,? \tag{6.8}$$

(iii) Peut-on écrire

$$f' = H \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,? \tag{6.9}$$

(iv) Peut-on écrire

$$f' = H \text{ p.p. sur } \Omega\,? \tag{6.10}$$

(2) Soient $b \in \mathbb{R}_+$ et la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x+b, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Répondre aux mêmes questions que dans la question 1.

## Produit de distributions

EXERCICE 6.4.

(1) Montrer l'équation de l'exemple 6.52 page 81 du cours : si $a$ appartient à $\Omega$, on a, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(x-a)\delta_a = 0, \tag{6.12a}$$

$$(x-a)\delta_a' = -\delta_a. \tag{6.12b}$$

On pourra montrer (6.12b) de deux façons différentes.

(2) Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$((x-a)\delta_a)' = 0.$$

On pourra consulter l'exercice 6.10 qui constitue une généralisation de cet exercice.

EXERCICE 6.5.

Calculer, de deux façons différentes, les dérivées au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $\sin H$ et de $\cos H$ (c'est-à-dire, des fonctions $x \mapsto \sin(x)H(x)$ et $x \mapsto \cos(x)H(x)$ où $H$ est la fonction de Heaviside).

EXERCICE 6.6.

Un étudiant écrit le raisonnement suivant :

« Soient $g$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $H$ la fonction de Heaviside. J'applique la proposition 6.53 du cours à la distribution $T = H$ : j'ai donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$(gH)' = g'H + gH' = g'H + g\delta.$$

En vertu du lemme 6.51 du cours, on a $g\delta = g(0)\delta$ et donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$(gH)' = g'H + gH' = g'H + g(0)\delta,$$

soit encore

$$(gH)' = g'H + g(0)\delta. \tag{6.13}$$

»

(1) Ce raisonnement n'est pas justifié, car il manque une hypothèse ! Laquelle ?

(2) En fait, la formule (6.13) est vraie ! Pouvez-vous la démontrer correctement ?

## Série de distributions

EXERCICE 6.7.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par

$$T_n = \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta'. \tag{6.14}$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite numérique $(a_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \langle T_n, \phi \rangle, \tag{6.15}$$

tend vers zéro.

(b) En déduire que la suite de distribution $T_n$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) (a) Montrer pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\langle T_n, \phi \rangle| \leq \frac{M}{n^2}. \tag{6.16}$$

(b) En déduire que la série numérique de terme général $a_n$ converge.

(c) En déduire que la série de distribution de terme général $T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

## Exercices facultatifs

EXERCICE 6.8.
Soit $g$, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (xg)\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = g. \tag{6.17}$$

EXERCICE 6.9.
Un exercice de révision de la matière « traitement du signal » est le suivant : « On considère le signal $s$ défini par

$$s(t) = (1 - |t|)\,\Pi(t), \tag{6.18}$$

où $\Pi$ désigne la fonction porte (définie dans l'exercice 6.2, voir (6.4).) Tracer $s$, $s'$ et $s''$. »

(1) Tracer le graphe de la fonction $s$.

(2) (a) Est-ce que $s$ est une fonction dérivable ?

(b) Déterminer la distribution $s'$. « Tracer »-la en adoptant la convention de représenter les dirac par des flèches verticales proportionnelles aux coefficients.

(c) Déterminer la distribution $s''$. « Tracer »-la en adoptant la convention de représenter les dirac par des flèches verticales proportionnelles aux coefficients et les dérivées des dirac par des doubles flèches verticales proportionnelles aux coefficients.

EXERCICE 6.10.
Cet exercice, donnée en examen à l'automne 2020, constitue une généralisation de l'exercice 6.4.

(1) Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta_a = 0, \tag{6.19a}$$

$$(x-a)\delta_a' = -\delta_a. \tag{6.19b}$$

(2) (a) En dérivant (6.19b), montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta_a'' = -2\delta_a'. \tag{6.20}$$

En dérivant (6.20), montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta_a''' = -3\delta_a''. \tag{6.21}$$

(b) Montrer par récurrence sur $n$ que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x-a)\delta_a^{(n)} = -n\delta_a^{(n-1)}. \tag{6.22}$$

On rappelle que $T^{(n)}$ désigne la dérivée $n$-ième de la distribution $T$.

(3) *Question facultative*

(a) (i) Montrer la formule de Leibniz suivante : Soient $n \in \mathbb{N}$ et deux fonctions $\phi$ et $\psi$ $n$ fois dérivables. On note $\phi^{(0)} = \phi$ et $\psi^{(0)} = \psi$. Alors $\phi\psi$ est $n$ fois dérivable et

$$(\phi\psi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)}\psi^{(n-k)}.$$

(ii) En déduire une preuve alternative de (6.22).

(b) (i) Montrer la formule de Leibniz suivante : Soient $n \in \mathbb{N}$, $g$ une fonction indéfiniment dérivable et une distribution $T$. On note $g^{(0)} = g$ et $T^{(0)} = T$. Alors, au sens des distributions, on a,

$$(gT)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}T^{(n-k)}.$$

(ii) En déduire une autre preuve alternative de (6.22).

(c) Généraliser (6.22) en calculant dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

(i) $(x-a)^k\delta_a^{(n)}$ pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$ ;

(ii) $P\delta_a^{(n)}$ pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$.

EXERCICE 6.11.
Considérons $E$, la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$.

(1) (a) Exprimer $E(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a

$$E' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

(2) Retrouver ce résultat en utilisant directement le résultat de l'exercice 6.12.

On pourra consulter l'exercice 6.12 où on propose une généralisation de cette priopriété, fondée sur la formule des sauts avec un nombre infini des sauts.

EXERCICE 6.12.
Cette exercice a été donné en examens à l'automne 2022.
On cherche à démontrer dans cet exercice la proposition 6.44 du cours dont l'énoncé est rappelé ici :

Proposition 6.1 (Formules des sauts (nombre infinis)).

*(1) Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante telle que*

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = +\infty. \tag{6.23}$$

*On supposera que $a_0 \geq -\infty$. On pose alors $\Omega = ]a_0, +\infty[$. Soit $f$ une fonction continûment dérivable sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \mathbb{N}$ ayant en chaque $a_i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, une limite à droite et une limite à gauche. On note le saut de $f$ en $a_i$, pour $i \in \mathbb{N}^*$, la quantité définie par* (6.41)*du cours. On suppose de plus l'équation* (6.40) *du cours a lieu. On note $f'$, la fonction définie par la dérivée usuelle de $f$ (sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$). Alors, on a l'équation* (6.42)*du cours et*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6.24}$$

*Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante et vérifie* (6.23) *et les hypothèses précédentes*

$$\lim_{i\to-\infty} a_i = -\infty, \tag{6.25}$$

*l'équation* (6.24) *est remplacée par*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6.26}$$

*(2) (a) Plus généralement, on fait les mêmes hypothèses que dans le cas 1 sauf que la suite $a_n$ est strictement monotone et on considère $l \in \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = l. \tag{6.27}$$

*On pose*

$$\Omega = \begin{cases} ]a_0, K[, & \text{où } K \text{ est un réel quelconque tel que } l < K \leq +\infty \text{ si la suite } a_i \text{ est croissante ;} \\ ]K, a_0[, & \text{où } K \text{ est un réel quelconque tel que } +\infty \leq K < l \text{ si la suite } a_i \text{ est décroissante.} \end{cases} \tag{6.28}$$

*Si $l$ est fini, on suppose de plus que*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\sigma_i| < +\infty \ ; \tag{6.29a}$$

*$f$ possède une limite à gauche et à droite en $l$ avec un saut noté $\sigma_l$ ;* (6.29b)

*si la suite $a_i$ est décroissante, $f$ est continûment dérivable sur $]K, l[$ ;* (6.29c)

*si la suite $a_i$ est croissante, $f$ est continûment dérivable sur $]l, K[$.* (6.29d)

(6.29e)

*On a les mêmes conclusions que dans le cas 1 sauf dans le cas où $l$ est fini, auquel cas* (6.24) *est remplacé par*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} + \sigma_l\delta_l. \tag{6.30}$$

*(b) Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est strictement monotone, on fait les mêmes hypothèses que dans le cas* (2a)*. Dans ce cas,* (6.30) *est remplacée par*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} + \sigma_{l^+}\delta_{l^+} + \sigma_{l^-}\delta_{l^-}, \tag{6.31}$$

*où $l^{\pm}$ désigne la limite de $a_i$ quand $i$ tend $\pm\infty$, quand elle est supposée finie, en supposant dans ce cas que*

$$\sum_{i=1}^{\pm\infty} |\sigma_i| < +\infty. \tag{6.32}$$

Remarque 6.2. Comme dans la remarque6.35du cours, on peut remplacer la condition (6.40) par

$$\forall i \in I, \quad f' \in L^1_{\text{loc}}(]a_i, a_{i+1}[), \tag{6.33}$$

avec $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$ en rajoutant cette fois-ci la condition (si la limite est finie)

$$\sum_{i\in I} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(x)|dx < +\infty. \tag{6.34}$$

◇

*Début de l'énoncé :*

(1) Démontrons tout d'abord le point 1 de la proposition 6.1.

Sans perte de généralité et, pour simplifier, on supposera que $a_0 = -\infty$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont on supposera, sans perte de généralité, le support $[A, B]$ assez grand pour que

$$A < a_1. \tag{6.35}$$

(a) Pourquoi existe-t-il $N$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad a_n > B\,? \tag{6.36}$$

(b) Soit $\alpha$ et $\beta$ tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ avec une limite à droite en $\alpha$ et une limite à gauche en $\beta$. Comme dans le cours dans la preuve de la proposition 6.35, montrer la formule d'intégration par partie suivante :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f'(x)\phi(x)dx + f(\beta - 0)\phi(\beta) - f(\alpha - 0)\phi(\alpha).$$

(c) Pour tout $n \geq N$, écrire, comme dans le cours dans la preuve de la proposition 6.35 l'intégrale $\int_A^B f(x)\phi'(x)dx$ sous la forme d'une somme d'intégrales du type $\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx$, à laquelle on appliquera le résultat obtenu dans la question 1b.

(d) Conclure enfin en calculant $\left\langle T'_f, \phi \right\rangle$.

(2) Démontrons maintenant le point 2 de la proposition 6.1.

(a) Pourquoi peut-on considérer $l \in \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$ vérifiant (6.27) ?

(b) Le cas $l$ infini ayant déjà été traité dans la question 1, on supposera, sans perte de généralité que $l$ est fini, que la suite $a_n$ est strictement croissante et que le réel $K$ de l'équation (6.28) vaut $+\infty$.

(i) Comme dans la question 1, on considère $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont on supposera, sans perte de généralité, le support $[A, B]$ assez grand pour que (6.35) soit vérifiée ainsi que

$$B > l. \tag{6.37}$$

Montrer que

$$\forall N \geq 4, \quad \int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{N-2} \sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(a_{N-1} - 0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1 + 0)\phi(a_1). \tag{6.38}$$

(ii) Qu'obtient-on si on passe à la limite $N \to +\infty$ dans (6.38) ?

EXERCICE 6.13.
On note pour $\varepsilon > 0$, la fonction $d_\varepsilon$ qui provient de la définition (6.56) de la version longue du cours en prenant $F = 1$ :

$$\forall x \in ]-\infty, -\varepsilon/2] \cup [\varepsilon/2, +\infty[, \quad d_\varepsilon(x) = 0, \tag{6.39a}$$

$$\forall x \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2], \quad d_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6.39b}$$

On considère aussi la suite de fonction $H_\varepsilon$ définie par : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} d_\varepsilon(s) ds. \tag{6.40}$$

(1) Représenter la fonction $H_\varepsilon$.
(2) Quelles sont les limites des fonctions $H_\varepsilon$ et $d_\varepsilon$ (et dans quels espaces ont lieu ces limites ?) quand $\varepsilon$ tend vers zéro ?
(3) Est-ce que les valeurs de la fonction $H_\varepsilon$ et de la fonction limite en zéro quand $\varepsilon$ tend vers zéro ont une importance ?
(4) Reprendre les mêmes questions en considérant cette fois une fonction $d_\varepsilon$ nulle sur $]-\infty, -\varepsilon/2] \cup [\varepsilon/2, +\infty[$, égale à $2/\varepsilon$ en zéro, affine par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6.14.

(1) On considère la fonction $d_\varepsilon$ définie par l'équation 6.39. Montrer les résultats de convergence suivants : quand $\varepsilon$ tend vers zéro

$$\begin{aligned}
&d_\varepsilon \to 0, \quad \text{p.p. sur } \Omega,\\
&d_\varepsilon \to \delta_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\\
&\frac{1}{\varepsilon} d_\varepsilon \to 0, \quad \text{p.p. sur } \Omega,\\
&\frac{1}{\varepsilon} d_\varepsilon \text{ diverge dans } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{aligned}$$

(2) On considère la suite de fonctions $(\sin(nx))_n$. Montrer que quand $n$ tend vers l'infini,
   (a) cette suite diverge au sens des fonctions ;
   (b) cette suite converge au sens des distributions.

EXERCICE 6.15.

(1) Soit $f$ une fonction continue. On considère le résultat suivant "Montrer que $n \int_0^1 t^n f(t) dt$ tend vers $f(1)$ quand $n$ tend vers l'infini. "

   En faisant le changement de variable $u = n(1 - t)$, retrouver ce résultat.
(2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_n$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(t) = \begin{cases} nt^n, & \text{si t} \in [0, 1], \\ 0, & \text{si t} \notin [0, 1]. \end{cases}$$

   Que peut on déduire sur la limite de la distribution définie par $g_n$ quand $n$ tend vers l'infini ?
(3) Peut-on retrouver directement le résultat de la question 1 sans faire de changement de variable ?

EXERCICE 6.16.
Trouver la limite au sens des distributions, quand $h$ tend vers zéro de la suite de distributions $h/(x^2 + h^2)$.

EXERCICE 6.17.
Cet exercice prolonge l'exercice 6.2.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1. \tag{6.41}$$

(1) Déterminer la limite simple de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nf(nx), \tag{6.42}$$

dans le cas où l'on suppose de plus que

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = 0. \tag{6.43}$$

(2) Rappeler la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(3) Si on suppose de plus que $f$ est $k$ fois dérivable et que $f^{(k)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, quelle est la limite de $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ?

(4) (a) On suppose que $f$ est définie dans la question 3a de l'exercice 6.2, c'est-à-dire, par (6.4). Que donne le résultat de la question 3 ?

(b) On suppose que $f$ est définie dans la question 3b de l'exercice 6.2. Que donne le résultat de la question 3 ?

(c) On suppose que $f$ est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{6.44}$$

et on admet que (6.41) est vérifiée. Calculer $f_n'$ est la tracer sommairement.

(5) Dans le cas où $f$ est donnée par (6.44) proposer un calcul par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de $(f_n^{(k)})$.

EXERCICE 6.18.

On reprend dans cette exercice la poutre étudiée lors de la section 6.1 (voir exemple 6.1 de la version longue) du cours. On suppose que cette poutre n'est soumise cette fois qu'à la densité $p_\varepsilon$ est définie par (6.56) page 98 de la version longue du cours. $p_\varepsilon$ est donc en escalier et contine par morceaux. D'après les équations (O.5b) du cours (vraie pour tout $x$), (O.13) du cours (vraie pour tout $x$ sauf en $L/2 \pm \varepsilon$) et (O.7a), (O.9a) et (O.9b) du cours, on cherche donc une fonction $v_\varepsilon$ vérifant

$$\forall x \in [0, L], \quad v_\varepsilon''(x) = \frac{M_\varepsilon(x)}{EI}, \tag{6.45a}$$

$$\forall x \in [0, L] \setminus \{L/2 \pm \varepsilon\}, \quad \frac{dT_\varepsilon}{dx}(x) + p_\varepsilon(x) = 0,, \tag{6.45b}$$

$$\forall x \in [0, L], \quad \frac{dM_\varepsilon}{dx}(x) + T_\varepsilon(x) = 0,, \tag{6.45c}$$

$$v_\varepsilon(0) = 0, \tag{6.45d}$$

$$v_\varepsilon'(0) = 0. \tag{6.45e}$$

Puisque $p_\varepsilon$ est continue par morceaux, $v_\varepsilon$ est de classe $C^3$ et $C^4$ par morceaux. On supposera, pour simplifier, que

$$F = E = I = L = 1. \tag{6.45f}$$

Le but de cet exercice est de calculer la flèche $v_\varepsilon$ et d'étudier sa convergence au sens des fonctions, ainsi que celle de ses dérivées successives, d'abord à la main, puis en utilisant la limite au sens des distributions, enfin en utilisant le lemme S.3 de l'annexe S du cours. Ainsi, un peu d'abstraction peut permettre de remplacer de longues lignes de calcul par un raisonnement un peu plus abstrait, en néanmoins proche de la physique ! Nous allons montrer que la limite obtenue $v_0$ est la déformée de la poutre soumise à la limite de $p_\varepsilon$, défini par l'équation

(6.61) de la version longue du cours, c'est-à-dire exactement la situation de la poutre étudiée dans les sections 6.1 ou 8.5.2.1 de la version longue du cours. On a donc les équations suivantes sur $v_0 \in C^2([0,1]) \cap H^3([0,1])$

$$\frac{dT_0}{dx} + \delta_{1/2} = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{6.46a}$$

$$\forall x \in [0,1] \setminus \{1/2\}, \quad \frac{dM_0}{dx}(x) + T_0(x) = 0, \tag{6.46b}$$

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{d^2 v_0}{dx^2}(x) = M_0(x), \tag{6.46c}$$

$$v(0) = 0, \tag{6.46d}$$

$$v'(0) = 0. \tag{6.46e}$$

(1) (a) Montrer que la fonction $T_\varepsilon$ est continue sur $[0,T]$. Qu'en est-il des fonctions $M_\varepsilon$, et $v_\varepsilon$ ?

(b) Calculer le moment $M_\varepsilon$ en utilisant les équations d'équilibre locales (O.3) du cours (vraies au sens des fonctions ici, car il n'y a pas de forces ponctuelles à $\varepsilon > 0$ fixé).

(c) Calculer ensuite la flèche $v_\varepsilon$ sur $[0, 1/2 - \varepsilon/2]$.

(d) Comment feriez-vous pour calculer cette flèche sur $[1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon]$ et $[1/2+\varepsilon, 1]$ ? On admet que

$$\forall x \in [1/2-\varepsilon/2, 1/2+\varepsilon/2], \quad v_\varepsilon(x) = \frac{1}{384}\,\varepsilon^{-1} + 1/24\,\frac{x^4}{\varepsilon} + \frac{1}{384}\,\varepsilon^3 - 1/48\,\frac{x}{\varepsilon} - 1/12\,\frac{x^3}{\varepsilon} + 1/48\,x\varepsilon^2 - \frac{1}{96} + 1/16\,\frac{x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{64}\,\varepsilon + 1/16\,x + 1/8\,x^2 - 1/16 \tag{6.47}$$

et que

$$\forall x \in [1/2-\varepsilon, 1], \quad v_\varepsilon(x) = 1/8\,x + 1/24\,x\varepsilon^2 - 1/48 - 1/48\,\varepsilon^2. \tag{6.48}$$

(2) Comparer avec la nature des dérivées $v_\varepsilon^{(k)}$ pour $k \in \{1, ..., 4\}$ (en terme de fonctions ou de distributions) avec leurs natures dans la situation de la section 6.2 du cours.

(3) On fait maintenant tendre $\varepsilon$ vers zéro.

(a) Étudier la convergence de la fonction $v_\varepsilon$ quand $\varepsilon$ tend vers zéro, en termes de convergences simples, uniformes, ....

(b) On admet que, pour tout $x \in [0,1]$

$$v'_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1/2\,x^2 + 1/2\,x, & \text{si } x \in [0, 0, 1/2 - \varepsilon/2] \\ 1/6\,\dfrac{x^3}{\varepsilon} - 1/4\,\dfrac{x^2}{\varepsilon} - 1/4\,x^2 + 1/8\,\dfrac{x}{\varepsilon} + 1/4\,x + 1/8\,x\varepsilon - 1/48\,\varepsilon^{-1} + 1/16 - 1/16\,\varepsilon + 1/48\,\varepsilon^2, & \text{si } x \in [1/2 - \varepsilon/2, 1/2 \\ 1/8 + 1/24\,\varepsilon^2, & \text{si } x \in [1/2 + \varepsilon/2, 1]. \end{cases} \tag{6.49}$$

Que peut-on en déduire sur la convergence de la fonction $v'_\varepsilon$ quand $\varepsilon$ tend vers zéro ?

(c) Conclure, en comparant à la situation 6.1 du cours.

(4) En montrant que le moment $M_\varepsilon$ tend vers une fonction $m$ et en utilisant le théorème P.5 de l'annexe P du cours, montrer directement que $v_\varepsilon$, $v'_\varepsilon$ et $v''_\varepsilon$ converge uniformément respectivement vers $v_0$, $v'_0$ et $v''_0$ sur $[0,1]$. En déduire une preuve plus rapide les résultats de convergence de la question 3.

TRAVAUX DIRIGÉS 7

# Produit de convolution

EXERCICE 7.1.
Cet exercice a été donné aux examens finaux à l'Automne 2022.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Calculer $\delta_a * \delta_b$.

(2) (a) De façon plus générale, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, calculer $\langle \delta_a * T, \phi \rangle$.

(b) En déduire, dans le cas où $T$ est égale à une distribution-fonction notée $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, que $\delta_a * f$ est une distribution-fonction et que

$$\delta_a * f = f(. - a). \tag{7.1}$$

EXERCICE 7.2. Montrer que si $S$ et $T$ sont deux distributions, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{ax}(S * T) = (e^{ax}S) * (e^{ax}T).$$

EXERCICE 7.3.

(1) (a) Calculer $1 * \delta'$.

(b) Calculer $(1 * \delta') * H$.

(2) (a) Calculer $\delta' * H$.

(b) Calculer $1 * (\delta' * H)$.

(3) *Question facultative*

Conclure.

## Exercices facultatifs

EXERCICE 7.4.

(1) (a) Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, les deux produits de convolution $\delta * (H \sin)$ et $\delta'' * (H \sin)$ et existent et que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (\delta'' + \delta) * (H \sin) = \delta. \tag{7.2}$$

(b) En déduire que $H \sin$ est une solution de l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad X'' + X = \delta. \tag{7.3}$$

(2) Sans passer par les convolutions, montrer directement le résultat de la question 1b.

TRAVAUX DIRIGÉS 8

# Applications des distributions

EXERCICE 8.1.
L'objet de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle au sens des distributions suivante : on cherche une distribution $T$ telle que

$$aT'' + bT' + cT = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{8.1}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels et $\delta$ et $\delta'$ sont les distributions de Dirac et sa dérivée en zéro.

(1) Résoudre (8.1) dans le cas particulier $\beta = 0$ et $\alpha$ quelconque.

(2) On considère maintenant le cas général $\alpha$ et $\beta$ quelconques.

   (a) Résoudre (8.1) dans le cas général, puis dans le cas particulier où l'on cherche $Y$ dans $\mathcal{D}'_+$.

   (b) Dans ce dernier cas ($Y$ appartient à $\mathcal{D}'_+$), la distribution-fonction obtenue est-elle continue, dérivable en zéro ?

   (c) À quel contexte mécanique pourrait être associée cette équation différentielle ?

   (d) Pourriez-vous donner un exemple de distribution associé à $\delta'$ ? On pourra chercher le résultat sous forme de limite.

EXERCICE 8.2.
On pourra traiter l'exemple 8.14 du cours.

## Exercices facultatifs

EXERCICE 8.3.
On étudie un circuit proche du circuit électrique déjà vu dans l'exercice 8.2.

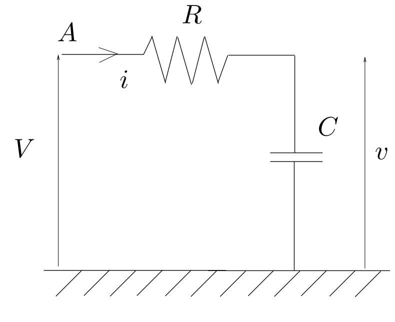


FIGURE 8.1. Le circuit dérivateur (bis).

On étudie cette fois-ci le circuit de la figure 8.1, identique à celui du circuit de la figure 8.2 page 97 du cours hormis le fait que l'on permute la résistance et le condensateur. On pose toujours $V = V_A$, $v = V_B$. On suppose que pour $t \leq 0$, toute les tensions sont nulles. On a donc, en particulier,

$$\forall t \leq 0, \quad v(t) = V(t) = 0.$$

(1) Montrer qu'en éliminant $i$ entre

$$q = Cv,$$
$$V = Ri + v,$$
$$i = \dot{q},$$

on obtient

$$\forall t, \quad \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{V(t)}{\tau},$$

où

$$\tau = RC.$$

(2) En appliquant la méthode vue en cours, exprimer $v(t)$ pour $t \geq 0$ sous forme d'un produit de convolutionen cherchant une distribution-fonction dans $\mathcal{D}'_+$.

(3) Expliciter $v$ si $V(t) = V_0 e^{-\alpha t}$

(4) $V$ et $v$ sont elles continues en zéro ?

EXERCICE 8.4.

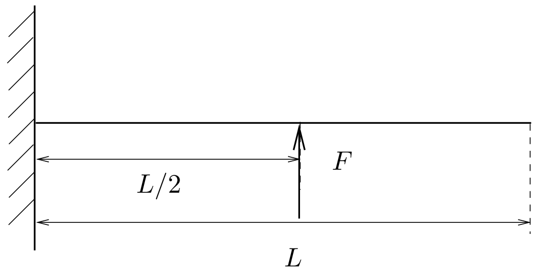


FIGURE 8.2. La poutre étudiée.

On étudie la flexion simple de la poutre représentée en figure 8.2, soumise à une force ponctuelle $F$ appliquée en son milieu. Pour simplifier, on supposera pour toute la suite que

$$F = 1, \quad L = 1, \quad EI = 1.$$

Les équations de la résistance des matériaux non montrent que

$$v^{(4)} = \delta_{1/2}, \tag{8.2}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = 0, \tag{8.3a}$$
$$v'(0) = 0, \tag{8.3b}$$
$$v^{(2)}(0) = 0, \tag{8.3c}$$
$$v^{(3)}(0) = 0 \tag{8.3d}$$

On cherche une fonction $v$, de classe $\mathcal{C}^2$, trois fois dérivable sur $[0,1]$ et vérifiant (8.2) au sens des distributions et (8.3). Notons $\Omega_1 = ]0,1/2[$ et $\Omega_2 = ]1/2,1[$, puis $v_1$ et $v_2$ les restrictions respectives de $v$ à $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$.

(1) Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega_2)$), la distribution $v_1^{(4)}$ (resp. $v_2^{(4)}$) est nulle.

(2) On admet que $v_1$ (resp. $v_2$) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1/2]$ (resp. $[1/2,1]$).

(a) Pourquoi peut-on écrire

$$v_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{8.4a}$$

$$v_1(x) = ex^3 + gx^2 + gx + h, \tag{8.4b}$$

où $a$, ..., $h$ sont des réels ?

(b) Montrer que les équations (8.2) et (8.3) sont équivalentes à

$$v_1(0) = 0, \tag{8.5a}$$

$$v_1'(0) = 0, \tag{8.5b}$$

$$v_2^{(2)}(1) = 0, \tag{8.5c}$$

$$v_2^{(3)}(1) = 0, \tag{8.5d}$$

$$v_1(1/2) = v_2(1/2), \tag{8.5e}$$

$$v_1'(1/2) = v_2'(1/2), \tag{8.5f}$$

$$v_1^{(2)}(1/2) = v_2^{(2)}(1/2), \tag{8.5g}$$

$$v_2^{(3)}(1/2) - v_1^{(3)}(1/2) = 1. \tag{8.5h}$$

(c) Montrer que les équations (8.5) sont équivalentes à un système de huit équations à huit inconnues.

(d) Résoudre ce système et conclure.

EXERCICE 8.5.
On considère le problème suivant : chercher $u$ de $[0, 1)$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0, 1], \quad -u''(x) = f, \tag{8.6a}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{8.6b}$$

(1) Quelle hypothèse de régularité doit-on faire sur $u$ et $f$ ?

(2) En raisonnant comme dans la section 8.5.1 page 147 de la version longue du cours, établir la formulation faible du problème (8.6). On montrera l'équivalence de cette formulation faible avec le problème initial.

(3) Quelle hypothèse de régularité doit-on maintenant faire sur $u$ et $f$ ?

(4) Montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation faible du problème (8.6).

EXERCICE 8.6 (Exercice plus difficile !).
On reprend l'exercice 6.18. Essayer de montrer, sans passer par le problème limite, que la limite du problème quand $\varepsilon$ tend vers zéro existe ! On s'appuiera sur le lemme S.3 de l'annexe S du cours.

# Bibliographie

[AF03] M. J. Ablowitz et A. S. Fokas. *Complex variables : introduction and applications*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.