# TRAVAUX PRATIQUES DE l'UE OMI3

**Mécanique 4A**

**OUTILS MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR 3**

**2023-2024, Automne**

**Jérôme Bastien**

Document compilé le 27 juillet 2023

Le lien original de ce document est le suivant :
http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/TPOMI3.pdf

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/
ou en français
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr

# Liste des Travaux Pratiques

# Avant-propos

Ce polycopié constitue les TP de Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3 de Mécanique 4A (2023-2024, Automne).

Ce polycopié de TP et les différents fichiers matlab (les fonctions distribuées pour les différents TP ainsi que des suggestions de corrigés et qui seront déposés en temps voulu !) sont normalement disponibles à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Mécanique 4A`'.
  — enfin sur '`OMI3`'.

À la fin des Travaux Pratiques, veuillez déposer vos œuvres en les plaçant ci-possible dans un repértoire que vous nommerez de la façon suivante : `NOM_prenom` Quelques exercices donneront lieu à la production d'un script de nom `exercice_i_j.m` où `i` et `j` sont deux entiers. Vous pouvez aussi créer des fonctions annexes qui seront aussi jointes. Le répertoire `NOM_prenom` sera ensuite déposé par « glisser-copier » dans le répertoire `\\teraetu\Enseignants\jerome.bastien\MECA.OMI3\TP\Grxx` où `xx` est votre numéro de groupe de TP.

Essayez de vous tenir à la discipline suivante : à la fin de chaque exercice, préparez votre script `exercice_i_j.m`, en faisant le ménage et en le testant une dernière fois. Déposez-le dans un répertoire `NOM_prenom`, qui se trouve *dans un réperoire qui vous appartient.* Une fois que tous vos exercices sont finis, *et si possible un peu avant la fin du TP*, glisser ce répertoire dans `\\teraetu\Enseignants\jerome.bastien\MECA.OMI3\TP\Grxx`

*Vous avez les droits d'écriture mais pas de lecture sur ce répertoire, donc vous ne pourrez pas visualiser votre dossier !*

*Merci de ne pas laisser dans le repertoire* `NOM_prenom` *ni les sources des fonctions fournies ni les éventuels fichiers d'extension* `.asv` *!*

Pour l'utilisation de Matlab/Octave à distance, on pourra consulter l'annexe A page 8.

TRAVAUX PRATIQUES 1

# Fonctions complexes

## 1.1. Généralités

Exercice 1.1 (Manipulation élémentaires sur les nombres complexes).
*Cet exercice ne donnera pas lieu à la production d'un script.*
On pourra traiter, sous matlab, l'exercice 1.6 du TD 1, en utlisant les fonctions `sqrt`, `solve`, `abs` et `angle` de matlab.
En éditant les fonctions `angle` et `cart2pol` de matlab, on pourra vérifier ce qui est dit dans l'annexe B (voir section B.2 page 145) du cours.

Exercice 1.2 (Visualisation de la dérivée d'une fonction complexe).
*Cet exercice ne donnera pas lieu à la production d'un script.*
Le but de cet exercice est de visualiser la propriété de la remarque 1.11 page 7 du cours. On rappelle l'exercice 1.11 du TD. On suppose que l'on se place en un point $z$ où $f$ est dérivable et $f'(z) \neq 0$.

(1) On utilisera la fonction fournie `trace_complexe_locale` qui permet de tracer le carré centré autour de $z$ (de sommets d'affixes respectives $z - h/2 - ih/2$, $z + h/2 - ih/2$ , $z + h/2 + ih/2$, $z - h/2 + ih/2$ pour $h > 0$, son image par $f$ et son image par la similitude définie par la multiplication par $f'(z)$.

   On traiter les cas suivants en prenant des valeurs de $h$ de plus en plus petites :
   — $f = \exp$ au voisinage de $1 + i$ ;
   — $f = \mathrm{Ln}$ au voisinage de $1 + i$ ;
   — $f = \mathrm{Ln}$ au voisinage de $-2$ ;
   — $f(z) = z^2$ au voisinage de 0.

(2) Conclure.

Exercice 1.3 (L'exponentielle et le logarithme complexes).
*Cet exercice donnera lieu à la production d'un script.*

(1) Montrer sur des exemples numérique simples ou en symbolique, que la formule du cours (2.31) est vérifiée pour les fonctions `exp`, `cos` et `sin` de matalb.

(2) (a) Étude de l'argument

(i) Montrer en consultant l'aide de matlab que la fonction `angle` constitue la détermination principale de l'argument. Est-elle définie sur le demi axe $\mathbb{R}_-$ ?

On vérifiera que la convention (2.41) du cours est vérifiée par matlab.

(ii) Quelle est sa valeur en 0 ?

(iii) Comment vérifier qu'elle est discontinue de part et d'autre de cet axe ?

(iv) Illustrer cette discontinuité en traçant la détermination principale de l'argument de $z$ pour z décrivant le segment $[-1 - i, -1 + i]$ en fonction de $\mathrm{Im}(z)$. Commenter.

(v) Illustrer aussi cette discontinuité en utilisant la fonction fournie `trace_3D`.

(b) Étude du logarithme

(i) Montrer en consultant l'aide de matlab que la fonction `log` constitue la détermination principale du logarithme et qu'elle est étendue à $\mathbb{C}^*$ tout entier.

On vérifiera que la convention (2.50) du cours est vérifiée par matlab.

(ii) Quelle est sa valeur en 0 ?

(iii) Vérifier sur des exemples simples que `log` et `exp` sont bien inverses l'un de l'autres (voir les formules du cours (2.57)).

(iv) Vérifier sur des exemples simples la formule (2.61) du cours. On pourra s'inspirer des exemples de l'exercice de TD 2.2.

Exercice 1.4 (Fonctions $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$).
*Cet exercice ne donnera pas lieu à la production d'un script.*
Avant de traiter ce TP, on consultera l'annexe E du cours.

(1) (a) Quelle sont les valeurs théoriques de $\sqrt{e^{i\pi}}$ et de $\left(e^{i\pi}\right)^{1/2}$ ? Quelle sont les valeurs théoriques de $\sqrt{e^{-i\pi}}$ et de $\left(e^{-i\pi}\right)^{1/2}$ ?

(b) Taper les lignes suivantes sous matlab et commenter :

```
disp(sqrt(-1)-i);
disp(sqrt(exp(i*pi))-i);
disp((exp(i*pi))^(1/2)-i);
disp(sqrt(exp(-i*pi))-i);
disp((exp(-i*pi))^(1/2)-i);
disp(sqrt(exp(-i*sym('pi')))-sym('i'));
disp(simplify((exp(-i*sym('pi')))^(1/2)-sym('i')));
```

(2) Retrouver les figures E.1 page 185 et E.2 page 186, du cours grâce à la fonction fournie `trace_puissance_un_n`.

## 1.2. Intégration complexe

Exercice 1.5 (Intégration et logarithme complexes).
*Cet exercice ne donnera pas lieu à la production d'un script.*
Le principe de cet exercice est de retrouver, grâce au calcul symbolique de matlab, qui fonctionne aussi en complexe, les résultats démontrés dans l'exercice 3.3 de TD. On pourra à cet effet, consulter la correction de cet exercice.

(1) Pour calculer l'intégrale $I$ définie par l'équation (3.4) de TD :

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z},$$

où $\gamma$ est le segment $[1, 1+i]$, il suffira de taper, en matlab :

```
syms x;
I1=int(1/x,1,1+i);
disp(I1);
```

(a) Faites-le ! Retrouve-t-on le résultat (3.9) des corrections de TD ?

(b) Adapter cela pour calculer l'intégrale de $1/z$ sur les segments $[1-i, 1+i]$ et $[-1-i, -1+i]$. Retrouve-t-on les résultats (3.12)-(3.13) des corrections de TD ?

(2) On passe maintenant par les parties réelles et imaginaires de la fonction $1/z$ et on utilise par exemple l'équation (3.4) de la correction de TD pour déterminer $I$ :

$$I = i\int_0^1 \frac{1}{1+it}dt.$$

Sous matlab, il suffit de taper ensuite :

```
disp(int(i/(1+i*x),0,1)-I1);
```

(a) Faites-le ! Retrouve-t-on le résultat (3.9) des corrections de TD ?

(b) Adapter cela pour calculer l'intégrale de $1/z$ sur les segments $[1-i, 1+i]$ et $[-1-i, -1+i]$. Retrouve-t-on les résultats (3.12)-(3.13) des corrections de TD ?

(3) Si on passe par les logarithmes complexes et que l'on utilise l'équation

$$I = \int_\gamma \frac{1}{z}dz = F(1+i) - F(1) = \operatorname{Ln}(1+i) - \operatorname{Ln} 1,$$

vue en TD il suffit d'écrire sous matlab :

```
disp(simplify(log(sym(1)+i)-log(sym(1))-I1));
```

(a) Faites-le ! Retrouve-t-on le résultat (3.9) des corrections de TD ?

(b) Adapter cela pour calculer l'intégrale de $1/z$ sur les segments $[1-i, 1+i]$ et $[-1-i, -1+i]$. Retrouve-t-on les résultats (3.12)-(3.13) des corrections de TD ?

(4) Enfin, on utilise la méthode données par les équations (3.14)-(3.16) du corrigé de TD. Sous matlab, il suffit de taper

```
syms epsilon;
disp(simplify(limit(log(-sym(1)+i)-log(-sym(1)+i*epsilon)-...
log(-sym(1)-i)+log(-sym(1)-i*epsilon),epsilon,0)-I3))
```

(a) Faites-le ! Retrouve-t-on le résultat (3.13) des corrections de TD ?

(b) Modifier la commande précédente en utilisant l'option '`right`' de la fonction `limit` de matlab pour constater avec joie que tout rentre dans l'ordre !

## 1.3. Applications à la mécanique des fludes : visualisation d'écoulement potentiels

Exercice 1.6 (Visualisation et étude d'écoulement potentiels avec matlab).
*Cet exercice donnera lieu à la production d'un script.*
Il n'est pas nécessaire de traiter la totalité des écoulements proposés !

(1) On lira l'aide de la fonction fournie `trace_potentiel_complexe` et on l'utilisera pour tracer les différents potentiels donnés par les équations (5.32) page 55 du cours.

(2) Pour les écoulements ne posant pas de problèmes comme celui donnés par (5.32a), on n'utilisera pas l'argument `test` de cette fonction qui sera vide.

(3) (a) Pour l'écoulement (5.32b) du cours, que se passe-t-il si l'on tape brutalement sous matlab :

```
trace_potentiel_complexe(-2,2,0.005,-2,2,0.005,30,inline('log(x)'));
```

Zoomez sur l'origine et expliquez ce qui se passe.

(b) On pourra enlever les points situés proches de l'origine ou de l'axe $x < 0$ en définissant la fonction `test` ou `testb` par

```
testb=@(X,Y,Rmax)(sqrt(X.^2+Y.^2)<=Rmax);
test=@(X,Y,Ymax,Rmax)((abs(Y)<=Ymax&X<0)|(sqrt(X.^2+Y.^2)<=Rmax));
```

et taper ensuite sous matlab par exemple

```
Rmax=0.01;
trace_potentiel_complexe(-2,2,0.005,-2,2,0.005,30,...
                         inline('log(x)'),@(X,Y) testb(X,Y,Rmax));
```

(4) Pour les autres écoulements présentant des dangers à l'origine ou sur l'axe $x < 0$, on utilisera systématiquement la fonction `test` ou `testb`.

(5) Pour l'écoulement donné par (5.32e), on rappelle (voir exercice 5.5 de TD) qu'une des ligne de courant est le cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine et de rayon $R = \sqrt{K/U}$.

Comment matérialiser cet obstacle sur la figure en utilisant la fonction `testb` ?

(6) Pour l'écoulement donné par (5.32h), on rappelle (voir exercice 5.4 de TD) que les droites passant par l'origine et faisant un angle $k\pi/n$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont des lignes de courant.

Si $n$ est donné, comment matérialiser un écoulement limité par les deux droites d'angle nul et d'angle $\pi/n$ ?

Exercice 1.7 (Visualisation et étude d'un écoulement potentiel ontenu par transormation conforme avec matlab).
*Cet exercice donnera lieu à la production d'un script.*
On rappelle que la fonction $\sqrt{\ }$ est définie, dans le contexte de l'exercice de TD 5.18, utilisé dans ce TP, par

$$z^{1/2} = e^{1/2\,\mathrm{Ln}(z)} = e^{1/2(\ln|z|+i\arg z)} \tag{1.1}$$

où l'argument appartient à $[0, 2\pi[$. On utilisera la fonction fournie `logcoupe`.

(1) Comparer la fonction usuelle `sqrt` de matlab et la fonction $\sqrt{\ }$ définie par (1.1). On pourra par exemple déterminer les images de 1, $i$, $-1$ et $i$ par ces deux fonctions et représenter la différence entre ces deux fonctions sur le cercle (de $\mathbb{C}$) trigonométrique.

(2) Tracer les lignes de courant dont on a montré les équations : $c$ est un réel positif ou nul et, dans le plan $w$,

$$w = s\sqrt{(x+ic)^2 - 1}, \tag{1.2}$$

où $x$ décrit $\mathbb{R}$. De même tracer les équipotentielles dont on a montré les équations : $c$ est un réel quelconque et, dans le plan $w$,

$$w = s\sqrt{(c+iy)^2 - 1}, \tag{1.3}$$

où $y$ décrit $\mathbb{R}_+$.

(3) Utiliser la fonction fournie `trace_potentiel_complexe` pour tracer l'écoulement étudié lors de l'exercice de TD 5.18 dont on rappelle l'expression du potentiel complexe $g$ associé, dans le plan $w$ :

$$g(w) = U\sqrt{\left(\frac{w}{s}\right)^2 + 1}, \tag{1.4}$$

où $U$ et $s$ sont deux réels strictement positifs

(4) Que se passe-t-il si vous tapez sans prendre de précaution :

```
f=@(w) sqrt(w.^2+1);
trace_potentiel_complexe(-1,1,0.01,0,2,0.01,30,f);
```

Expliquer !

Exercice 1.8 (Visualisation et étude d'écoulement potentiels avec matlab).
*Cet exercice ne donnera pas lieu à la production d'un script.*
Reprendre les figures de l'exemple 5.32 page 74 de la version longue du cours et les tracer sous matlab. On pourra écrire :

```
xmax=1.5;
P=36;
% tracé du potentiel (en enlevant un cercle autour de l'origine)
trace_potentiel_complexe ...
(-xmax,xmax,0.005,0,1,0.005,P,@(z) log(exp(z*pi/(2))-exp(-z*pi/2)),...
@(x,y) x.^2+y.^2<=0.0001);

% équation lignes de courant
F=@(C,x) (2/pi)*atan(C.*(exp(pi*x/2)-exp(-pi*x/2))./(exp(pi*x/2)+exp(-pi*x/2)));

N=1e3;
Cmax=10;
x=(linspace(0,xmax,N)).';
u=linspace(0,Cmax,P);
u=u(ones(1,N),:);
X=x(:,ones(1,P));
figure;
plot(x,F(u,X),'b');
```

## 1.4. Calcul d'intégrales en symbolique (facultatif)

Exercice 1.9. En utilisant le calcul symbolique de matalb, recalculer les différentes intégrales vues en TD. En existe-t-il que matlab ne sait pas calculer ?

TRAVAUX PRATIQUES 2

# Distributions

Exercice 2.1.
*Cet exercice donnera lieu à la production d'un script.*
On pourra traiter, le cas échéant, la version complète de cet exercice : voir exercice 2.3 page suivante, qui n'est plus proposé, les scripts matlab étant trop longs à tourner !
Dans cet exercice, nous reprenons l'étude de l'impulsion faite dans l'exemple 8.31 page 111 du cours.

(1) En régularise maintenant le système (8.100) du cours en remplaçant le dirac $\delta$ par une suite de fonctions $f_\varepsilon$ qui l'approchent quand $\varepsilon$ tend vers zéro. On remplace donc les équations (8.99) et (8.100)

$$x''_\varepsilon + ax_\varepsilon + bx'_\varepsilon = Ff_\varepsilon,\ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{2.1}$$

où $f_\varepsilon$ est donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon/2, \varepsilon/2], \\ 1/\varepsilon & \text{si } t \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \end{cases} \tag{2.2}$$

Quelle équation différentielle est-elle vérifiée par $x_\varepsilon$ sur $\mathbb{R}$ ?

(2) Notons $x$, la solution du système (8.100) du cours.

En utilisant la fonction fournie de matlab `val_equa_diff_impul` qui calcule les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $x_\varepsilon(t)$ et $x'_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, tracer sur un intervalle contenant zéro, les fonctions $x$, $x'$, $x_\varepsilon$ et $x'_\varepsilon$ pour des valeurs de plus en plus petite de $\varepsilon$. On prendra d'abord $a = 1$ et $b = 0.3$ puis $a = 1$ et $b = 2$. Commenter ces courbes et conclure.

## Exercices facultatifs

Exercice 2.2.
Pour cet exercice, on pourra consulter l'exercice de TD 8.1 et sa correction.
Comme dans l'exercice 6.13 des TD, on introduit la fonction la fonction $d_\varepsilon$ définie, pour $\varepsilon > 0$, par

$$\forall x \in ]-\infty, -\varepsilon[ \cup ]\varepsilon, +\infty[, \quad d_\varepsilon(x) = 0, \tag{2.3a}$$

$$\forall x \in [-\varepsilon, 0[, \quad d_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}, \tag{2.3b}$$

$$\forall x \in [0, \varepsilon], \quad d_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}. \tag{2.3c}$$

On admettra que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon = \delta' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{2.4}$$

(1) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels. En procédant comme dans l'exercice de TD 8.1 et sa correction, montrer qu'une solution de

$$x'' + ax + bx' = \alpha\delta + \beta\delta',\ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{2.5}$$

est donnée par la fonction $x$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = 0, \tag{2.6a}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = \beta, \tag{2.6b}$$

$$x'(0) = \alpha - b\sigma, \tag{2.6c}$$

en prenant garde aux notations qui ne sont pas les mêmes !

(2) Procéder comme dans l'exercice 2.1 pour étudier, grâce au calcul symbolique, la convergence de $x_\varepsilon$ et $x'_\varepsilon$ vers $x$ et $x'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ où $x$ est la solution de (2.6).

(3) En vous inspirant de la fonction fournie de matlab `val_equa_diff_impul` tracer sur un intervalle contenant zéro, les fonctions $x$, $x'$, $x_\varepsilon$ et $x'_\varepsilon$ pour des valeurs de plus en plus petite de $\varepsilon$ et conclure.

EXERCICE 2.3.
Dans cet exercice, nous reprenons l'étude de l'exercice de TP 2.1.

(1) Calculer en symbolique les fonctions $x$ et $x_\varepsilon$, définie dans l'exercice de TP 2.1, grâce aux fonctions `dsolve` de matalb.

(2) On étudie maintenant la convergence de $x_\varepsilon$ vers $x$ quand $_\varepsilon$ tend vers zéro.

   (a) En utilisant les fonctions `simplify` et `limit` de matlab, montrer que $x_\varepsilon$ et $x'_\varepsilon$ tendent simplement respectivement vers $x$ et $x'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) A-t-on cette même propriété de convergence en zéro ?

   (c) En utilisant la fonction fournie de matlab `val_equa_diff_impul` qui calcule les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $x_\varepsilon(t)$ et $x'_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, tracer sur un intervalle contenant zéro, les fonctions $x$, $x'$, $x_\varepsilon$ et $x'_\varepsilon$ pour des valeurs de plus en plus petite de $\varepsilon$. On prendra d'abord $a = 1$ et $b = 0.3$ puis $a = 1$ et $b = 2$. Commenter ces courbes et conclure.

Annexe A

# Matlab/Octave à distance

Vous avez deux les possibilités suivantes pour utiliser Matlab (section A.1) et son clone, libre et gratuit, Octave (section A.2).

## A.1. Matlab à distance

Utilisez une machine virtuelle en consultant :
`https://etu.univ-lyon1.fr/outils/acces-distant-aux-fichiers-et-aux-applications-pedagogiques`
Il faut donc faire (pour windows, pour les autres systèmes d'exploitation, voir l'url donnée ci-dessous)

— Ouvrez le menu Démarrer -> Tous les programmes -> Accessoires -> Connexion bureau à distance (ou parfois Accessoires -> Communication -> ...) ;
— La boîte de dialogue "Connexion bureau à distance" apparaît ;
— Tapez `tseetu.univ-lyon1.fr` dans le champ "Ordinateur", puis cliquez sur le bouton "Connexion".

Attention, cette solution a des inconvénients :

- Le réseau de la fac est trop aléatoire ! On peut avoir un bon débit puis dans l'heure, il devient catastrophique. De plus, pour qu'un TP ait officiellement lieu avec cette solution, une réservation de salle virtuelle doit être faite. Donc, sauf dans le cas où cette réservation est faite et annoncée, cette solution est dédiée aux utilisations individuelles.
- Vous aurez, accès *via* une machine viruelle à votre disque réseau (commençant par `U:`) et il faudra gérer vos fichiers et répertoires sur ce disque et pointer sur ce disque depuis Matlab.

D'autres logiciels utilisés à Lyon I sont disponible sur cette machine virtuelle (comme Maple).

## A.2. Octave sur votre machine

(1) Installer Octave. Voir `https://www.gnu.org/software/octave/download`

(2) Installer le symbolique d'Octave

   (a) Voir par exemple
   `https://sites.google.com/site/lm3tpoptimisation/guide-octaveinstall-config`, qui présente une installation sans Python (d'autres installations utilisant des bibliothèque de Python sont possibles).

   (b) Regarder l'exemple pour le "Symbolic package" et suivre pas-pas l'installation.

   (c) N'oubliez pas, à chaque utilisation de la partie sybmbolique d'Octave, de taper

```
pkg load symbolic
```

   Attention, la première ou les première fois il affiche `Symbolic pkg v2.7.1:` et puis, il faut attendre un peu ...

   (d) Faites le test final suivant : tapez (et interprétez !)

```
syms x
int((cos(x))^2)
```

Quelques liens (certains sont contextuels et peuvent changer selon la version d'Octave).
`https://octave.org/doc/v5.2.0/`
`https://octave.org/octave.pdf`
`https://octave.sourceforge.io/list_functions.php?sort=alphabetic`