POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

NOTES DE COURS DE l'UE OMI3

Mécanique 4A

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR 3

2023-2024, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 27 juillet 2023

Le lien original de ce document est le suivant :
http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/coursOMI3.pdf

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié constitue les notes de cours de Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3 de Mécanique 4A (2023-2024, Automne).

Ce polycopié de cours et les fichiers matlab donnés en illustration sont normalement disponibles à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Mécanique 4A`'.
  — enfin sur '`OMI3`'.

Désormais, un certain nombres d'éléments facultatif de ce cours ne sont plus traités en séance.

Pour tenter de préserver la planête, ces éléments ne figurent pas dans ce polycopié distribué au format papier et en pdf sur internet. Néanmoins, une version longue de ce polycopié est disponible sur internet à l'adresse habituelle : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/coursOMI3long.pdf`

Toutes les références utilisées lors des TD, des TP et des corrections d'examens sont faites en général[1] par rapport à cette version courte.

Les renvois vers la version longue seront signalés de la façon suivante :

Voir la preuve page 49 de la version longue. ♠

Des notes en petits caractères comme suit pourront être omises en première lecture :

Attention, passage difficile ! ♢

1. Dans le cas contraire, cela sera signalé.

Introduction

La notion « d'outils mathématiques » peut être trompeuse ! Ce ne sont pas, comme on peut le croire de prime abord, de simples recettes qui permettent de résoudre tel ou tel type d'exercice, mais ils renvoient à des concepts parfois profonds. Dans le cours d'OMI 1, les notions d'algèbre linéaires, d'équations différentielles ou d'analyse vectorielles, s'appuient sur une théorie qui peut être abstraite ! Il en est de même du cours d'OMI 2, où les notions de transformés de Fourier et de Laplace, même si elles transforment aisément des équations différentielles en équations algébriques, s'appuient sur un cadre théorique précis.

Un ingénieur mécanicien doit savoir, au cours de sa formation ou dans le cadre de certains calculs, modéliser [2] le comportement des structures qu'il fabrique ou contrôle. Cela implique, d'une part, d'écrire correctement, ces lois de comportement et les équations qui en découlent. Ces équations, très souvent différentielles (ordinaire comme le cas de structure discrète ou aux dérivées partielles, comme le cas de modèles continus, comme par exemple celui d'une membrane souple), sont accompagnées d'un contexte théoriques qui permet d'affirmer que ces équations sont bien écrites et que la solution existe et est unique. D'autre part, ces équations ont rarement des solutions connues explicitement et il faudra donc procéder à des calculs permettant d'approcher ces solutions. Ces notions d'analyse numériques sont introduites essentiellement dans le cours de méthodes numériques. Cependant, la théorie et l'analyse numériques sont parfois très liées et l'écriture d'approximations correctes et réalisables à l'aide d'ordinateurs, a besoin d'un cadre rigoureux, précisément étudié. Il est en, par exemple, ainsi pour la résolution de certains problèmes de mécaniques (issus de la théorie des poutre ou de l'élasticité tridimensionnelle), qui s'appuient sur une formulation, dite faible, qui permettra à la fois d'obtenir existence et unicité de la solution, mais aussi l'approximation de cette solution, *via* la méthode des éléments finis [3]. Cette formulation faible s'appuie sur la théorie des distributions [4] présentée dans la partie 2 de ce cours. Cette théorie, mise au point par Laurent Schwartz [5], sort de l'analyse ordinaire que vous connaissez, notamment sur la dérivation, et permet de donner un sens plus général à la dérivation, en permettant de dériver toute fonction, même non dérivable ! La notion de fonction de Dirac, introduite par certains physiciens pour pouvoir dériver la fonction de Heaviside, discontinue en zéro, prend alors une véritable existence mathématique et tous les calculs précédemment menés sur ces fonctions, sans rigueur apparente, deviennent tout à fait rigoureux ! Ce formalisme a permis alors l'émergence d'un cadre rigoureux [6], notamment sur les équations différentielles très utilisées en physique, la théorie abstraite en découlant faisant partie [7] de ce que l'on appelle les « mathématiques appliquées ». Cette théorie a aussi permis l'émergence de l'analyse numérique, l'écriture de codes de calculs et le développement des simulations sur la mécanique des solides, des fluides, en météorologie ... Cette partie des mathématiques est donc un très bon exemple de la formidable interaction entre mathématiques, physique et

2. À propos de modélisation, notion très à la mode (surtout en période de pandémie), on pourra lire [Bas11c, "Dangers et attraits de la modélisation", page vii] ou bien [Den09], disponible à l'url suivante `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/denele2021.pdf`.

3. Cette méthode des éléments finis vous sera présentée ultérieurement lors de votre formation, mais peut être considérée comme l'un des points d'orgue de la partie 2 de ce cours.

4. qui elle même n'aurait pu exister sans la théorie de l'intégration de Lebesgue, qui, au début du vingtième siècle, a complété l'intégration de Riemann. Voir [BCL01].

5. Voir [Sch45], disponible sur Internet : `http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AUG/AUG_1945__21_/AUG_1945__21__57_0/AUG_1945__21__57_0.pdf`

6. initié par des mathématiciens Français, dans les années 1960-70.

7. Très académique, la distinction entre mathématiques pures et appliquées est parfois très floue !

informatique qui n'ont cessé d'interagir et de se faire progresser mutuellement depuis la création des premiers ordinateurs [8]. Les différentes notions de l'analyse propres aux fonctions (limite, convolution) seront ensuite étendues aux distributions, classe d'objets plus vaste que celle des fonctions et qui les généralise. Bien entendu, de nombreuses applications seront présentées, très utiles en mécanique (résolution d'équation différentielles, notamment avec des chocs, vision de certains principe de la résistance des matériaux, comme le principe des travaux virtuels, comme une simple formulation faible.). Cette partie vous sera donc utile, entre autres, en mécanique des solides, des structures ou des Milieux Continus, et en particulier dans le cours de MNM de quatrième année.

Présentée en partie 1 car plus proche des notions d'analyse que vous connaissez (intégration), la notion de fonctions complexes dérivables (au « vrai » sens que vous connaissez de la dérivée, cette fois-ci.) permettra là encore de prendre de la hauteur et de voir certains résultats totalement inattendus en analyse réelle, puisqu'une fonction dérivable un fois (au sens des complexes), l'est un nombre infini de fois ! Il en découlera aussi le théorème de résidus qui permet de calculer (ou de recalculer) certaines intégrales, très utiles en physique. Enfin, cette notion de fonctions dérivables au sens des complexes, permettra aussi de calculer le champ de vitesses pour des fluides parfaits et d'en faire, très simplement sous matlab, des représentations graphiques [9]. Cette partie vous sera donc utile, entre autres, en mécanique des fluides. Le polycopié de cours [Bie18] contient des résultats d'analyse complexes vus dans cette UE.

Remarquons aussi que ce cours présente deux extensions de la notion de dérivation d'application $x \mapsto f(x)$, la première (celle de la partie 1) est valable pour f allant de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, la seconde (celle de la partie 2) est valable pour f allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sans être ponctuellement dérivable en tout point.

Pour conclure, tâchez donc de ne pas vous limiter à l'aspect purement utilitaire des mathématiques. Même si ce cours sera assez difficile, il présentera des jolies choses sur le plan mathématique avec de nombreuses applications en mécanique.

Aux dix séances de cours magistraux, s'ajouteront neuf séances de TD, deux séances de TT et une séance(s) de TP ou "info TD".

---

8. Mot lui même ré-inventé par un Français, Jacques Perret, à l'opposé des allemands, qui n'ont fait que reprendre le mot anglais. Voir par exemple `http://www.presse-francophone.org/apfa/motdor/etymolog/ordinate.htm` ou `http://fr.wiktionary.org/wiki/ordinateur`.

9. On pourra consulter les jolies figures d'écoulement de fluides parfaits suivants : 5.2 page 56, 5.3 page 57, 5.4 page 58, 5.5 page 59, 5.6 page 60 et 5.7 page 60.

Ouvrages (ou références) utilisés

Un certains nombre d'ouvrages ou de références utilisés seront cités tout au long du texte (voir bibliographie p. 296). Ces ouvrages seront dans la mesure du possible disponibles à la bibliothèque de Lyon I, voire sur Internet.

Les ouvrages de références les plus utilisés dans ce cours sont les suivants :

- Deux petits ouvrages couvrant très largement le domaine des mathématiques pour l'ingénieur (au-delà du programme de ce cours) et assez concis : [Gué+04 ; Fre03] ;
- Sur les distributions, un ouvrage assez pédagogique : [GW03] ;
- Sur les distributions, deux ouvrages un peu théoriques mais complets (ces ouvrages contiennent aussi une petite partie sur les fonctions complexes) : [Kib01 ; Pet98] ;
- Sur les fonctions complexes, un cours d'introduction, très concit mais efficace : `http://mathutbmal.free.fr/MT26/cours/Fonctions_complexes.pdf`
- Sur les fonctions complexes, un ouvrage un peu théorique mais complet : [Pab95] ;
- Sur les fonctions complexes et leurs applications en mécanique des fluides, un ouvrage de référence : [AF03] ;
- Bonne introduction aux fonctions complexes : [Gué+04, p. 65 à 90, fascicule 5] ;
- Bonnes introductions aux distributions et aux fonctions complexes : [LT09, chap. 4 et 5] ;
- Sur le web, vous pourrez trouver de gros ouvrages un peu théoriques (mais accessibles, au sens informatique du terme !) :
  - Quelques rappels sur les nombres complexes, théorie des fonctions holomorphes : [Gir04] ;
  - Un ouvrage complet sur les fonctions complexes : [Dol90] ;
  - Éléments sur les fonctions complexes et les distributions : [Har10] ;
  - Un recueil assez complet sur les distributions : [Ciu] ;
- En guise de révision (ou d'introduction) à l'intégration de Lebesgue et aux espaces de Hilbert et en guise d'introduction aux distributions : [GW03, chapitres IV, V, VIII et IX] ;
- Une très bonne introduction simplifiée aux éléments finis : [Sal11]

On pourra aussi consulter Wikipédia aux rubriques suivantes :

- Série Entière : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_entière`
- Fonction holomorphe : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe`
- Exponentielle réelle et complexe : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle`
- Logarithme complexe : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_complexe`
- Le théorème des résidus : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus`
- Les distributions : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathématiques)`

On pourra aussi consulter trois extraits, concis et pédagogiques de la revue [BC18] : Les nombres complexes (pages 70 et 71), Les séries entières (pages 72 et 73) et La théorie des distributions (pages 90 et 91), disponibles sur Internet aux adresses suivantes : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_complexe.pdf`, `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_series_entieres.pdf` et `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_distributions.pdf`.

D'autres URL sont données dans le polycopié de cours.

Première partie

Analye complexe

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

Ce chapitre s'appuie sur [Pab95, chap. 1] et [Sko91, chap. II]. On pourra aussi consulter
http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe

1.1. Rappels sur les complexes

Nous supposerons connues toutes les notions sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. L'annexe A, non traitée en cours, propose quelques rappels. On pourra traiter, à titre de révisions sur les nombres complexes, l'exercice 1.6 du TD 1 et l'exercice 1.1 du TP 1.

1.2. Introduction

Applications de ces notions à la mécanique (cf chapitre 5) :

— Calcul de certaines intégrales (ou séries) utiles à l'ingénieur ;

— Transformations conformes et applications à la mécanique des fluides : étude d'écoulements plans potentiels et maillages automatiques ;

1.3. Dérivation au sens des complexes : fonctions holomorphes

1.3.1. Dérivation dans $\mathbb{R}$

La notion de dérivée de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vous est déjà familière. On peut l'approcher par un calcul de pentes moyennes [1] ou alors de façon suivante : en zoomant [2] à l'infini la courbe représentative d'une fonction dérivable f au voisinage d'un point d'abscisse x_0, on peut voir apparaître une droite de pente $f'(x_0)$. En terme de notations, on note cela sous la forme : en x_0, il existe un nombre noté $f'(x_0)$ tel que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.1}$$

ce qui signifie encore, en x_0

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow \left| f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \varepsilon \right) \tag{1.2}$$

Si on traduit (1.2), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera dérivable en un point x_0 et aura pour nombre dérivé en ce point $f'(x_0)$ ssi "l'écart entre $f'(x_0)$ et le taux d'accroissement de f entre x et x_0 (défini comme $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$) est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que x est suffisamment proche de x_0". On peut aussi mettre (1.2) sous la forme équivalente suivante : il existe une fonction ε tendant vers 0 au voisinage de 0 telle que, pour h assez petit,

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h). \tag{1.3}$$

1. Voir par exemple [Bas11b, chap. 1] disponible sur http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf, [Bas18a, section 4.1] disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/tutoratL2biomeca.pdf ou alors les pages 14 à 21 d'un très bon ouvrage de vulgarisation [BR].

2. Voir [Bas15, transparent 23/60] disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf

1.3.2. Différentiabilité

Si maintenant f est une une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, la définition (1.3) peut s'étendre de la façon suivante : on dit que f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire $df(x_0)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (appelée différentielle ou application linéaire tangente) et une fonction ε tendant vers 0 au voisinage de 0 telle que, pour h assez petit

$$f(x+h) = f(x) + df(x_0).h + h\varepsilon(h). \tag{1.4}$$

Cette notion de différentielle est liée aux dérivées partielles [3].

1.3.3. Dérivation dans $\mathbb{C}$

On rappelle que, dans $\mathbb{C}$, muni du module qui est une norme, dire que le complexe z tend vers z_0 revient à dire que $|z-z_0|$ tend vers zéro dans $\mathbb{R}$, ce qui est aussi équivalent à dire que les parties réelle et imaginaire de z tendent respectivement vers les les parties réelle et imaginaire de z_0. ♢

On se donne maintenant une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on étend la définition (1.1) de la façon suivante

Définition 1.1 ($\mathbb{C}$-dérivabilité). Une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dite dérivable en z_0 s'il existe un nombre noté $f'(z_0)$ tel que

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{1.5}$$

ce qui est encore équivalent à

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}. \tag{1.6}$$

Il suffit de recopier (1.2) en changeant les x en z et $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ et de lire $|.|$ comme le module, c'est-à-dire : en z_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z - z_0| \leq \eta \Longrightarrow \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \varepsilon \right) \tag{1.7}$$

Cela peut aussi s'écrire sous une forme équivalente à (1.3) : il existe une fonction ε (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) tendant vers 0 au voisinage de 0 telle que, pour h de module assez petit

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + h\varepsilon(h). \tag{1.8}$$

Remarque 1.2. Cette notion apparemment, identique à celle de $\mathbb{R}$ est en fait, beaucoup plus forte que son analogue réel. Il faut bien comprendre que, contrairement à (1.4), $hf'(z)$ désigne la multiplication complexe de $f'(z)$ par h et non au sens des applications linéaires. Cette spécificité du corps des complexes $\mathbb{C}$ rendra cette définition très puissante : on verra (voir théorème 3.28 page 34) que toute fonction dérivable est de classe C^∞ et développable en série entière, ce qui est tout à fait faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette particularité provient entre autre du fait que la définition de la dérivabilité dans $\mathbb{C}$ est plus forte que la simple différentiabilité. La déformation locale par f des grilles autour d'un point où elle est dérivable (voir section 1.3.5) fait qu'elle se déforme de façon « très régulière ».

On pourra consulter [Har10, section III.1].

Exemple 1.3. Montrer que la fonction $z \mapsto z^2$ est dérivable de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de dérivée $2z$.

Démonstration. On calcule, pour h complexe non nul :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = 2z + h,$$

ce qui tend vers $2z$ quand h tend vers zéro. Ce calcul est identique au cas réel. □

3. Voir votre cours de MOI1 ou [Bas11b, section 2.4.1] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf` ou [Bas11a, chap. 4] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/54/85/PDF/coursMT25_P07.pdf`.

EXEMPLE 1.4. On montrera dans l'exercice 1.2 des TD que, de façon plus générale, pour tout n entier, la fonction $z \mapsto z^n$ est dérivable de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de dérivée nz^{n-1}. De façon plus générale, comme dans $\mathbb{R}$, toute fonction polynomiale ou rationnelle est dérivable, avec les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 1.5. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point.

DÉMONSTRATION. On calcule, pour h complexe non nul : :

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Si on écrit $h = \rho e^{i\theta}$, on a donc

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

Quand h tend vers 0, ρ tend vers 0, mais la fonction $e^{-2i\theta}$ n'a pas de limite (puisque dépend de θ). □

EXEMPLE 1.6. On peut introduire la fonction exponentielle de la façon suivante (comme dans [Kib01, chap. 9]) : on suppose connues les fonctions sin et cos et on pose

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)\left(\cos y + i \sin y\right). \tag{1.9}$$

On peut montrer à la main que cette fonction est dérivable et égale à sa dérivée. Mais on préfèrera la démarche inverse : on définit la fonction exponentielle comme série entière (voir section 2.5.1) généralisant la somme infinie vue dans $\mathbb{R}$, définition dont on peut déduire les lignes trigonométriques comme séries et en déduire ensuite (1.9).

1.3.4. Règles de calculs pour la dérivation dans $\mathbb{C}$

Donnons deux propositions et qui généralisent deux résultats pour la dérivabilité dans $\mathbb{R}$. La preuve de la première, facile et identique au cas réel, est laissée au lecteur.

PROPOSITION 1.7. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et g et f deux fonctions dérivables respectivement en z_0 et $g(z_0)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 et*

$$(f \circ g)'(z_0) = (f' \circ g)(z_0) g'(z_0). \tag{1.10}$$

PROPOSITION 1.8. *Soient $\xi_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction dérivable en ξ_0. On suppose de plus que f est inversible sur un voisinage*[4] *de ξ_0 et que $f'(\xi_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $z_0 = f(\xi_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(z_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(z_0)}. \tag{1.11}$$

DÉMONSTRATION. Comme dans le cas réel, il suffit d'appliquer la proposition 1.7 à f et f^{-1}, dont la composée vaut l'identité, de dérivée égale à 1. □

Les autres règles de dérivation habituelles (produit[5], rapport, combinaison linéaire, mais pas la puissance et la racine carrée, non encore formellement définies dans $\mathbb{C}$; voir par exemple [Bas22, Chapitre "Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)"].) s'appliquent de façon absolument identique au cas réel.

DÉFINITION 1.9 (Holomorphie). Soient U un ouvert[6] de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur U. On dit que f est holomorphe sur U si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U.

Naturellement, l'holomorphie entraîne la continuité.

4. ou sur une boule ouverte de centre ξ_0.
5. le rappel de cette propriété est fait et démontré dans l'exercice 1.7 de TD.
6. ou, pour simplifier, une boule ouverte

1.3.5. Représentation de fonctions complexes

Un fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut se représenter par une image bidimensionnelle et une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut se représenter par une image tridimensionnelle Si on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut se représenter dans ... $\mathbb{R}^4$, ce qui n'est pas très aisé !

Une première possibilité est de séparer partie réelle et partie imaginaire ou module et argument et de tracer chacun d'eux comme fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Il existe aussi une façon de traiter par des couleurs, plus ou moins proches du bleu et du rouge, plus ou moins délavée. Ces représentations ne montrent pas le coté spécifiques des fonctions holomorphes.

Remarque 1.10. Toutes les fonctions matlab citées dans ce cours sont disponibles sur le web à l'adresse habituelle de ce cours.

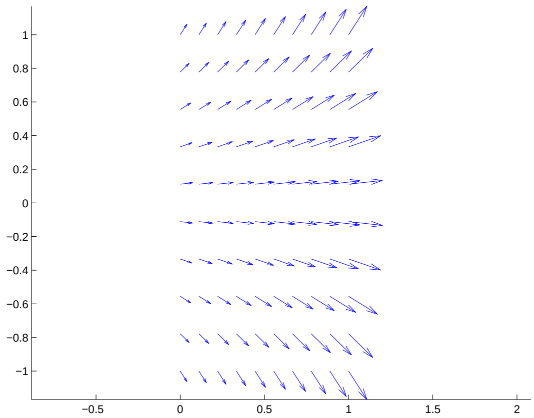


Figure 1.1. La représentation de la fonction $z \mapsto \exp(z)$ comme champ de vecteurs.

Une autre façon de faire est de représenter une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, par un champ de vecteurs, comme le montre par exemple la figure 1.1 où a été représentée la fonction $z \mapsto \exp(z)$ (cette fonction sera introduite en section 2.5.1) et qui a été obtenue en tapant sous matlab

```
trace_complexe_champ(0,1,10,-1,1,10,inline('exp(x)'))
```

Une autre façon est de représenter dans $\mathbb{C}$ une grille avec des segments d'équations $\mathrm{Re}\, z =$ constante et $\mathrm{Im}\, z =$ constante (en coordonnées cartésiennes) ou $r =$ constante et $\theta =$ constante (en coordonnées polaires) et l'image de cette grille par la fonction f. Voir par exemple la figure 1.2 où a été représentée la fonction $z \mapsto \exp(z)$ qui a été obtenue en tapant sous matlab

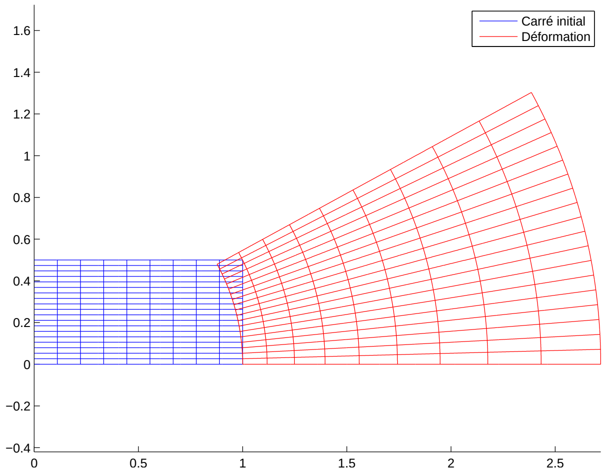
```
trace_complexe(0,1,10,0,0.5,20,1000,inline('exp(x)'))
trace_complexe(0,1,10,30,60,10,1000,inline('exp(x)'),[],1)
trace_complexe(0,1,10,30,60,10,1000,inline('exp(x)'),[],2)
```

Une autre jolie figure est disponible aux adresses suivantes :
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe`
`http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conformal_map.svg`

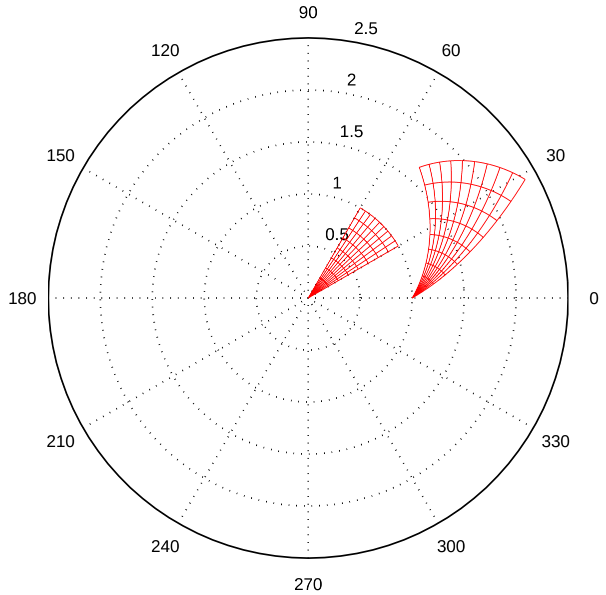
Elle est représentée en figure 1.3 : elle correspond à la fonction

$$f(z) = (1+2i)\left((z+z_0)^2 + a(z+z_1)^3 + b(z+z_2)^4\right), \tag{1.12}$$

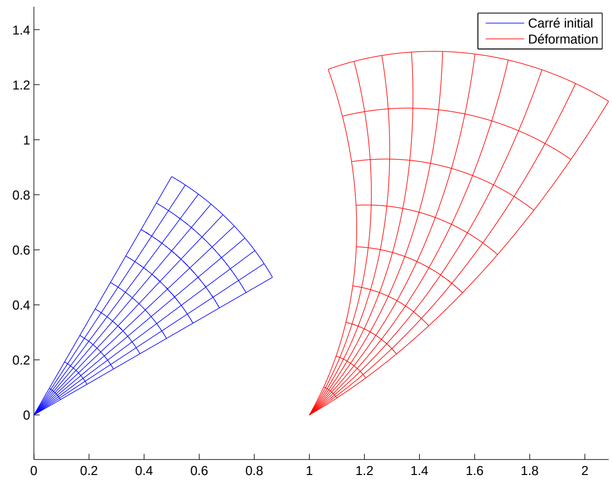
et a été obtenue en tapant sous matlab



(a) : en coordonnées cartésiennes



(b) : en coordonnées polaires



(c) : en coordonnées polaires

FIGURE 1.2. La représentation de la fonction $z \mapsto \exp(z)$ comme déformée d'une grille.

```
xmin=-1;
xmax=1;
nx=15;
ymin=-1;
ymax=1;
ny=15;
nfin=1000;
z0 = 1+ 2*i;
z1 = 0.1+ 0.2*i;
z2 = 0.2+ 0.3*i;
```

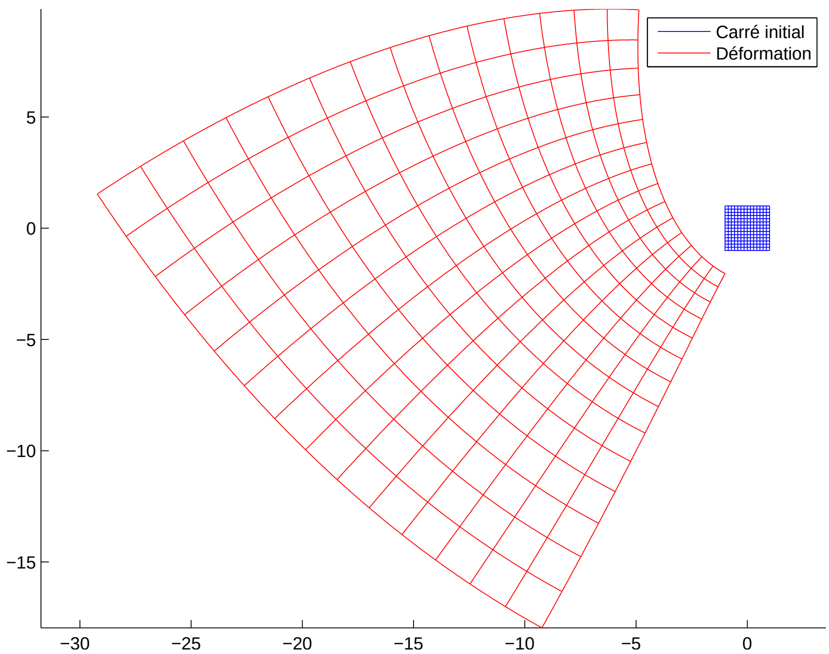


FIGURE 1.3. La représentation de la fonction f définie par (1.12).

```
a = 0.01;
b = 0.02;
F=inline('(1+2*i)*((Z+z0).^2 +a*(Z+z1).^3 +b*(Z+z2).^4)','Z','z0','z1','z2','a','b');
trace_complexe(xmin,xmax,nx,ymin,ymax,ny,nfin,F,1,0,z0,z1,z2,a,b);
```

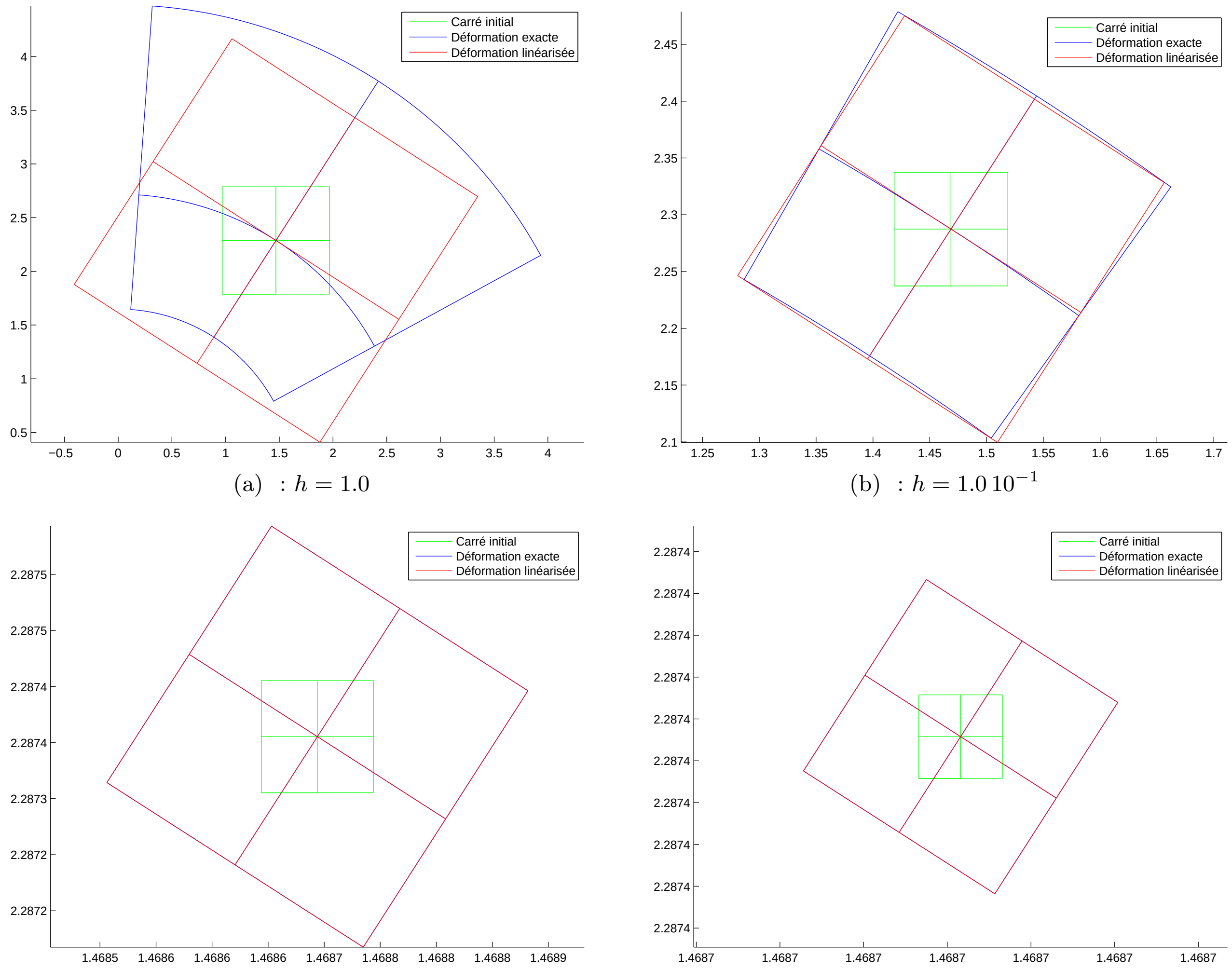
REMARQUE 1.11. Sur les figures 2(a) et 1.3, on constate que les déformées des grilles semble se faire à angle constant. On peut montrer que si une fonction f est holomorphe et si $f'(z)$ est non nul, la déformée locale des grilles correspond à celle donnée par une similitude du plan et conserve donc les angles droits. On renvoie aux exercices de TD 1.11 et 1.12, où l'on montre cela. On pourra aussi regarder l'exercice 1.2 ou la section 1.3 des TP. Une définition plus précise de cela est donnée au cours du chapitre 4.

Au début de la section 1.3.1, nous avions rappelé que dans le cadre de l'analyse réelle, la dérivée d'une fonction peut être mise en évidence par un zoom à l'infini en un point de la courbe. Dans le cas de l'analyse complexe, on peut aussi zoomer à l'infini au voisinage d'un point la grille initiale et sa déformée et si la dérivée en ce point est non nulle, on peut voir la déformée locale de la grille comme une simple application d'une similitude. Voir l'exercice facultatif 1.11 des TD et l'exercice 1.2 des TP.

Voir par exemple la figure 1.4 qui montre des simulations pour la fonction exp autour de $1+i$: différents carrés de cotés $h>0$ sont tracés autour de $1+i$ et leurs déformées par f et leur approximation par la linéarisée[7] de f définie grâce à f', et ce, pour des valeurs de h de plus en plus petites.

7. définie en utilisant (1.8) approchée à l'ordre 1, qui donne donc

$$f(z+h) \approx f(z) + hf'(z). \tag{1.13}$$



(a) : $h = 1.0$

(b) : $h = 1.0\,10^{-1}$

(c) : $h = 1.0\,10^{-4}$

(d) : $h = 1.0\,10^{-10}$

FIGURE 1.4. La représentation de la fonction $z \mapsto \exp(z)$ comme déformée d'une grille autour de $1+i$

1.3.6. Conditions de Cauchy-Riemann

Une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut aussi être vue comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ en considérant la fonction $(x, y) \mapsto f(x+iy)$, que l'on note $f(x, y)$ par abus de notation, soit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = f(x+iy). \tag{1.14}$$

On peut donc parler de différentielle (sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$) et de dérivées partielles de f par rapport à x et y (voir section 1.3.2).

Une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est différentiable mais la réciproque n'est vraie que si les conditions dites de Cauchy-Riemann sont vérifiées.

On rappelle que f est $\mathbb{R}^2$-différentiable au point $z_0 = (x_0, y_0)$ (voir équation (1.4)) ssi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que si h et k sont des réels assez petits, on a

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right). \tag{1.15}$$

De plus, les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) existent et

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{1.16}$$

Remarque 1.12. Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour que f soit $\mathbb{R}^2$-différentiable en z_0 est que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au voisinage de z_0 et qu'elles soient continues en z_0 (on dit dans ce cas que f est $\mathcal{C}^1$). Cette condition sera souvent vérifiée en pratique, de telle sorte que *dans ce cas*, f est dérivable en z_0 ssi sont vérifiées les conditions de Cauchy-Riemann (1.17).

Proposition 1.13 (Conditions de Cauchy-Riemann). *Soit f une fonction définie au voisinage de z_0. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(1) f est dérivable en z_0 ;

(2) f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en z_0 et on a, en ce point, les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \tag{1.17}$$

Dans ce cas, on a de plus

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \tag{1.18}$$

Démonstration.

- Démontrons le sens $1 \Longrightarrow 2$.

  On admet que f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en z_0. Démontrons donc (1.17) et (1.18).

  Supposons donc f dérivable en $z_0 = (x_0, y_0)$. Appliquons (1.6) avec $h = \tau \in \mathbb{R}$, ce qui donne, compte tenu de l'abus de notation (1.14) :

$$f'(z_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + (\tau, 0)) - f(x_0, y_0)}{\tau},$$

  soit encore

$$f'(z_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x_0 + \tau, y_0) - f(x_0, y_0)}{\tau},$$

  soit donc

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0). \tag{1.19}$$

  De même, si dans (1.6), on choisit $h = i\tau$, où $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(z_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \tau) - f(x_0, y_0)}{i\tau},$$

  et donc

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \tag{1.20}$$

  En comparant (1.19) et (1.20), il vient donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{i\partial y}(z_0)$$

  et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

  Enfin, (1.18) provient de (1.19) et (1.20). On admet que, dans ce cas, f est $\mathbb{R}^2$-différentiable.

- La preuve du sens $2 \Longrightarrow 1$ sera proposée dans l'exercice de TD facultatif 1.10.

□

Exemple 1.14. Si on reprend l'exemple 1.3, la fonction f est évidemment $\mathbb{R}^2$-différentiable (car de classe $\mathcal{C}^1$) et les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées puisque

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x+iy),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2i(x+iy) = 2iz,\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2z, \tag{1.21a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2iz, \tag{1.21b}$$

$$\tag{1.21c}$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 2z + i\,(2iz) = 2z(1-1) = 0.$$

Donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées et f est donc $\mathbb{C}$-dérivable. De plus, d'après (1.18) et (1.21a),

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2z,$$

Bref, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable, de dérivée $2z$.

Exemple 1.15. Si on reprend l'exemple 1.5, la fonction est évidemment différentiable et les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + i(-i) = 1 - i^2 = 2,$$

et donc la fonction n'est pas dérivable.

En notant les parties réelles et imaginaires de f sous la forme

$$f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y), \tag{1.22}$$

on a

Lemme 1.16 (Autres expressions des conditions de Cauchy-Riemann). *Les conditions de Cauchy-Riemann* (1.17) *sont équivalentes à*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{1.23a}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.23b}$$

De plus, si f est $\mathbb{C}$-dérivable, on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.24}$$

Démonstration. On a, grâce à $f = P + iQ$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y},\end{aligned}$$

et donc, les conditions de Cauchy-Riemann donnent

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

De plus, si f est $\mathbb{C}$-dérivable, on a, d'après (1.18) :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(P+iQ), \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}, \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, \end{aligned}$$

ce qui montre (1.24). □

Remarque 1.17. On annonce le lien avec la mécanique des fluides et le chapitre 5, en remarquant que la seconde des conditions de Cauchy-Riemann est

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \nabla . \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

On admet le lemme suivant en considérant qu'une fonction de z est aussi une fonction de z et de $\overline{z}$.

Lemme 1.18 (Autres expressions des conditions de Cauchy-Riemann). *Les conditions de Cauchy-Riemann* (1.17) *sont équivalentes à*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{1.25}$$

De plus, pour une fonction dérivable, on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1.26}$$

Remarque 1.19. On rappelle qu'une fonction f dont les dérivées partielles existent et sont continues sur un ouverts de $\mathbb{R}^2$ est différentiable sur cet ouvert. Dans ce cas, on dit que f est de classe C^1. Ainsi, en pratique, quand on étudie une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, elle est souvent régulière en ses deux arguments x et y et donc différentiable. Mais pour qu'elle soit $\mathbb{C}$-dérivable, il faut examiner ensuite si les conditions de Cauch-Rieman (1.17) ou (1.23) sont vérifiées. On pourra consulter par exemple l'exercice 1.3 des TD.

Donnons une dernière propriété, admise :

Proposition 1.20. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe*[8] *U de $\mathbb{C}$. Si $f' = 0$ sur U, alors f est constante.*

8. c'est-à-dire, s'il est « d'un seul tenant », soit encore si pour tout couple de points de cet ouvert, il existe un chemin continu reliant z_1 et z_2 et inclus dans U.

Chapitre 2

Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$

Ce chapitre s'appuie sur [Pab95, chap. 2] et [Sko91, chap. I]. On pourra aussi consulter :
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_entière`

2.1. Rappels sur les séries et les développements limités

Nous supposerons connues toutes les notions sur les développements limités de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui constituent une approche locale d'une fonction f : sous certaines hypothèses de régularité, on a [1] :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + h^n \frac{f^n(a)}{n!} + o\left(h^n\right). \tag{2.2}$$

On pourra par exemple consulter `http://fr.wikipedia.org/wiki/Développement_limité`

Les notions sur les série à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont connues : on rappelle que par définition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n. \tag{2.3}$$

On pourra par exemple consulter `http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_(mathématiques)`

Les séries entières sur $\mathbb{R}$ généralisent les deux notions précédentes : Sous certaines hypothèses, on a, pour (certains) x réels,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n. \tag{2.4}$$

Nous allons donc écrire, pour (certains) z complexes soit encore

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n. \tag{2.5}$$

Formellement, les séries entières ne sont rien d'autres que des polynômes "à nombre infini de coefficients non nuls". Les séries entières bénéficieront des mêmes propriétés que les polynômes : elles sont continues, dérivables, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut les dériver terme à terme et les multiplier, bref les manipuler aussi aisément que les polynômes ! Mais, on va essayer de démontrer, en partie tout du moins, ces résultats !

2.2. Introduction

Les séries entières constituent un puissant moyen de définir des fonctions holomorphes. Elles permettront par exemple de définir la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$. Elles généralisent la définition (2.3) puisque l'on étudiera des sommes du type $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, ce qui constitue aussi une généralisation des développements limités (2.2) : a et h sont cette fois-ci à valeurs complexes et la somme est infinie. Elles constituent aussi une généralisation de (2.4).

1. Pour les notations o, on rappelle que (2.2) est équivalent à

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + h^n \frac{f^n(a)}{n!} + h^n\varepsilon(h), \tag{2.1}$$

où h est une fonction tendant vers 0 au voisinage de 0.

2.3. Définitions

2.3.1. Définitions

DÉFINITION 2.1. Une série entière à coefficients complexes est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{2.6}$$

dont on dit qu'elle converge (à z fixé) s'il existe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n. \tag{2.7}$$

2.3.2. Convergence d'une série entière

La définition du rayon de convergence est donnée en annexe D page 155. Voir section D.1 page 155.

DÉFINITION 2.2. Pour tout complexe z_0 et pour tout réel $r \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on note $D_{\mathrm{f}}(z_0, r)$, le disque fermé de centre 0 et de rayon r et $D(z_0, r)$, le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.

On a alors le lemme suivant :

LEMME 2.3. *Le nombre R vérifie :*

(1) Si $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est convergente.

(2) Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ ne tend pas vers zéro et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est divergente.

(3) Pour tout réel r tel que $0 < r < R$, la série converge normalement sur $D_f(0, r)$. Cela signifie qu'il existe une série numérique convergente $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall z \in D_f(0, r), \quad |a_n z^n| \leq u_n. \tag{2.8}$$

Voir preuve en sections D.1 page 155 et D.2 page 156.

En pratique, pour déterminer le rayon de convergence. on utilise plutôt les deux formules suivantes, admises (fondées respectivement sur les règles de Cauchy et de d'Alembert sur les séries ; voir par exemple preuve dans [RDO88]) :

LEMME 2.4 (Formule d'Hadamard). *Définissons le nombre $R \in \overline{\mathbb{R}}$ par la "formule d'Hadamard"*

$$L = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}, \tag{2.9a}$$

et

$$R = \frac{1}{L}. \tag{2.9b}$$

Le nombre R est égal au rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Un autre moyen de déterminer R est d'utiliser la "formule de D'alembert" :

LEMME 2.5 (formule de D'alembert). *Le rayon de convergence R peut être obtenu par :*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \tag{2.10}$$

et (2.9b).

Attention, au bord du disque de convergence (si $|z| = R$), tout peut arriver : convergence ou divergence. On consultera l'annexe D page 155 et en particulier la section D.3 page 156.

Exemple 2.6. On pose $a_n = 1$. On a $R = 1$ et l'expression explicite de la série entière

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{2.11}$$

Démonstration.

— Pour montrer que $R = 1$ et retrouver l'expression (2.11), on raisonne à la main. On pose, classiquement, pour tout entier n,

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n.$$

Pour expliciter S_n, on écrit classiquement, pour tout entier n,

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n,$$
$$zS_n(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1},$$

et par différence

$$(z-1)S_n(z) = z^{n+1} - 1. \tag{2.12}$$

Si $z = 1$, on a

$$S_n(z) = n + 1,$$

et cette somme diverge. Si $z \neq 1$, on déduit de (2.12), l'expression usuelle

$$S_n(z) = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}. \tag{2.13}$$

Si $|z| < 1$, on sait que z^{n+1} tend vers zéro et donc la somme converge et on a

$$S_n(z) = \frac{1}{1-z}.$$

La rayon est donc égal à 1, puisque la série diverge en $z = 1$ et est convergente pour tout z tel que $|z| < 1$.

— Pour montrer seulement que $R = 1$, on peut utiliser le critère 2.10 . En effet, on a $a_{n+1}/a_n = 1$, ce qui tend vers 1 en l'infini.

□

Exemple 2.7. On pose $a_n = 1/n$. Ainsi $a_{n+1}/a_n = (n+1)/n$, qui tend vers 1. On a ainsi $R = 1$. De plus, la série est convergente en $z = -1$ et divergente en $z = 1$. En effet, pour $z = 1$, la somme $\sum 1/n$ est divergente et en $z = -1$, la somme $\sum (-1)^n/n$ (série alternée) est convergente.

En fait, la série converge partout sur le cercle de centre O et de rayon 1 sauf en 1. Voir l'exemple D.8 page 158 ou [Pab95, exemple 1.3 p. 13]

Exemple 2.8. On pose $a_n = 1/n!$. On a $R = +\infty$. C'est la série correspondant à l'exponentielle que l'on étudiera en section 2.5.1.

Exemple 2.9. On pose $a_n = n!$. On a $R = 0$.

La grande force des série entières est que l'on peut les dériver (au sens complexe) autant de fois que l'on veut, terme à terme, dans le disque de convergence :

Proposition 2.10 (Dérivation des séries entières). *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La somme de cette série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{2.14}$$

est indéfiniment dérivable (au sens de la définition 1.1) dans le disque $|z| < R$. Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)....(n-k+1)a_n z^{n-k}, \tag{2.15}$$

de sorte que

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \tag{2.16}$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < R \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{2.17}$$

Le rayon de convergence de toutes les séries entières $f^{(k)}$ est égal à celui de f.

Démonstration. Admise. Voir [RDO87, section 3.2.1.2], [Pab95, chap. 2, p 15] et [Sko91, chap. I, p. 2] ou encore la page 18 de `http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf`, elle-même issue de [Sai08]. □

Remarque 2.11. La formule (2.17) généralise donc la notion de développements limités.

Remarque 2.12. Remarquons que

$$n(n-1)....(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2.4. Fonctions analytiques

Définition 2.13 (Fonction développable en série entière (ou analytique) en un point). Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage U d'un point z_0 de $\mathbb{C}$. La fonction f est dite développable en série entière (ou analytique) au point z_0 s'il existe

- un nombre r tel que $D(z_0, r) \subset U$;
- une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{2.18}$$

Lemme 2.14. *Toute fonction analytique en un point est dérivable en ce point.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.10. □

Définition 2.15 (Fonction analytique sur un ouvert). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite analytique dans U si elle est développable en série entière (ou analytique) en tout point de U.

On en déduit donc :

Lemme 2.16. *Sur un ouvert, l'analycité entraîne l'holomorphie.*

Le gros résultat (très surprenant !) de l'analyse complexe est la réciproque du lemme 2.16 : toute fonction holomorphe est analytique (voir théorème 3.28 page 34).

2.5. Fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$

Cette section s'appuie sur [Pab95, chap. 3] et [Sko91, chap. II, section 4].

Nous allons pouvoir maintenant définir la plupart des fonctions complexes et qui généralisent à $\mathbb{C}$, les fonctions déjà connues [2] sur $\mathbb{R}$.

2.5.1. Fonction exponentielle

Reprenons l'exemple 2.8 page 14 Si on pose $a_n = 1/n!$. On a $R = +\infty$. On pose donc (nous verrons plus tard (voir remarque 2.21) pourquoi on l'appelle et on la note ainsi).

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n. \tag{2.20}$$

Voir les graphiques 1.1 page 5 et 1.2 page 6

LEMME 2.17. *On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}. \tag{2.21}$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que le conjugué de la somme est la somme du conjugué et que le conjugué du produit est le produit du conjugué ; il vient donc

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \overline{z}^n = e^{\overline{z}}$$

□

LEMME 2.18. *La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$ et elle est égale à sa dérivée.*

DÉMONSTRATION. Puisque le rayon de convergence de cette série est égal à $+\infty$, d'après la proposition 2.10, elle est C^∞ sur $\mathbb{C}$ et on a, en dérivant terme à terme, au sens des complexes

$$(\exp(z))' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z).$$

□

---

2. Nous supposerons connus les résultats suivants : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{2.19a}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.19b}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.19c}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.19d}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.19e}$$

et pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{2.19f}$$

Ces formules peuvent se démontrer à partir de la formule de Taylor.

On a la proposition suivante qui généralise la propriété bien connue [3] de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

PROPOSITION 2.19. *On a*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{2.23}$$

DÉMONSTRATION. On donne une preuve, fondée sur les familles sommables, qui généralise la notion de série et qui permet, pour simplifier, de sommer une somme infinie comme les sommes finies, en utilisant la notion d'associativité bien connue pour les sommes finies, mais nullement évidentes pour les sommes infinies. Pour plus de détails, voir par exemple `http://fr.wikipedia.org/wiki/Famille_sommable` ou [Sko91, chap. 0].

Si on développe le produit $e^{z_1}e^{z_2}$ en prennant les seuls premiers termes on a donc, sans se soucier de l'ordre (et on raisonnant donc comme si l'on développait un polynôme) :

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1^3}{6} + \dots\right)\left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{6} + \dots\right), \\ &= 1 + z_1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + z_1z_2 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^3}{6} + z_1\frac{z_2^2}{2} + \frac{z_1^2}{2}z_2 + \frac{z_1^3}{6} + \dots, \\ &= 1 + (z_1+z_2) + \frac{1}{2}\left(z_2^2 + 2z_1z_2 + z_1^2\right) + \frac{1}{6}\left(z_2^3 + 3z_1z_2^2 + 3z_1^2z_2 + z_1^3\right) + \dots, \\ &= 1 + (z_1+z_2) + \frac{1}{2}(z_1+z_2)^2 + \frac{1}{6}(z_1+z_2)^3 + \dots. \end{aligned}$$

On reconnaît dans ce développement le début de $e^{z_1+z_2}$ et on admet qu'il est de même pour tous les résultats.

Un raisonnement plus rigoureux est présenté page 17 de la version longue ♠. Dans ce raisonnement est montré en fait le résultat suivant : le produit de Cauchy permet de multiplier deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, en généralisant le produit de deux polynômes, grâce à la formule

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n. \tag{2.24}$$

◇

□

On a aussi

PROPOSITION 2.20. *On a*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{nz} = (e^z)^n. \tag{2.25}$$

DÉMONSTRATION. Laissée au lecteur, elle se démontre par récurrence sur n grâce à la propriété 2.19. □

REMARQUE 2.21. La notation $\exp(z) = e^z$ se justifie donc *a posteriori* de deux façon différentes : la propriété (2.23) est l'analogue de

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{2.26}$$

De plus, en comparant (2.20) et (2.19a), on constate donc que l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ est une extension de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec celle-ci sur l'axe réel. On pourra consulter [Bas22, l'annexe "Calcul de a^0 et redéfinition de l'exponentielle (sous la forme de deux exercices corrigés)] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`.

REMARQUE 2.22. La fonction exponentielle peut se définir de multiple façon :
voir par exemple
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle`
`http://megamaths.perso.neuf.fr/annales/capesexterne2004comp1e.pdf`

3. qui est

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}. \tag{2.22}$$

`http://megamaths.perso.neuf.fr/annales/capesexterne2004comp1s.pdf`.

Historiquement, il semblerait que, pour concevoir les règles à calculs permettant de calculer des produits, on ait cherché des fonctions transformant le produit en somme, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad F(ab) = F(a) + F(b). \tag{2.27}$$

On peut alors montrer que la dérivée de cette fonction est la fonction $t \mapsto 1/t$. Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Les premières règles à calcul et les abaques de valeurs de logarithmes sont créées grâce à différentes méthodes de calcul. D'autres calculs sont aussi réalisés en utilisant par exemple le développement en série entière (2.19f) du logarithme (réel) en 1.La fonction réciproque du logarithme est ensuite introduite ; elle est appelée exponentielle et alors la propriété (2.22) n'est qu'une conséquence de (2.27). Cette façon de procéder est une façon de définir le logarithme, l'exponentielle et, en utilisant les séries, la trigonométrie réelle.

Voir par exemple [Bas22, Annexe "Applications concrètes du logarithme"], [Lim]

ou

`http://tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc5/exp.html`
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_naturel`

Une autre façon de procéder, plus mathématique et fondamentale est de tout oublier, le logarithme, l'exponentielle et la trigonométrie réelle ! On définit ensuite les séries entières comme dans ce cours, puis l'exponentielle complexe par la formule (2.20). On définit alors le cosinus et le sinus comme étant la partie réelle de $e^{i\theta}$ (comme plus loin dans le lemme 2.23) et on aboutit aux formules (2.19d) et (2.19e). Par un raisonnement géométrique, on montre que ces lignes correspondent bien aux définition à partir de l'angle et du cercle trigonométrique. On définit enfin le logarithme comme une réciproque possible de la fontion exponentielle. C'est la façon dont nous procédons dans ce cours.

$\diamondsuit$

Lemme 2.23. *On retrouve la formule classique*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{2.28}$$

dont on peut déduire les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \tag{2.29a}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right). \tag{2.29b}$$

On retrouve aussi la formule de Moivre : pour tout entier n, pour tout réel θ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{2.30}$$

Enfin, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \tag{2.31}$$

Démonstration. Pour montrer (2.28), on écrit, par associativité [4]

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n\theta^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

dans lequel on reconnaît sin et cos :

$$= \cos\theta + i\sin\theta.$$

4. toutes les sommes existent et on admet cette propriété.

Pour montrer (2.30), on écrit alors, en utilisant (2.25),

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Enfin, (2.31) est une conséquence de (2.23) et (2.28). □

REMARQUE 2.24. Comme annoncé dans l'exemple 1.6, l'équation (2.31) est parfois prise comme définition de l'exponentielle complexe (comme dans [Kib01, chap. 9]).

Cette définition permet aussi de retrouver directement que la dérivée de l'exponentielle est elle-même. Voir exercice de TD 2.5.

On a aussi le résultat suivant :

LEMME 2.25.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}. \tag{2.32}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser d'après (2.31) : pour $z = x + iy$, on a

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x|\left|e^{iy}\right|.$$

Puisque x et y sont réels, on a

$$|e^x| = e^x, \tag{2.33a}$$

$$\left|e^{iy}\right| = 1. \tag{2.33b}$$

On a donc

$$|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

□

REMARQUE 2.26. *Attention*, à ne pas être tenté d'écrire comme dans le cas réel (2.33) si x ou y ne sont pas réels. On se convaincra en prenant un bon contre-exemple que (2.33) n'est pas toujours vrai !

2.5.2. Extension des lignes trigonométrique à $\mathbb{C}$

PROPOSITION 2.27. *On définit les fonctions cos et sin sur $\mathbb{C}$, en posant pour z complexe*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.34a}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{2.34b}$$

qui définissent des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, prolongent le cosinus et le sinus réels, vérifient pour z complexe

$$(\cos z)' = -\sin z, \tag{2.35a}$$

$$(\sin z)' = \cos z \tag{2.35b}$$

et admettent les développements en série entière qui généralisent (2.19d) *et* (2.19e) *: pour z complexe*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.36a}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.36b}$$

Démonstration. Remarquons que les formules d'Euler (2.29) valables pour θ peuvent être formellement utilisées pour définir (2.34). Puisque les fonctions e^{iz} et e^{-iz} sont analytiques sur $\mathbb{C}$, il en est de même des fonctions sinus et cosinus. Pour montrer (2.35a), il suffit d'écrire

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

On montre (2.35b) de la même façon. Enfin, les développements en série entière (2.36a) s'obtiennent en écrivant comme dans la preuve de (2.28) :

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a alors

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

et on déduit alors

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

et

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

dont (2.36) découle. □

On peut aussi retrouver cela à partir des lignes trigonométriques hyperboliques comme [Pab95, p. 115]. ◊

2.5.3. Trigonométrie et trigonométrie hyperbolique dans $\mathbb{C}$

De nombreuses autres formules sont relatives aux liens profonds qui unissent les lignes trigonométriques (cos et sin) à leurs homologues hyperboliques (cosh et sinh). Par exemple, on peut poser, en généralisant (2.19b) et (2.19c), pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.37a}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.37b}$$

et vérifier que, comme dans $\mathbb{R}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{2.38a}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{2.38b}$$

Voir [Pab95, section 3, chap. 3]. Le lien entre trigométrie et exponentielle est très profond. Un des exemples classiques déjà connu est la preuve des formules de l'exemple A.5 page 125 par exemple. Une autre formule « amusante » est donnée en annexe C.

De même, que l'exponentielle et le logarithme sont deux fonctions réciproques sur $\mathbb{R}$, nous allons pouvoir maintenant de définir le logarithme complexe, à condition de prendre certaines précautions.

2.5.4. Détermination du logarithme et des fonctions puissances sur $\mathbb{C}$

Nous allons chercher dans cette section à définir le logarithme complexe, c'est-à-dire la fonction réciproque de l'exponentielle. On se donne donc $z \in \mathbb{C}$ et on cherche ξ tel que

$$e^{\xi} = z. \tag{2.39}$$

2.5.4.1. Détermination continue de l'argument.
Le problème de l'argument d'un nombre complexe est qu'il n'est pas unique.

Définition 2.28 (Détermination continue de l'argument). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Soit $\theta : U \to \mathbb{R}$, une fonction continue. On dit que θ est une détermination continue de l'argument si, pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ est un argument de z, c'est-à-dire $z = \rho(z)e^{i\theta(z)}$ où $\rho(z) > 0$, soit encore $z/|z| = e^{i\theta(z)}$.

Sur un ouvert connexe [5], deux déterminations continues de l'argument différent d'un multiple de 2π.

Définition 2.29 (La détermination principale de l'argument). Soit U, le complémentaire de l'axe négatif (autrement appelé le plan fendu),

$$U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-. \tag{2.40}$$

L'application qui à $z \in U$ associe l'unique argument de z, $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ est continue. On l'appelle la détermination principale de l'argument et on la note arg.

Remarque 2.30 (La détermination de l'argument sur $\mathbb{C}^*$ ou sur $\mathbb{C}$.). On peut, comme le fait matlab, définir aussi arg égal à π sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\forall z \in \mathbb{R}_-^*, \quad \arg(z) = \pi. \tag{2.41}$$

Dans ce cas, θ est discontinue sur le demi axe $\mathbb{R}_-$. Voir l'exercice 1.3 du TP 1. De plus, on peut comme le fait matlab, définir aussi arg égal à 0 pour $z = 0$ de sorte que arg est cette fois-ci définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.

$\diamondsuit$

2.5.4.2. Détermination continue du logarithme.
On pourra consulter `http://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_complexe`

On cherche à définir le logarithme comme la fonction inverse de l'exponentielle. On se donne donc $z \in \mathbb{C}$ et on cherche ξ vérifiant (2.39).

De (2.32), on déduit que cette équation n'est possible que si z est non nul. On peut donc écrire

$$z = re^{i\theta(z)} \tag{2.42}$$

où $\theta(z)$, noté pour simplifier θ, est un argument de z (il n'est bien sûr pas unique, selon la section 2.5.4.1). Si on écrit $\xi = x + iy$, alors (2.42) est équivalent à

$$e^x e^{iy} = re^{i\theta}, \tag{2.43}$$

soit donc

$$x = \ln r, \tag{2.44a}$$

$$y = \theta + 2k\pi, \tag{2.44b}$$

où k appartient à $\mathbb{Z}$, soit en revenant à ξ

$$\xi = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)\,, \tag{2.45}$$

où k appartient à $\mathbb{Z}$.

5. voir la note de bas de page 8 page 11.

Définition 2.31 (La détermination continue et principale du logarithme). On appelle alors toute application qui à z associe un nombre complexe de la forme (2.45) une détermination du logarithme.

D'après la définition 2.29, les déterminations continues du logarithme sur l'ouvert U sont du type

$$z \mapsto \ln|z| + i\theta(z), \tag{2.46}$$

où $\theta(z)$ est une détermination continue de l'argument.

Enfin, si θ est la définition principale de l'argument sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction définie par

$$z \mapsto \ln|z| + i\arg(z), \tag{2.47}$$

est appelée la détermination principale du logarithme et est noté Ln : on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i\arg(z). \tag{2.48}$$

Voir l'exercice 1.3 du TP 1.

Remarque 2.32. De façon mnémotechnique, on pourra retenir cette formule en écrivant formellement, comme dans le cas réel,

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}\left(|z|e^{i\arg(z)}\right) = \mathrm{Ln}\left(|z|\right) + \mathrm{Ln}\left(e^{i\arg(z)}\right) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z). \tag{2.49}$$

Remarque 2.33. Il existe d'autres déterminations du logarithme en otant à $\mathbb{C}$ une demi-droite quelconque, issue de l'origine.

En effet, pour tout α fixé, on peut définir une détermination continue de l'argument sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$ vers $]2\pi-\alpha, \alpha[$. ♢

Puisque le logarithme n'est pas unique, on parle parfois de fonctions multiformes.

Voir l'exercice 1.3 du TP 1.

Remarque 2.34 (La détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.). Il est en fait impossible d'avoir une détermination continue du Ln sur $\mathbb{C}^*$ (voir exemple 3.23 page 32). Cependant, comme dans la remarque 2.30, on peut définir conventionnellement définir le Ln sur $\mathbb{C}^*$ tout tentier en utilisant la convention (2.41), qui donne

$$\forall z \in \mathbb{R}_-^*, \quad \mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\pi. \tag{2.50}$$

On pourra aussi consulter l'exercice de TD 2.1.

Cette convention est aussi utilisée par matlab. Dans ce cas, Ln est discontinue (et à plus forte raison, non dérivable) sur le demi axe $\mathbb{R}_-$.

♢

Remarque 2.35 (Limite du logarithme en 0.). On rappelle que dans le cas réel

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty. \tag{2.51}$$

Posons $z = re^{i\theta}$ avec $\theta = \arg(z)$ pour $z \in U$ (et donc $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$) et étudions si la limite de $\mathrm{Ln}\, z$ existe quand z tend vers zéro (en restant dans U) ce qui est équivalent à $r \to 0$ avec $r > 0$. D'après la définition (2.48), on a donc

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln r + i\arg(z). \tag{2.52}$$

et donc, d'après (2.51)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \mathrm{Re}(\mathrm{Ln}(z)) = -\infty, \tag{2.53a}$$

tandis que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \mathrm{Im}(\mathrm{Ln}(z)) \text{ n'existe pas,} \tag{2.53b}$$

mais

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}(z) \in]-\pi, \pi[. \tag{2.53c}$$

Au vu de (2.53), nous dirons, comme dans le cas réel, que "$-\infty$ l'emporte sur la partie bornée" et on posera donc, pat convention

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \mathrm{Ln}(z) = -\infty. \tag{2.54}$$

Si on étend l'argument sur $\mathbb{C}^*$ tout entier grâce à la remarque 2.30 page 21, ou (ce qui revient au même) le logarithme complexe grâce à la remarque 2.34 page précédente, le raisonnement est identique, sauf que (2.53c) est remplacé par

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}(z) \in]-\pi,\pi],$$

ce qui ne change rien. On peut donc écrire, avec cette convention :

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \mathbb{C}^*}} \mathrm{Ln}(z) = -\infty. \tag{2.55}$$

$\diamondsuit$

Enfin, on retrouve les propriétés usuelles du logarihme réel qui ne se généralisent pas aussi simplement, à cause de l'aspect multiforme du logarithme :

PROPOSITION 2.36. *On considère la détermination principale du logarithme* Ln*, définie sur le plan fendu* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$*. On a alors*

(1) Sa dérivée est $1/z$ *;*

(2) Elle coïncide avec ln *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*

(3) Comme dans la remarque 2.17 page 16, on a

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad \overline{\mathrm{Ln}(z)} = \mathrm{Ln}\left(\overline{z}\right). \tag{2.56}$$

(4) On a

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad \exp(\mathrm{Ln}(z)) = z, \tag{2.57}$$

(5) Soit $\mathcal{F}$ *défini par*

$$\mathcal{F} = \{z = x+iy\in\mathbb{C},\quad y\equiv 0\,[\pi]\ \text{ et }\ \cos(y)\le 0\}. \tag{2.58}$$

On a

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{F},\quad -\pi<\mathrm{Im}(z)<\pi \Longrightarrow \mathrm{Ln}(\exp(z)) = z. \tag{2.59}$$

(6) Soit $\mathcal{F}$ *défini par* (2.58)*. On a*

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{F},\quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad \mathrm{Ln}(\exp(z)) = z+2ik\pi. \tag{2.60}$$

(7) On a

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad z_1z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \Longrightarrow \mathrm{Ln}(z_1z_2) = \mathrm{Ln}(z_1)+\mathrm{Ln}(z_2)+2ik\pi, \tag{2.61}$$

où $k\in\{-1,0,1\}$*.*

(8) On a

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad z_1z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-\ \text{ et }\ \arg(z_1)+\arg(z_2)\in]-\pi,\pi[\Longrightarrow \mathrm{Ln}(z_1z_2) = \mathrm{Ln}(z_1)+\mathrm{Ln}(z_2). \tag{2.62}$$

DÉMONSTRATION.

Voir la preuve page 24 de la version longue. ♠

□

Voir l'exercice 2.2 du TD 1 et l'exercice 1.3 du TP 1.

REMARQUE 2.37. Le point 3 de la proposition 2.36 donne le lien entre $\overline{\mathrm{Ln}(z)}$ et $\mathrm{Ln}\left(\overline{z}\right)$. On peut aussi déterminer de même le lien entre les logarithmes de z et z' le symétrique de z par rapport à l'axe de y. Voir exercice de TD 2.4.

On peut formaliser l'équation (2.49) de la remarque 2.32 page précédente.

Voir la remarque 2.39 page 26 de la version longue. ♠

On a aussi :

PROPOSITION 2.38.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \Longrightarrow \left(1 + z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ \textit{et} \ \mathrm{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n\right). \tag{2.63}$$

DÉMONSTRATION. Un argument géométrique simple permet de montrer que si $|z| < 1$ alors $1+z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Par ailleurs, considérons la série entière définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n. \tag{2.64}$$

D'après le lemme 2.5, son rayon de convergence est 1 et d'après la proposition 2.10, f est holomorphe (même analytique) sur le disque de centre 0 et de rayon 1 et, en dérivant terme à terme,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}.$$

selon l'exemple 2.6. De plus, selon la proposition 2.36 (point 1), on a

$$(f(z) - \mathrm{Ln}(1+z))' = 0.$$

On conclue alors en utilisant la proposition 1.20. □

REMARQUE 2.39. La formule (2.63) est aussi valable pour $z = 1$. Voir par exemple [Bas22, Annexe intitulée "Approximations polynômiales de $\ln(1+x)$ et de e^x"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`

◇

2.5.4.3. Détermination principale de la puissance (z^α).

Comme dans le cas réel, où x^α a un sens pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, en posant $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, on définit z^α par

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad z^\alpha = e^{\alpha \,\mathrm{Ln}\, z}. \tag{2.65}$$

REMARQUE 2.40. Il est intéressante de voir comment successivement les mathématiciens ont donné un sens à la quantité z^α pour z réel et α entier strictement positif, puis nul, puis négatif, puis rationnel, puis réel, puis complexe et enfin z et α complexes. On pourra consulter [Bas14] ou [Bas22, Annexe "Calcul de a^0 et redéfinition de l'exponentielle"].

Nous avons aussi la propriété suivante qui généralise le cas réel :

PROPOSITION 2.41.

$$\forall \alpha, \beta, z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \Longrightarrow z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}. \tag{2.66}$$

De même, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall \theta \in -]\pi, \pi[, \quad \left(e^{i\theta}\right)^\alpha = e^{i\alpha\theta}. \tag{2.67}$$

Enfin,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad |z^\alpha| = |z|^\alpha. \tag{2.68}$$

DÉMONSTRATION.

- On a
$$z^\alpha z^\beta = \exp(\alpha \,\mathrm{Ln}(z)) \exp(\beta \,\mathrm{Ln}(z)) = \exp((\alpha+\beta) \,\mathrm{Ln}(z)) = z^{\alpha+\beta},$$
ce qui montre (2.66)
- On a, par définition,
$$\left(e^{i\theta}\right)^\alpha = e^{\alpha \,\mathrm{Ln}(e^{i\theta})},$$
et donc d'après (2.59), (puisque $\theta \in -]\pi, \pi[$).
$$\left(e^{i\theta}\right)^\alpha = e^{\alpha i\theta}.$$

- On a

$$\begin{aligned}|z^\alpha| &= \left|e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(z)}\right|,\\ &= \left|e^{\alpha\ln|z|+i\alpha\arg(z)}\right|,\\ &= \left|e^{\alpha\ln|z|}\right|\left|e^{i\alpha\arg(z)}\right|,\end{aligned}$$

et, en utilisant le fait que $\alpha\ln|z|$ est réel et que $\alpha\arg(z)$ est réel, on a donc :

$$\begin{aligned}&= \left|e^{\alpha\ln|z|}\right|,\\ &= |z|^\alpha,\end{aligned}$$

ce qui montre (2.68).

□

REMARQUE 2.42. Notons que pour n entier et z complexe, l'écriture z^n contient en fait deux définitions. La première correspond à la définition usuelle de z^n, la seconde correspondant à la définition (2.65). Ces deux écritures sont en fait équivalentes. Voir l'exercice de TD 2.6.

REMARQUE 2.43 (La détermination des puissances sur $\mathbb{C}^*$). Comme pour la remarque 2.34, on peut définir une puissance $z\alpha$, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ en utilisant (2.50). De plus, si α est réel, d'après (2.68), on a donc cette fois-ci :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad |z^\alpha| = |z|^\alpha\,.$$

Si, de plus, α est un réel strictement positif, on a

$$\lim_{|z|\to 0}|z|^\alpha = 0,$$

et donc

$$\lim_{|z|\to 0} z^\alpha = 0.$$

On posera donc par convention, comme dans le cas réel :

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\quad 0^\alpha = 0. \tag{2.69}$$

◇

Enfin, comme dans le cas réel, on a :

PROPOSITION 2.44. *Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, la fonction $z\mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ et sa dérivée est donnée par*

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad (z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{2.70}$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.36, le logarithmique complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ de dérivée $1/z$. Ainsi, d'après la proposition 1.7 page 4, $z\mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ et sa dérivée est donnée par

$$(z^\alpha)' = \left(e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(z)}\right)' = (\alpha\,\mathrm{Ln}(z))'\left(e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(z)}\right) = \frac{\alpha}{z}z^\alpha.$$

On vérifie que $1/z = z^{-1}$ et donc, d'après (2.66), on a

$$(z^\alpha)' = z^{\alpha-1}.$$

□

2.5.5. Expression des développements en série entières des fonction usuelles

Ces développements en série entières sur $\mathbb{C}$ peuvent être définis à partir des développements limités de leurs homologues réels. On consultera par exemple [Bas22, l'annexe "Quelques développements limités usuels"].

2.5.6. Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$

Voir annexe E page 182.

2.5.7. Définitions des fonctions complexes arcsin et arccos

Voir annexe F page 193.

Chapitre 3

Intégration des fonctions complexes, Théorème de Cauchy et Formules des Résidus

3.1. Introduction

Ce chapitre pourrait se faire en une quinzaine d'heures, ce qu'on ne fera pas du tout ! Le but de ce chapitre est surtout de comprendre les choses suivantes :

— Comment intégrer une fonction complexe le long d'un chemin.

— En déduire le théorème de Cauchy et l'une de ses conséquences importante et surprenante : l'analycité des fonctions complexes est équivalente à l'holomorphie !

— En déduire aussi le théorème des résidus, très utile pour le calcul de certaines intégrales ou de sommes infinies.

Ce chapitre s'appuie sur [Pab95, chap. 4 à 10] et [Sko91, chap. III et IV].

On pourra aussi consulter
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus`

3.2. Intégration des fonctions complexes

Vous avez dû voir en mécanique qu'un champ de vecteur conservatif (qui dérive d'un potentiel) a une circulation sur une courbe fermée égale à zéro (voir par exemple [Bas11b, Annexe E et (E.20) p. 118] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf`). Vous connaissez aussi le calcul suivant, qui nous montre qu'un champ de force dérivant d'un potentil est conservatif : Si $\vec{F} = \nabla\phi$, on a

$$\begin{aligned}\int \vec{F}.\vec{dl} &= \int \nabla\phi.\vec{dl},\\ &= \int d\phi,\\ &= \phi(b) - \phi(a),\end{aligned}$$

et donc

$$\int \vec{F}.\vec{dl} = \phi(b) - \phi(a). \tag{3.1}$$

Nous allons retrouver formellement cette propriété pour des fonctions complexes.

3.2.1. Intégration des fonctions complexes le long d'un chemin

Les pages 30 à 35 de [Pab95] définissent rigoureusement la notion d'intégration des fonctions complexes le long d'un chemin. Nous allons donner directement :

Définition 3.1. On appelle arc toute application continue γ d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $t \mapsto \gamma(t)$. $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité de l'arc γ. On appelle chemin dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, un arc de classe C^1 par morceaux dont l'image est incluse dans Ω. Soit enfin f une application continue sur l'image de γ. L'intégrale de f sur γ est définie par l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{3.2}$$

REMARQUE 3.2. Ici, la dérivée utilisée est la dérivée usuelle sur $\mathbb{R}$, et non celle du chapitre 1 ! C'est-à-dire, que si

$$\gamma(t) = X(t) + iY(t), \tag{3.3}$$

alors

$$\gamma'(t) = X'(t) + iY'(t). \tag{3.4}$$

REMARQUE 3.3.
— Cette intégrale est l'intégrale d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et peut se calculer en intégrant séparément partie réelle et imaginaire ou en intégrant directement les fonctions complexes.
— Cette définition ressemble beaucoup à celle d'une intégrale curviligne (voir [Bas11b, section E.1.2]).
— De façon mnémotechnique, il suffit de poser de façon formelle $z = \gamma(t)$ et de faire un changement de variable : $z = \gamma(t)$ et donc $dz = \gamma'(t)dt$.

EXEMPLE 3.4. Calculer l'intégrale de $f = z$ sur le chemin $\gamma(t) = e^{it}$, pour $t \in [0, \pi/2]$. Pour dériver γ, on peut utiliser la formule suivante : d'après (2.28), pour a est un réel, on a

$$e^{ait} = \cos(at) + i\sin(at). \tag{3.5}$$

D'après (3.3) et (3.4), on a donc

$$\left(e^{ait}\right)' = -a\sin(at) + ia\cos(at) = ia\left(\cos(at) + i\sin(at)\right) = aie^{ait},$$

et donc

$$\left(e^{ait}\right)' = aie^{ait}. \tag{3.6}$$

Cette formule peut aussi vue comme une conséquence du lemme 2.18 page 16. On a $\gamma(t) = e^{it}$ et donc $\gamma'(t) = ie^{it}$ et donc

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,\\
&= \int_0^{\pi/2} e^{it}ie^{it}dt,\\
&= i\int_0^{\pi/2} e^{2it}dt,\\
&= \frac{i}{2i}\left[e^{2it}\right]_{t=0}^{t=\pi/2},\\
&= \frac{1}{2}\left(-1-1\right),\\
&= -1.
\end{aligned}$$

DÉFINITION 3.5. Un chemin fermé est tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

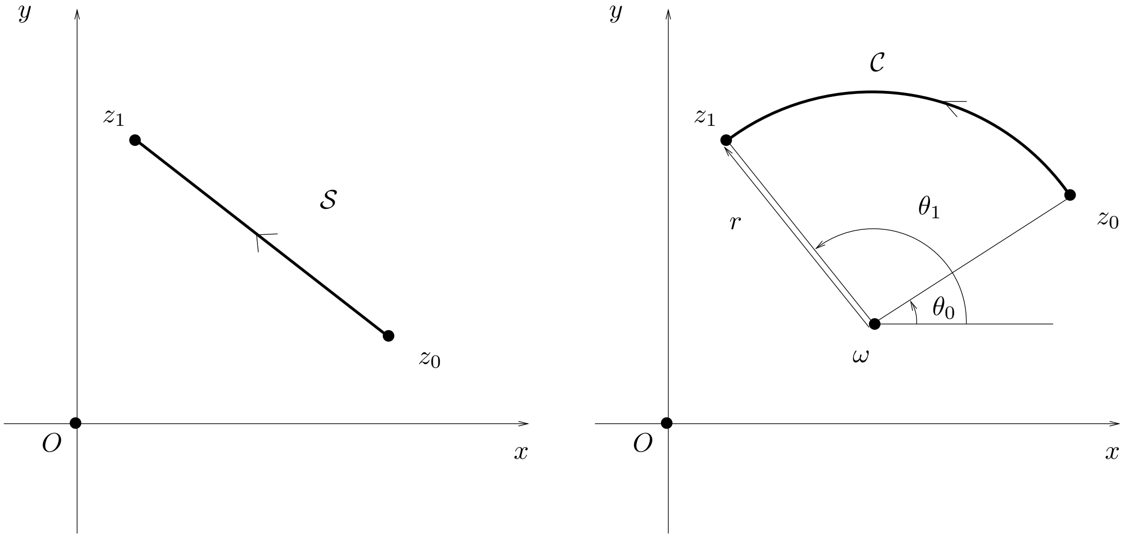
PROPOSITION 3.6. *L'intégrale le long d'un chemin est indépendante du paramétrage (c'est-à-dire de la fonction γ) choisi.*

DÉMONSTRATION. Soient γ et γ_1 deux chemins. Il existe donc ϕ, continue, croissante et C^1 par morceaux, de $[a, b]$ dans $[a_1, b_1]$ telle que ϕ^{-1} est C^1 par morceaux avec $\gamma = \gamma_1 \circ \phi$. On fait le changement de variable $t = \phi(\tau)$ avec $t \in [a_1, b_1]$ et $\tau \in [a, b]$. On a donc $dt = \phi'(\tau)d\tau$ et

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) = \gamma_1 \circ \phi(\tau) = \gamma(\tau),$$

et donc

$$\gamma_1'(t) = \gamma_1'(\phi(\tau))\phi'(\tau).$$



(a) Le segment $\mathcal{S}$ (b) L'arc de cercle $\mathcal{C}$

FIGURE 3.1. La paramétrisation générale d'un segment $\mathcal{S} = [z_0, z_1]$ ou d'un arc de cercle $\mathcal{C}$.

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt &= \int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma_1'(\phi(\tau))\phi'(\tau)d\tau,\\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau))(\gamma_1(\phi(\tau)))'d\tau,\\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

□

EXEMPLE 3.7.

(1) On considère le segment $\mathcal{S} = [z_0, z_1]$ comme indiqué sur la figure 1(a). Le paramétrage de ce segment est donné par

$$\gamma : \left| \begin{array}{lll} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array} \right., \tag{3.7a}$$

avec

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t. \tag{3.7b}$$

Voir preuve dans l'exercice de TD 3.7.

(2) On considère l'arc de cercle $\mathcal{C}$ comme indiqué sur la figure 1(b). Le paramétrage de cet arc de cercle est donné par par

$$\gamma : \left| \begin{array}{lll} [\theta_0,\theta_1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array} \right., \tag{3.8a}$$

avec

$$\forall t \in [\theta_0, \theta_1], \quad \gamma(t) = re^{it} + \omega, \tag{3.8b}$$

où r est le rayon de l'arc de cercle et ω l'affixe de son centre.

Voir preuve dans l'exercice de TD 3.7.

Trois résultats immédiats sont donnés sans preuve :

LEMME 3.8 (Juxtaposition de chemins). *Si* $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$*, alors*

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

LEMME 3.9 (Chemin opposé).

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

LEMME 3.10 (Majoration). *Avec les notations de la définition 3.1*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt.$$

On a facilement le lemme suivant :

LEMME 3.11 (Inégalité de Darboux). *Si* γ *est un chemin défini sur* $[a, b]$ *et* M *un majorant de* $|f|$ *sur l'image de* γ*, alors*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq ML, \tag{3.9}$$

où L *est la longueur du chemin.*

DÉMONSTRATION. Elle résulte du lemme 3.10 et de la définition de la longueur d'un chemin (voir [Bas11a, section 3.2.1] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/54/85/PDF/coursMT25_P07.pdf` et est donnée dans [Pet98, p. 180]. □

3.2.2. Indice d'un chemin

DÉFINITION 3.12. Soient γ un chemin fermé et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Pour tout $z \in \Omega$, on définit l'indice de γ par rapport à z par l'intégrale

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.10}$$

C'est intuitivement le « nombre de tours » décrit par γ autour de $z \notin \gamma$ quand t décrit $[a, b]$ et c'est un entier relatif.

THÉORÈME 3.13. *Ind_{γ} est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de* Ω [1] *et nulle sur la composante non bornée de* Ω.

DÉMONSTRATION. Admise. □

PROPOSITION 3.14. *Soit* γ *le cercle de centre* a *et de rayon* r*, décrit dans le sens trigonométrique. Alors* $Ind_{\gamma}(z) = 1$ *si* $|z - a| < r$ *et* $Ind_{\gamma}(z) = 0$ *si* $|z - a| > r$.

DÉMONSTRATION. Calculons $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z)$, pour $|z - a| < r$. Il suffit de choisir d'après le théorème 3.13, $z = a$. On choisit le paramétrage suivant du cercle : $\zeta = re^{i\theta} + a$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On a $d\zeta = ire^{i\theta}d\theta$ et par définition,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1$$

Si a est à l'extérieur du cercle, on est sur la composante non bornée et Ind_{γ} y est nulle, d'après le théorème 3.13. □

1. C'est-à-dire, les parties connexes (voir la note de bas de page 8 page 11) du plan « séparées » par le chemin γ. Voir la figure 3.2.

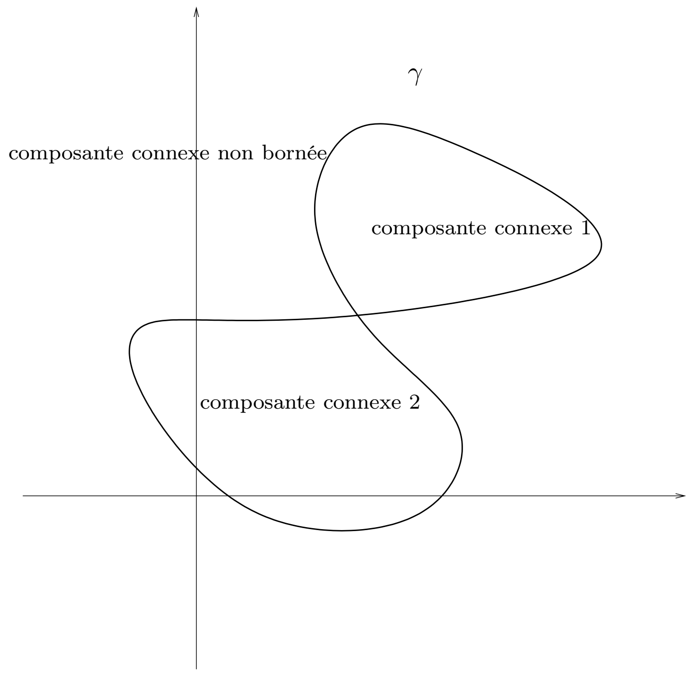


FIGURE 3.2. Les composantes connexes définies par γ. Voir aussi la note 8 page 11.

REMARQUE 3.15. Attention, si le cercle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, alors $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = -1$ si $|z-a| < r$. En effet, le calcul précédent donne cette fois-ci :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2i\pi}\int_{2\pi}^{0} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} == -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = -1.$$

Il en est de même pour tout chemin tournant autour de z : l'indice est 1 si il est parcouru dans le sens trigonométrique et -1 sinon.

3.3. Primitive des fonctions complexes et Théorie de Cauchy

On renvoie à [Pab95, chap. 5 et 6] et [Sko91, chap. III].

3.3.1. Primitive des fonctions complexes

Comme dans le cas réel, on donne

DÉFINITION 3.16. Soit f une fonction complexe définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On appelle primitive de f dans Ω toute fonction F définie et holomorphe dans Ω telle que $F' = f$.

Comme dans le cas réel, on a

PROPOSITION 3.17. *Soient f une fonction complexe continue dans un ouvert Ω et F une primitive de f. Étant donné un chemin γ dans Ω, d'origine z_0 et d'extrémité z_1, on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{3.11}$$

DÉMONSTRATION. On retrouve donc bien formellement (3.1). Il suffit d'écrire les définitions. En effet, on a successivement

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,\\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt,\\ &= \int_a^b (F(\gamma(t)))'dt,\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),\\ &= F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$

□

REMARQUE 3.18. On a aussi, exactement comme dans le cas réel :

LEMME 3.19 (Intégration par partie complexe). *Soient f et g deux fonction holomorphes sur ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et un chemin γ dans l'ouvert Ω, d'origine z_0 et d'extrémité z_1. On a*

$$\int_\gamma f'(z)g(z)dz = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz + [fg]_{z=z_0}^{z=z_1} = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz + f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0). \tag{3.12}$$

DÉMONSTRATION. Voir la question 1 de l'exercice de TD 3.9. □

♢

EXEMPLE 3.20. Comme dans $\mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et $a \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto (z-a)^n$ admet pour primitive $z \mapsto (z-a)^{n+1}/(n+1)$.

EXEMPLE 3.21. Comme dans $\mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto 1/z$ définie sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ a pour primitive la détermination principale du logarithme Ln, selon la proposition 2.36.

On déduit de la proposition 3.17 que

PROPOSITION 3.22. *Si la fonction continue f admet une primitive dans l'ouvert Ω, on a pour tout chemin fermé γ à valeurs dans Ω,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{3.13}$$

Nous verrons dans le théorème 3.24 la réciproque, aussi vraie.

EXEMPLE 3.23. D'après la proposition 3.14, on a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi, \tag{3.14}$$

et puisque cela est non nul, la fonction $1/z$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}^*$ et *a fortiori*, il n'existe aucune détermination (continue) du logarithme dans $\mathbb{C}^*$.

Une preuve alternative sera proposée dans l'exercice de TD facultatif 3.10.

THÉORÈME 3.24. *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Pour que f admette une primitive dans Ω, il faut et il suffit que, pour tout chemin fermé γ dans Ω, on a ait* (3.13).

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire résulte de la proposition 3.22. La condition suffisante est admise.

□

3.3.2. Théorie de Cauchy

Nous allons maintenant admettre, sans preuve, le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème 3.24 :

Théorème 3.25 (Théorème de Cauchy). *Soient* Ω *un ouvert*[2], f *une fonction continue sur* Ω*, holomorphe dans* $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$*. Alors,* f *admet une primitive dans* Ω *et pour tout chemin fermé* γ *dans* Ω*, on a* (3.13).

Remarque 3.26. Souvent présentée dans le cas d'un ouvert Ω convexe [3], cette formule est en fait souvent vraie dans le cas d'un d'un ouvert Ω connexe [4]. Par la suite, pour simplifier, on oubliera la notion de convexe ou de connexe, en retenant que les cas présentés dans ce cours obéissent à l'une de ces hypothèses.

$\diamondsuit$

Théorème 3.27 (Formule de Cauchy). *Soient* Ω *un ouvert et* γ *un chemin fermé dans* Ω*. Soit* f *holomorphe sur* Ω*. Si* $z \in \Omega$ *et* $z \notin \gamma$*, alors*

$$f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.15}$$

En particulier, si z *est intérieur à* γ *et* γ *est d'indice 1 par rapport à* z *:*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.16}$$

Démonstration. Considérons la fonction f définie par

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{si } \zeta \neq z, \\ \\ f'(\zeta), & \text{si } \zeta = z \end{cases}$$

qui est continue dans Ω et holomorphe dans $\Omega \setminus \{z\}$. D'après le théorème 3.25, on a

$$\int_\gamma g(z) dz = 0$$

et donc

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

ce qui implique

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

et d'après la définition (3.10) de l'indice,

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z).$$

En particulier, si z est intérieur à γ et γ est d'indice 1 par rapport à z, on a bien (3.16). $\square$

$\diamondsuit$

Voir le timbre de la section 3.6 page 45 !
Voir l'exemple 3.28 page 36 de la version longue. ♠

---

2. vérifiant les hypothèse de la remarque 3.26.
3. C est un convexe ssi pour tout $(a, b) \in C^2$, $[a, b]$ est inclus dans C.
4. voir la note de bas de page 8 page 11.

3.3.3. Analycité des fonctions holomorphes

Déduisons enfin de la formule de Cauchy, le résultat tant attendu : l'analycité des fonctions complexes est équivalente à l'holomorphie !

THÉORÈME 3.28. *Toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω est analytique dans Ω.*

DÉMONSTRATION. Résultat admis.
Voir références dans la preuve page 39 de la version longue. ♠

□

Voir la proposition 3.30 page 39 de la version longue. ♠

3.4. Formule des résidus et applications aux calculs d'intégrales

Entrons maintenant dans la dernière section où est énoncé le résultat principal[5], la formule des résidus "simple" conséquence du Théorème de Cauchy 3.25.

On renvoie à [Pab95, chap. 8 et 9] et [Sko91, chap. III section 4)].

3.4.1. Singularités isolées et théorèmes des résidus

Commençons par un exemple pour introduire cette notion.

EXEMPLE 3.29.

(1) La fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

n'est *a priori* pas définie en 0. Cependant, d'après (2.36b), on a pour tout z non nul

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et donc

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{3.17}$$

Remarquons que la somme de droite de cette équation, est, par définition de (2.36b), définie sur $\mathbb{C}$. Pour $z = 0$, elle vaut $(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ pour $n = 0$, soit 1. La somme de droite définit donc une fonction développable en série entière à l'orgine et est en particulier holomorphe (et donc continue). Ainsi, f peut être prolongée par continuité en zéro[6] en posant $f(0) = 1$. Ainsi prolongée, f est développable en série entière et son rayon de convergence est égal à l'infini. On dit de f qu'elle présente une singularité en 0 mais que cette singularité est illusoire.

(2) Si on considère la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad g(z) = f(z) + \frac{1}{z}, \tag{3.18}$$

cette fois-ci, g n'est pas définie en zéro et n'admet pas de limite quand z tend vers zéro. Néanmoins la fonction f admet de nouveau une singularité illusoire en zéro. On dira que g admet un pôle d'ordre 1 en zéro. Notons que dans ce cas, (3.18) entraîne :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad zg(z) = zf(z) + 1, \tag{3.19}$$

5. et très joli !
6. On retrouve donc le cas réel.

qui est une fonction holomorphe. En d'autre terme

$$z \mapsto zg(z) \text{ a une singularité isolé en zéro.} \tag{3.20}$$

EXEMPLE 3.30. Traiter les exercices de TD 3.4, 3.11, 3.5 et 3.12 que l'on pourra achever, une fois la notion de résidus apprise.

◇

DÉFINITION 3.31 (Singularité isolée). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. On dit que a est une singularité isolée de f.

On admet alors le lemme suivant :

LEMME 3.32. *Soit a une singularité isolée de f. Si on peut prolonger f en a en une fonction holomorphe au voisinage de a, ce prolongement est unique. On dit alors que la singularité de f en a est illusoire (ou apparente ou inexistante) ou encore est une fausse singularité. On dit encore que a est un point régulier de f.*

On en déduit le résultat suivant (voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Singularit%C3%A9_isol%C3%A9e`), qui généralise les cas 1 et 2 de l'exemple 3.29.

THÉORÈME 3.33 (Classification des singularités isolées). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Nous avons trois cas possibles :*

(1) La singularité a de f est illusoire.

(2) La singularité a est appelée pôle de f, si d'une part la singularité a est non illusoire et d'autre part, pour $m \in \mathbb{N}^*$ entier suffisamment grand, la fonction définie par

$$\forall z \in \Omega \setminus \{a\}, \quad G(z) = (z-a)^m f(z), \tag{3.21}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω (autrement dit a est une singularité illusoire de G). Le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ possible est appelé l'ordre du pôle. a.

(3) Si la singularité a n'est ni une singularité illusoire, ni un pôle, on dit que c'est une singularité essentielle.

THÉORÈME 3.34 (Classification des singularités isolées (version alternative)). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Alors, f vérifie l'une (et l'une seulement) des propriétés suivantes :*

(1) f a une singularité illusoire en a et il existe des nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniques tels que

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k. \tag{3.22}$$

(2) a est un pôle d'ordre $m \geq 1$ et il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et des nombres complexes $(a_n)_{n\in\{-m,\dots,-1\}\cup\mathbb{N}}$ uniques[7] *tels que*

$$a_{-m} \neq 0 \tag{3.23}$$

et

$$\forall z \in \Omega \setminus \{a\}, \quad f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k, \tag{3.24}$$

expression qui généralise (3.22).

(3) a est une singularité essentielle.

DÉMONSTRATION.

(1) Si a est une singularité illusoire, d'après le lemme 3.32, f, prolongée en a, est holomorphe sur Ω et d'après le théorème 3.28, f est analytique sur Ω et en particulier développable en série entière et a, dont on déduit le cas 1.

7. donnés par (3.25) et (3.26), avec G définie par (3.21).

(2) Si a est un pôle (d'ordre m), on est dans le cas 2 du théorème 3.33. La fonction G définie par (3.21) a une singularité illusoire en a. D'après le cas 1, on peut écrire (3.22) appliquée à G :

$$\forall z \in \Omega, \quad G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-a)^k. \tag{3.25}$$

et donc, d'après (3.21),

$$\begin{aligned}
\forall z \in \Omega \setminus \{a\}, \quad f(z) &= \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-a)^k, \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^m} b_k (z-a)^k, \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-a)^{k-m},
\end{aligned}$$

en posant $k' = k - m$

$$= \sum_{k=-m}^{+\infty} b_{k+m} (z-a)^k,$$

et en isolant les m premiers termes de la somme

$$= \sum_{k=-m}^{-1} b_{k+m} (z-a)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k+m} (z-a)^k.$$

en posant $k' = -k$ dans la première somme :

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{-k+m}}{(z-a)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k+m} (z-a)^k.$$

On définit les complexes $(a_n)_{n\in\{-m,\ldots,-1\}\cup\mathbb{N}}$ uniques par

$$\forall k \in \{1, .., m\}, \quad a_{-k} = b_{-k+m}, \tag{3.26a}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = b_{k+m}. \tag{3.26b}$$

On a donc $a_0 = 0$ et (3.24).

Pour conclure, montrons que (3.23) est vérifiée. Raisonnons par l'absurde et supposons que $a_{-m} = 0$. D'après (3.25) et (3.26), on a donc b_0 et

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} b_k (z-a)^k, \\
&= (z-a) \sum_{k=1}^{+\infty} b_k (z-a)^{k-1}, \\
&= (z-a) \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k+1} (z-a)^k, \\
&= (z-a)\xi(z),
\end{aligned}$$

où $\xi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k+1}(z-a)^k$ est holomorphe. On a donc d'après (3.21)

$$G(z) = (z-a)\xi(z) = (z-a)^m f(z)$$

et donc

$$\forall z \in \Omega \setminus \{a\}, \quad \xi(z) = (z-a)^{m-1} f(z) \text{ avec } \xi \text{ holomorphe.} \tag{3.27}$$

Si $m - 1 = 0$, $f = \xi$ et f est holomorphe donc a est une singularité illusoire de f, et on est donc dans le cas 1, ce qui n'est pas possible. Sinon, on a donc trouvé un entier $p = m - 1 \geq 1$ qui vérifie (3.27), ce qui contredit l'aspect minimal de m qui vérifie (3.21)

□

◇

REMARQUE 3.35. Il est très important de supposer $a_{-m} \neq 0$!

Voir le théorème 3.38 page 42. de la version longue. ♠

La preuve de ce théorème est proposé dans l'exercice de TD 3.13.

REMARQUE 3.36. Ce théorème permettait de retrouver très rapidement la conclusion du cas 1 page 34 de l'exemple 3.29. On a en effet, pour $z \neq 0$,

$$z\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \sin(z),$$

qui tend vers zéro quand z tend vers zéro. Donc f présente une singularité illusoire en zéro.

◊

REMARQUE 3.37. En fait, pour le cas 2 du théorème 3.34, il est équivalent de dire qu'il existe des nombres complexes uniques a_{-1}, ..., a_{-m} avec $m \geq 1$ avec (3.23) tels que la fonction g définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} \tag{3.28}$$

ait une singularité illusoire en a.

REMARQUE 3.38. Dans le cas 3 du théorème 3.34, on peut montrer que f admet admet le développement dit de Laurent :

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}, \tag{3.29}$$

expression qui généralise (3.24).

REMARQUE 3.39. La fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = e^{(1/z)},$$

présente une singularité essentielle en zéro. En effet, sinon, on aurait un pôle et donc un entier m tel que

$$g(z) = z^m e^{(1/z)},$$

aurait une singularité illusoire en zéro. En particulier, on a aurait

$$\lim_{z \to 0} z^m e^{(1/z)} = 0,$$

ce qui est impossible en choisant $z = r \in \mathbb{R}_+^*$, puisque dans le cas réel, l'exponentielle l'emportant, on a

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r \in \mathbb{R}_+^*}} r^m e^{(1/r)} = +\infty.$$

◊

EXEMPLE 3.40. Voir de nouveau l'exemple 3.29.

DÉFINITION 3.41. Dans le cas 2 du théorème 3.34, le polynôme en $(z-a)^{-1}$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}. \tag{3.30}$$

est appelée la partie principale de f en a. Le coefficient a_{-1} de $1/(z-a)$ est appelé résidu de f en a et est noté

$$\text{Rés}(f, a) = a_{-1}. \tag{3.31}$$

REMARQUE 3.42. Si $m = 1$ (pôle simple), on a d'après l'égalité (3.23), $\text{Rés}(f, a) = a_{-1}$ non nul. En revanche, si $m \geq 2$, contrairement à ce qui passe pour a_{-m} nécessairement non nul, il est possible que a_{-1} soit nul !

Voir par exemple l'exercice de TD 3.14.

REMARQUE 3.43. Si la fonction f a une singularité illusoire en a, le résidu de f en a est nul. En effet, on peut écrire formellement, pour $z \neq a$

$$f(z) = \frac{0}{z-a} + f(z),$$

où f est holomorphe. C'est la situation par exemple de l'exercice de TD 3.12.

En revanche, la réciproque est fausse. On peut avoir un résidu nul en a, a étant un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2. Voir par exemple l'exercice de TD 3.14.

Nous verrons en section 3.4.3 page 41 comment calculer les résidus de façon pratique.

3.4.2. Formule des résidus

Donnons finalement le résultat principal, la formule des résidus, qui n'est autre qu'une conséquence du Théorème de Cauchy 3.25.

THÉORÈME 3.44 (Formule des résidus). *Soit Ω un ouvert*[8] *et α_1, ..., α_n des points distincts de Ω. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ et dont chaque point α_k est un pôle (d'ordre fini). Soit γ un chemin fermé ne passant pas par les points α_i. On a alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Rés(f, \alpha_k) Ind_\gamma(\alpha_k). \tag{3.32}$$

En particulier, si γ sépare le plan en deux régions, l'intérieur et l'extérieur (voir figure 3.3, où à l'extérieur,

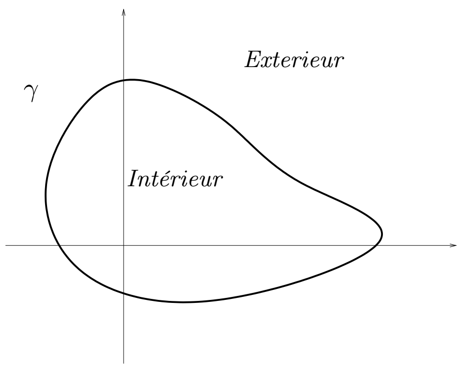


FIGURE 3.3. L'intérieur et l'extérieur de γ.

les indices sont nuls), on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k} Ind_\gamma(\alpha_k)\, Rés(f, \alpha_k), \tag{3.33}$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ. Si pour les pôles situés à l'intérieur de γ, on a[9] *$Ind_\gamma(\alpha_k) = 1$, il vient donc*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k} Rés(f, \alpha_k), \tag{3.34}$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ.

REMARQUE 3.45. Ce théorème reste encore vrai dans le cas de singularités essentielles (cas 3 du théorème 3.34 avec un developpement en série de Laurent donné par (3.29)). Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus` Le calcul des résidus dans ce cas est plus complexe !

8. qui doit être en principe convexe ou connexe.
9. ce qui est toujours le cas en pratique.

$\diamond$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.44. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note Q_k la partie principale de f en α_k (pôle d'ordre m_k) :

$$Q_k(z) = \sum_{l=1}^{m_k} a_{l,k}(z - \alpha_k)^{-l}. \tag{3.35}$$

Considérons la fonction g définie par

$$g = f - (Q_1 + ... + Q_n), \tag{3.36}$$

Par hypothèse, f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Chacune des fonctions Q_k est holomorphe sur $\Omega \setminus \{\alpha_k\}$. Ainsi, g est aussi holomorphe sur $\Omega\setminus\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Soit $k \in \{1, ..., n\}$ fixé. Par construction, α_k est une singularité illusoire de $f - Q_k$ (voir remarque 3.37). Pour $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{k\}$, Q_j est dérivable en α_j (car sa seule singularité est en α_k). Autrement dit α_k peut être considérée comme une singularité illusoire de $-Q_j$. Bref, par linéarité, α_k est une singularité illusoire de

$$f - Q_k - \sum_{j \in \{1,...,n\}\setminus\{k\}} Q_j = f - (Q_1 + ... + Q_n) = g.$$

Ainsi, la fonction g a une singularité illusoire en chaque point α_k. Puisque g est holomorphe sur $\Omega\setminus\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, elle se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω. Le Théorème de Cauchy 3.25 appliqué à g donne donc

$$\int_\gamma f(z) - (Q_1 + ... + Q_n)(z)dz = 0,$$

et donc, par linéarité $\int_\gamma (Q_1 + ... + Q_n)(z)dz$ existe avec

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (Q_1 + ... + Q_n)(z)dz. \tag{3.37}$$

Or, pour tout k, on a, d'après (3.35) :

$$\int_\gamma Q_k(z)dz = \int_\gamma \sum_{l=1}^{m_k} a_{l,k}(z - \alpha_k)^{-l}dz,$$

et donc, en isolant le premier terme :

$$\int_\gamma Q_k(z)dz = a_{-1} \int_\gamma (z - \alpha_k)^{-1}dz + \sum_{l=2}^{m_k} \int_\gamma a_{l,k}(z - \alpha_k)^{-l}dz. \tag{3.38}$$

- D'après l'exemple 3.20, chacune des fonctions continue $z \mapsto (z - \alpha_k)^{-l}$ pour $l \geq 2$, admet une primitive et d'après la proposition 3.22, chacune des intégrales $\int_\gamma a_{l,k}(z - \alpha_k)^{-l}dz$ pour $l \geq 2$ est nulle. Ainsi, la seconde somme de la somme (3.38) est nulle.
- En revanche, l'intégrale $\int_\gamma (z - \alpha_k)^{-1}dz$ est non nulle, puisque la fonction $z \mapsto (z - \alpha_k)^{-1}$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_k\}$ (Voir l'exemple 3.23). Plus précisément, par définition $a_{-1} = \text{Rés}(f, \alpha_k)$ et $\int_\gamma (z - \alpha_k)^{-1}dz = 2i\pi \text{Ind}_\gamma(\alpha_k)$. Ce terme est le seul terme non nul qui demeure après intégration [10].

On a donc, d'après (3.38)

$$\int_\gamma Q_k(z)dz = 2i\pi \text{Ind}_\gamma(\alpha_k)\, \text{Rés}(f, \alpha_k). \tag{3.39}$$

Bref, selon (3.37) et (3.39), on a bien

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \text{Ind}_\gamma(\alpha_k)\, \text{Rés}(f, \alpha_k).$$

dont on déduit (3.32) et (3.33). $\square$

10. ce qui lui vaut sûrement le qualificatif de résidu.

Exemple 3.46. Montrons comment obtenir très facilement une intégrale impropre grâce au théorème 3.44 et sans calculer aucune primitive.

On procède en plusieurs étapes

(1) On applique ce théorème à la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}. \tag{3.40}$$

Ω est choisi égal à $\mathbb{C}$ et le chemin γ est égal à Γ_R, donné sur la figure 3.4. L'unique pôle de la fonction f dans Ω est égal à $\alpha_1 = i$. Ainsi, la formule (3.34) fournit

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2i\pi \operatorname{Rés}(f, \alpha_1). \tag{3.41}$$

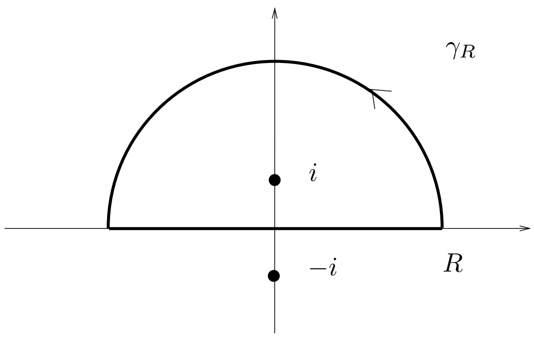


Figure 3.4. le chemin γ_R : réunion d'un segment et d'un demi-cercle.

On définit γ_R, le chemin fermé comme indiqué figure 3.4, R étant choisi assez grand, de telle sorte que $\pm i$ soient à l'intérieur de ce chemin.

Le chemin Γ_R est composé du segment $[-R, R]$ où $z = x$ et $x \in [-R, R]$ avec $dz = dx$ et du demi-cercle $\mathcal{C}$ paramétré par $z = Re^{i\theta}$ et $\theta \in [0, \pi]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz,\\ &= \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2} dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz,\end{aligned}$$

et par symétrie

$$= 2\int_0^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz.$$

On a donc

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2\int_0^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz. \tag{3.42}$$

(2) Sur $\mathbb{C}$, on a [11], d'après (2.32) : pour

$$z = R = e^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta, \tag{3.43}$$

on a

$$\left|e^{iz}\right| = e^{\operatorname{Re}(iz)} = e^{-R\sin\theta}$$

11. Ne pas appliquer cela brutalement comme dans $\mathbb{R}$!

et donc, puisque θ appartient à $[0, \pi]$,

$$\left|e^{iz}\right| \leq 1. \tag{3.44}$$

On a aussi, pour $R > 1$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|1 + z^2\right| \geq \left|z^2\right| - 1 \tag{3.45}$$

et donc

$$\left|1 + z^2\right| \geq= R^2 - 1$$

Bref, sur $\mathcal{C}$

$$\left|\frac{e^{iz}}{1 + z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}.$$

On applique le lemme 3.11 :

$$\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)dz\right| \leq (\pi R)\, \frac{1}{R^2 - 1},$$

et donc

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz = 0. \tag{3.46}$$

(3) Enfin, on obtient directement, en utilisant (3.41), (3.42) et (3.46), avec $R \to +\infty$:

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = 2i\pi \,\text{Rés}(f, \alpha_1),$$

ce qui permet de conclure en rajoutant le calcul de $\text{Rés}(f, \alpha_1) = \text{Rés}(f, i)$. Cela est traité dans l'exemple 3.50 page 43, où l'on montre que $\text{Rés}(f, i) = -\frac{i}{2e}$ et on obtient donc

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = -2i\pi \frac{i}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

et on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2e}. \tag{3.47}$$

Nous verrons comment obtenir ce résultat encore plus rapidement, grâce à la proposition 5.8 page 51. Voir l'exemple 5.9 page 51.

3.4.3. Calcul de résidus

Dans le cas d'un pôle simple (d'ordre $m = 1$), souvent présent, le résidu est facile à obtenir :

Lemme 3.47 (calcul d'un résidu pour un pôle simple). *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Supposons que f s'écrive $f = g/\phi$ où g est holomorphe sur un ouvert Ω, avec $g(\alpha) \neq 0$, et que ϕ est holomorphe au voisinage de a et admet en α un zéro d'ordre 1, ce qui peut se traduire*[12] *par*

$$\phi(\alpha) = 0, \quad \phi'(\alpha) \neq 0. \tag{3.48}$$

Alors, f admet un pôle simple en α et

$$\textit{Rés}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{\phi'(\alpha)}. \tag{3.49}$$

Démonstration. On raisonne comme au début de la démonstration du théorème 3.34 avec $m = 1$. On écrit, comme on a écrit pour G au début de la démonstration du théorème 3.34 grâce à l'holomorphie de ϕ, au voisinage de α

$$\phi(z) = \phi(\alpha) + \phi'(a)(z - \alpha) + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k (z - a)^k$$

12. voir la section G.1 de l'annexe G.

et donc, d'après (3.48)

$$\phi(z) = (z-\alpha)\left(\phi'(\alpha) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+1}(z-\alpha)^k\right) = (z-\alpha)F(z),$$

où $F(z) = \phi'(\alpha) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+1}(z-\alpha)^k$ avec donc $F(\alpha) = \phi'(\alpha) \neq 0$. Ainsi, par hypothèse

$$(z-\alpha)f(z) = (z-\alpha)\frac{g(z)}{\phi(z)} = \frac{g(z)}{F(z)}, \tag{3.50}$$

La fonction g/F est holomorphe au voisinage de a (puisque $(g/F)(\alpha) \neq 0$). Ainsi $(z-\alpha)f$ l'est aussi. On déduit aussi de (3.50) que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)F(z)},$$

avec $g(\alpha)/F(\alpha) \neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{z\to\alpha} |f(z)| = +\infty$$

et donc f ne peut être prolongée par continuité en α. D'après le théorème 3.33 (cas 2), α est bien un pôle d'ordre 1 de f. D'après le cas 2 du théorème 3.34, on a

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \mathcal{G}(z),$$

(avec $a_{-1} = \text{Rés}(f,\alpha)$) où $\mathcal{G}$ est holomorphe au voisinage de α. Bref, on a pour $z \neq \alpha$

$$f(z) = \frac{g(z)}{\phi(z)} = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \mathcal{G}(z).$$

Si, on multiple par $z-\alpha$, on obtient

$$\frac{g(z)}{\frac{\phi(z)}{z-\alpha}} = \frac{g(z)}{\frac{\phi(z)-\phi(\alpha)}{z-\alpha}} = (z-\alpha)\mathcal{G}(z) + a_{-1}.$$

Si on fait tendre z vers α, on obtient le résultat voulu puisque

$$\frac{g(z)}{\frac{\phi(z)-\phi(\alpha)}{z-\alpha}} \to \frac{g(\alpha)}{\phi'(\alpha)}.$$

□

Voir la remarque 3.51 page 48 de la version longue. ♠

Le lemme 3.52 page 48 de la version longue se généralise au cas d'un pôle multiple (d'ordre $m \geq 1$) ; en effet, il se généralise [13] de la façon suivante (voir aussi [Buc92, proposition 3.6.8 p. 116]) :

Lemme 3.48 (calcul d'un résidu pour un pôle d'ordre $m \geq 1$). *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Supposons que f s'écrive $f = g/\phi$ où g est holomorphe sur un ouvert Ω, avec $g(\alpha) \neq 0$, et que ϕ, holomorphe au voisinage de a, admet en α un zéro d'ordre m, entier supérieur à 1, ce qui peut se traduire par* [14]

$$\phi(\alpha) = 0, \quad \phi'(\alpha) = 0, \quad \phi''(\alpha) = 0, \quad \ldots, \quad \phi^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad \phi^{(m)}(\alpha) \neq 0. \tag{3.51}$$

Alors, f admet un pôle d'ordre m en α et le résidu de f en α se calcule avec l'une des deux formules

$$\textit{Rés}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-\alpha)^m f(z)\right)\right]_{z=\alpha}, \tag{3.52a}$$

$$\textit{Rés}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{g(z)}{F(z)}\right)\right]_{z=\alpha}, \tag{3.52b}$$

13. Cette formule m'a été suggérée en 2013 par l'étudiant Hazem Ben Aissia que je remercie vivement !

14. voir la section G.1 de l'annexe G.

où la fonction holomorphe F au voisinage de α est définie par

$$\phi(z) = (z-\alpha)^m F(z), \tag{3.53}$$

avec $F(\alpha) \neq 0$.

REMARQUE 3.49. La formule (3.52b) est à privilégier dans le cas de calcul à la main, tandis que la formule (3.52a) est utilisée plutôt dans un cadre informatique. Voir par exemple la fonction matlab `residu` disponible sur le web. Dans ce cas, la formule (3.52a) sera remplacée par

$$\text{Rés}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to\alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-\alpha)^m f(z)\right), \tag{3.54}$$

pour éviter que n'interviennent des valeurs indéterminées si, dans le résultat de la dérivée $m-1$-ième, les simplifications n'ont pas été faites.

Notons aussi que ces deux formules supposent connue la valeur de l'ordre m. En fait, l'équation (3.51) permet de déterminer automatiquement la valeur de m, par dérivation successive, ce qui est exploité par la fonction `residu`, qui, outre le résidu, calcul automatiquement l'ordre m.

On renvoie aussi aux deux exemples 3.50 et 3.51.

$\diamondsuit$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.48. On renvoie à la section G.2 de l'annexe G. $\square$

$\diamondsuit$

Traitons maintenant deux exemples de calcul de résidu, l'un d'ordre un et le second d'ordre deux.

EXEMPLE 3.50 (Détermination d'un résidu d'ordre un). Déterminons la valeur du résidu de f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \tag{3.55a}$$

en

$$\alpha = i. \tag{3.55b}$$

- On est dans la cas du lemme 3.47 puisque $f = g/\phi$ où $g(z) = e^{iz}$ est holomorphe, $\phi(z) = z^2+1$, dont $\alpha = i$ est un zéro d'ordre un. On a donc, d'après (3.49)

$$\text{Rés}(f,\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\phi'(\alpha)} = \left[\frac{e^{iz}}{2z}\right]_{z=i} = \frac{e^{i^2}}{2i} = -\frac{i}{2e},$$

  et bref

$$\text{Rés}(f,\alpha) = -\frac{i}{2e}. \tag{3.56}$$

- Si on utilise la fonction `residu.m` et que l'on tape

```
[res,m]=residu('exp(i*z)','(1+z^2)',i)
```

  on obtient bien $\text{Rés}(f,\alpha) = -1/2\, ie^{-1}$ avec un ordre $m = 1$.

EXEMPLE 3.51 (Détermination d'un résidu d'ordre deux). Déterminons la valeur du résidu de f définie par

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \tag{3.57a}$$

en

$$\alpha = i. \tag{3.57b}$$

Remarquons que $z^2+1 = (z-i)(z+1)$ et donc que

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{(z-i)^2} \tag{3.58}$$

Le pôle i est donc d'ordre deux.

(1) On renvoie, pour la première méthode, au point 1 page 50 de la version longue. ♠

(2) La seconde méthode, plus rapide (c'est celle que l'on utilisera systématiquement), consiste à utiliser la formule (3.52b). D'après (3.58), on a donc avec $m = 2$:

$$\begin{aligned}
\text{Rés}(f, \alpha) &= \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{g(z)}{F(z)}\right)\right]_{z=\alpha}, \\
&= \left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'_{z=i}, \\
&= \left[\left((z+i)^{-2}\right)'\right]_{z=i}, \\
&= -2\left((z+i)^{-3}\right)'_{z=i}, \\
&= -\frac{2}{(2i)^3}, \\
&= -\frac{i}{4},
\end{aligned}$$

et l'on obtient

$$\text{Rés}(f, \alpha) = -\frac{i}{4}. \tag{3.59}$$

(3) Si on utilise la fonction `residu.m` et que l'on tape

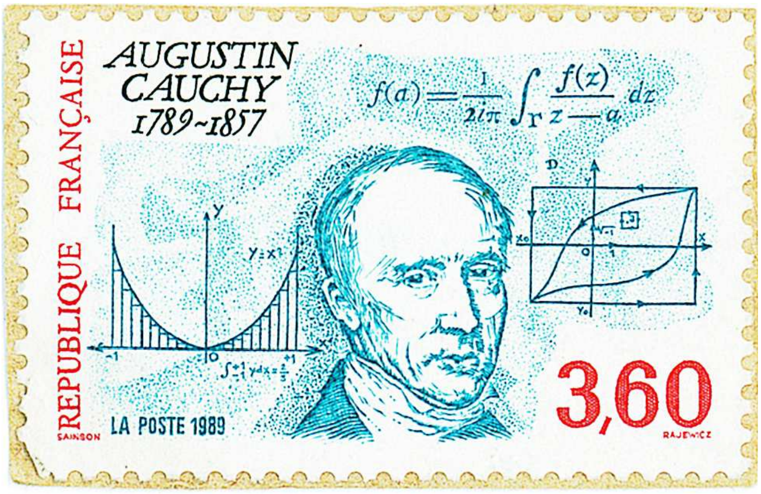
```
[res,m]=residu('1','(1+z^2)^2',i)
```

on obtient bien $\text{Rés}(f, \alpha) = -1/4\, i$ avec un ordre $m = 2$.

3.5. Applications aux calculs d'intégrales

On renvoie à [Pab95, chap. 10].
On renvoie pour plus d'exemples à la section 5.1.1 page 47.

3.6. Hommages à Cauchy et à la formule de Cauchy



Quelle est le nom de la formule ? Quelles sont les hypothèses nécessaires ?

Chapitre 4

Transformations conformes

Ce chapitre, désormais non traité, est présenté dans l'annexe M.

Chapitre 5

Applications de l'analyse complexe

5.1. Calculs d'intégrales et de séries

5.1.1. Calculs d'intégrales

Outre les techniques usuelles d'intégration par partie et de changement de variables, le théorème des résidus ouvre de très nombreuses portes pour le calcul d'intégrales usuelles.

On renvoie à

— [Pab95, chap. 10].

— `http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus`

On prendra garde au fait que la définition des intégrales des troisièmes et quatrième type n'est pas tout à fait la même dans ces deux références !

On admettra que les différentes intégrales existent (on pourra le montrer sur les exemples traités) !

L'utilisation du théorème des résidus permet d'éviter les fastidieuses décompositions en éléments simples déjà utilisées pour calculer des intégrales indéfinies, voire de traiter des cas que l'on ne peut traiter autrement !

5.1.1.1. Calculs d'intégrales du premier type.

Proposition 5.1 (Intégrales du premier type). *Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $X^2+Y^2=1$. On considère $R(X,Y)=P(X,Y)/Q(X,Y)$ une fraction rationnelle en X et Y telle que*

$$\forall (X,Y)\in\mathcal{C},\quad Q(X,Y)\neq 0. \tag{5.1}$$

Soit f la fonction définie par

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right). \tag{5.2}$$

L'intégrale I définie par

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt, \tag{5.3}$$

est égale à

$$I=2i\pi\sum_k \textit{Rés}(f,\alpha_k), \tag{5.4}$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$, c'est-à-dire de module strictement inférieur à 1.

Démonstration. On considère le couple $(\cos t,\sin t)$ comme une représentation du cercle unité $\mathcal{C}$. On pose

$$z=\gamma(t), \tag{5.5}$$

où

$$\gamma(t)=e^{it} \text{ pour } t\in[0,2\pi[. \tag{5.6}$$

On a donc, puisque $|z|^2=z\overline{z}=1$,

$$\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\overline{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$
$$\sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\overline{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

ainsi que

$$dz = ie^{it}dt$$

qui fournit

$$dt = \frac{dz}{iz}.$$

On a

$$\int_{\mathcal{C}} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} R\left(\cos t, \sin t\right) dt$$

et donc

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} R\left(\cos t, \sin t\right) dt. \tag{5.7}$$

On considère donc la fonction f définie par (5.2) D'après (5.1), f n'a pas de pôles sur $\mathcal{C}$. En effet, on a par définition de f :

$$f(z) = \frac{1}{iz}\frac{P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}.$$

Les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto 1/z$ sont holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Par composition, $z \mapsto P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. $z \mapsto Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et ne peut s'annuler sur $\mathcal{C}$. Sinon, cela contredirait l'hypothèse (5.1). Ainsi, f est holomorphe sauf en ses pôles, en nombre finis et aucun d'eux n'est sur $\mathcal{C}$. La fonction $t \mapsto R\left(\cos t, \sin t\right)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ car elle vaut

$$R\left(\cos t, \sin t\right) = \frac{P\left(\cos t, \sin t\right)}{Q\left(\cos t, \sin t\right)}. \tag{5.8}$$

et d'après (5.1), $Q\left(\cos t, \sin t\right)$ est strictement non nul sur $\mathcal{C}$. Ainsi cette fonction est bien intégrable sur $[0, 2\pi]$. Le théorème des résidus et (5.7) fournissent enfin le résultat. □

◇

REMARQUE 5.2. En fait, le fait que f n'a pas de pôles sur $\mathcal{C}$ est équivalent à (5.1). Donc, l'hypothèse (5.1) peut se vérifier *a posteriori* en vérifiant que :

$$\text{aucun pôle de } f \text{ n'est de module 1.} \tag{5.9}$$

EXEMPLE 5.3 (Exemple du premier type).

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4\cos t} = \frac{2\pi}{3}$$

DÉMONSTRATION. On a ici

$$R(X,Y) = \frac{1}{-4X+5}.$$

Vérifions que (5.1) a lieu. Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + Y^2 = 1$. Si $-4X + 5 = 0$, alors $X = 5/4$, ce qui n'est pas possible car $|X| \leq 1$. On peut donc appliquer la proposition 5.1. On considère donc

$$f(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{-4\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)+5}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-i}{z}\frac{1}{-2\left(z+\frac{1}{z}\right)+5}, \\ &= \frac{-i}{-2z^2 - 2 + 5z}, \\ &= \frac{i}{2z^2 - 5z + 2}, \end{aligned}$$

et donc

$$f(z) = \frac{i}{(z-2)(2z-1)}.$$

f a donc deux pôles simples qui sont 2 et 1/2. D'après la remarque 5.2 et (5.9), on peut donc vérifier (5.1) aussi *a posteriori*. Le seul pôle de f situé à l'intérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$ est donc 1/2 et on a, d'après (3.49),

$$\text{Rés}(f, 1/2) = \frac{i}{[((z-2)(2z-1))']_{z=1/2}} = \frac{i}{[(2z-1)+2(z-2)]_{z=1/2}} = \frac{i}{2(1/2-2)} = -\frac{i}{3},$$

et donc

$$I = \frac{2\pi}{3}.$$

□

Voir l'exemple 5.4 page 56 de la version longue. ♠

Voir l'exemple 5.5 page 56 de la version longue. ♠

5.1.1.2. Calculs d'intégrales du second type.

Voir le lemme 5.6 page 57 de la version longue. ♠

Voir le lemme 5.7 page 58 de la version longue. ♠

Le cas particulier du lemme 5.7 de la version longue, en prenant $z_0 = 0$, $R_0 = +\infty$, nous permet de donner le :

Lemme 5.4 (Lemme de Jordan (forme usuelle)). *Soit f continue sur $\mathbb{C}$. Soit γ_R le chemin défini comme le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R (partie située au-dessus de l'axe des x). Si $|zf(z)|$ tend vers zéro, quand R tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à l'argument de z, alors $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.*

Proposition 5.5 (Intégrales du second type). *Soit $\mathcal{R}$ une fraction rationnelle sans pôle réel. On suppose que*

$$\lim_{|z|\to+\infty} |z\mathcal{R}(z)| = 0, \tag{5.10}$$

ce qui sera vrai si

$$\mathcal{R} = \frac{A}{B}, \tag{5.11a}$$

avec A et B polynomiales telles que

$$deg(B) \geq deg(A) + 2. \tag{5.11b}$$

L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)dx, \tag{5.12}$$

existe[1] *et est égale à*

$$I = 2i\pi \sum_k Rés(\mathcal{R}, \alpha_k), \tag{5.13}$$

où la somme est étendue aux pôles de $\mathcal{R}$ situés au-dessus de l'axe des x.

Démonstration. On laisse au lecteur le soin de vérifier que (5.11) implique (5.10) (voir remarque 5.10 de la version longue).

On considère le chemin γ_R, défini comme la réunion du demi-cercle de centre l'origine de rayon R, noté $\widetilde{\gamma}_R$, et du segment $[-R, R]$ (voir figure 5.1), R étant choisi assez grand, pour que tous les pôles de $\mathcal{R}$, situés au-dessus de l'axe des x, soient à l'intérieur de γ_R. On pose

$$I(R) = \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z)dz.$$

D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z)dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

1. C'est en fait la limite donnée par (5.14c) qui existe.

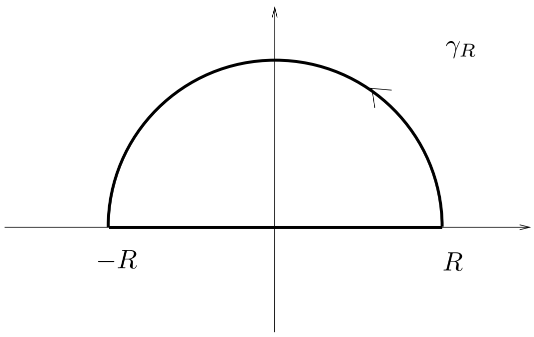


FIGURE 5.1. le chemin γ_R : réunion d'un segment et d'un demi-cercle.

où la somme est étendue aux pôles de $\mathcal{R}$ situés à l'intérieur de γ, et donc au-dessus de l'axe de x. On en déduit [2] donc

$$\int_{\widetilde{\gamma}_R} \mathcal{R}(z)dz + \int_{-R}^{R} \mathcal{R}(x)dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k). \tag{5.14a}$$

L'hypothèse (5.10) et le lemme 5.4 impliquent que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\widetilde{\gamma}_R} \mathcal{R}(z)dz = 0, \tag{5.14b}$$

et donc à la limite $R \to +\infty$ dans (5.14a), on constate que

$$I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{R}(x)dx, \tag{5.14c}$$

existe et vérifie

$$I = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k), \tag{5.14d}$$

où la somme est étendue aux pôles de $\mathcal{R}$ situés au-dessus de l'axe des x. □

♢
Voir la remarque 5.10 page 60 de la version longue. ♠

EXEMPLE 5.6 (Exemple du second type). Montrons que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2},$$

dont on déduit par parité que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

DÉMONSTRATION. On considère $\mathcal{R}$ définie par

$$\mathcal{R} = \frac{1}{(z^2+1)^2},$$

qui vérifie (5.10) et dont les pôles sont $\pm i$. D'après la proposition 5.5, on a donc

$$I = 2i\pi \,\text{Rés}(\mathcal{R}, i).$$

2. Notons que les deux intégrales intervenant dans (5.14a) sont définies. En effet, d'une part, l'hypothèse de l'absence de pôles réels de $\mathcal{R}$ implique que la fraction $\mathcal{R}$ a un dénominateur strictement positif sur $\mathbb{R}$; elle y est donc continue. Ainsi, pour tout $R \geq 0$, l'intégrale $\int_{-R}^{R} \mathcal{R}(x)dx$ existe. D'autre part, d'après le choix de R, $\mathcal{R}$ est dérivable en tout point de $\widetilde{\gamma}_R$ et ainsi, l'intégrale $\int_{\widetilde{\gamma}_R} \mathcal{R}(z)dz$ est définie.

Ce résidu (d'ordre deux) a déjà été calculé dans l'exemple 3.51. On a donc

$$I = 2i\pi\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

□

REMARQUE 5.7. L'aspect rationnel de la fraction $\mathcal{R}$ n'intervient pas explicitement dans la preuve (mis à part l'implication de (5.10) par (5.11)) et la proposition 5.5 peut se généraliser de la façon suivante :

PROPOSITION 5.8 (Intégrales du second type (général)). *Soit $\mathcal{R}$ une fonction holomophe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de pôles, supposés non réels. On suppose que*

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ \operatorname{Im}(z)\geq 0}} |z\mathcal{R}(z)| = 0. \tag{5.15}$$

La limite donnée par (5.14c) *existe et est égale à*

$$I = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k), \tag{5.16}$$

où la somme est étendue aux pôles de $\mathcal{R}$ situés au-dessus de l'axe des x.

DÉMONSTRATION. La preuve en est laissée au lecteur qui vérifiera qu'elle repose sur (5.14), encore valable.

□

EXEMPLE 5.9 (Exemple du second type). Reprenons l'exemple 3.46 page 40 très rapidement grâce à la proposition 5.8 appliquée à la fonction f. On considère de nouveau f définie par (3.40). On est au-dessus de l'axe des x. On pose z défini par (3.43) avec $\theta \in [0,\pi]$. Comme dans les inéquations (3.44) et (3.45), on a (pour $|z| = R \geq 1$) :

$$\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|z^2|-1}.$$

dont on déduit

$$|zf(z)| \leq \frac{|z|}{|z^2|-1}.$$

et donc (5.15). Ainsi, la limite donnée par (5.14c) existe et est égale à I, défini par (5.16). Comme vu dans l'exemple 3.46 page 40, le seul pôle de f au-dessus de l'axe x est i. Par parité, comme précédemment, et compte tenu de (3.56) on obtient donc de nouveau (3.47).

◇

5.1.1.3. *Autres exemples : les intégrales de Dirichlet et de Fresnel.*

EXEMPLE 5.10. Deux intégrales célèbres et utile en physique sont d'une part l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

et d'autre part, les intégrales de Fresnel données par

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Le calcul de l'intégrale de Dirichlet est proposé en annexe J et celui des intégrales de Fresnel en annexe K.

5.1.1.4. *Autre exemple.*

EXEMPLE 5.11. On peut aussi déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{a^2+t^2}dt,$$

pour tout $(a,b) \in {\mathbb{R}_+}^2$. Le calcul de cette intégrale de Dirichlet est proposé en annexe L.

5.1.1.5. *Encore d'autres exemples.*

Voir les annexes H et I. ◇

Voir la section 5.1.2 page 61 de la version longue. ♠

5.2. Applications à la mécanique des fluides et transformations conformes

5.2.1. Calculs analytiques d'écoulements potentiels irrotationnels plans pour des fluides parfaits incompressibles

5.2.1.1. Théorie et rappels de mécanique des fluides.

Pour plus de détail, on pourra consulter [Gué+04, p. 80 à 90, fascicule 5], [Duv90, p.214 à 225] et [GS86], ainsi que [AF03]. On pourra aussi consulter [Bas18b, chapitre 9] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/coursL2biomeca.pdf`.

Les fluides fluides parfaits incompressibles étudiés lors d'écoulements potentiels plans ne représentent pas tout à fait le comportement réel de fluides, mais cette étude est intéressante, notamment car

— loin des parois, la viscosité diminue et l'approximation par des fluides parfaits est une hypothèse légitime ;

— on pourra obtenir facilement un grand nombre d'écoulement grâce notamment à matlab (voir section 5.2.1.2 et exercice de TP 1.6).

On s'intéresse à l'écoulement potentiels irrotationnels plan d'un fluide parfait incompressible. On suppose être dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Le champ des vitesses ne dépend que de x et de y est noté

$$V=\begin{pmatrix} u(x,y)\\ v(x,y)\\ 0\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

On supposera u et v continues

Nous rappelons juste ici la propriété fondamentale suivante (voir par exemple [Bas11b, proposition 2.38 p. 28 et preuve constructive dans l'Annexe A, notamment p. 94] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf`) :

Proposition 5.12. *Si ϕ est un champ scalaire, alors*

$$\nabla\wedge(\nabla\phi)=0 \tag{5.18}$$

Réciproquement, si V est un champ vectoriel, tel que

$$\nabla\wedge V=0, \tag{5.19}$$

alors, il existe un champ scalaire ϕ défini à une constante près telle que

$$V=\nabla\phi. \tag{5.20}$$

La fonction ϕ est appelée potentiel (scalaire).

Dans le cas étudié, V est un champ vectoriel dont la troisième composante et nulle et qui dépend uniquement de x et de y, on a donc $V=(u(x,y),v(x,y),0)$. Ainsi

$$\nabla\wedge V=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}$$

et la proposition 5.12 s'écrit ici

Proposition 5.13. *Soient u et v deux champs scalaire ne dépendant que de x et de y. Alors,*

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5.21}$$

si et seulement si, il existe une fonction ϕ dépendant de x et de y telle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \tag{5.22a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v. \tag{5.22b}$$

DÉFINITION 5.14. La fonction ϕ est appelée potentiel des vitesses.

REMARQUE 5.15. Comme dans la proposition 2.23 p. 21 ou l'exemple 2.30 p. 26 de [Bas11b], la vitesse est l'analogue d'un gradient et est perpendiculaire aux équipotentielles. Elle va des régions des plus « froides » vers les plus « chaudes », comme l'illustreront les figures de la section 5.2.1.2.

Le fluide étant incompressible, on a aussi

$$\nabla . \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.23}$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{5.24}$$

Si on remplace u par $-v$ et v par u, de façon analogue à la proposition 5.13, on a

PROPOSITION 5.16. *Soient u et v deux champs scalaire ne dépendant que de x et de y. Alors,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5.25}$$

si et seulement si, il existe une fonction ψ dépendant de x et de y telle que

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{5.26a}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{5.26b}$$

DÉFINITION 5.17. La fonction ψ est appelée fonction de courant.

DÉFINITION 5.18. Rappelons que les courbes d'équations ϕ =constante sont les équipotentielles de la fonction ϕ.

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 5.19. *Les lignes de courant sont les courbes d'équations ψ =constante, perpendiculaires aux équipotentielles de la fonction ϕ, d'équations ϕ =constante.*

DÉMONSTRATION.
Voir la preuve page 66 de la version longue. ♠

□

◊

Notons finalement (5.22) et (5.26) sous la forme

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{5.27a}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5.27b}$$

Les fonctions ϕ et ψ sont de classe C^1 puisque u et v sont continues.

Faisons maintenant le lien avec les fonctions holomorphes ! On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = f(x,y) = \phi(x,y) + i\psi(x,y), \tag{5.28}$$

noté en abrégé :

$$f = \phi + i\psi. \tag{5.29}$$

DÉFINITION 5.20. f est appelée potentiel complexe.

Les fonctions ϕ et ψ sont différentiables et donc f est $\mathbb{R}^2$-différentiable. Les conditions de Cauchy-Riemann sur $f = \phi + i\psi$ (1.23) s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

qui sont donc exactement (5.27). Ainsi, d'après la Proposition 1.13, f est dérivable en (x, y) et donc f est holomorphe sur U. D'après (1.18), on a donc, d'après (5.29) :

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

et donc, d'après (1.23a)

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ &= u - iv. \end{aligned}$$

On a donc

$$f' = u - iv. \tag{5.30}$$

Réciproquement, on se donne f holomorphe sur $\mathbb{C}$. On peut poser

$$\begin{aligned} \phi &= \mathrm{Re}(f), \\ \psi &= \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

puis

$$V = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.31a}$$

$$u = \mathrm{Re}\, f', \tag{5.31b}$$

$$v = -\,\mathrm{Im}\, f'. \tag{5.31c}$$

On montre alors que le champ des vitesses est irrotationnel et incompressible, d'après les conditions de Cauchy-Riemann sur f. $\diamondsuit$

Si f est injective et U est un ouvert, f est donc une application holomorphe sur U et d'après le théorème M.3, f est une transformation conforme. De plus, le corollaire M.4 nous dit que les courbes d'équation ϕ =constante et ψ =constante sont localement perpendiculaires, ce qui nous permet de retrouver la propriété 5.19.

Bref,

PROPOSITION 5.21. *On se donne un écoulement plan irrotationnel incompressible. Dans un ouvert U simplement connexe*[3]*, avec d'éventuelles parois (où la vitesse est tangentielle), il suffit d'exhiber la fonction holomorphe f (éventuellement compatible avec les conditions aux limites imposées par les parois*[4]*) pour tracer les équipotentielles définies par* $\phi = \mathrm{Re}(f)$ *=constantes et les lignes de courant définies par* $\psi = \mathrm{Im}(f)$ *=constantes.*

REMARQUE 5.22. En résumé, f est holomorphe ssi l'écoulement est irrotationnel et incompressible. Alors, en notant (u, v) le champ de vitesse et ϕ et ψ, les deux potentiels, le lien entre f et ϕ et ψ est donné par (5.29). Le lien entre f' et u et v est donné par (5.30).

REMARQUE 5.23.

(1) On peut par linéarité des équations, faire des combinaisons linéaires de potentiels complexes.

(2) f étant analytique, on peut dériver un potentiel complexe pour en définir un autre.

(3) Si on multiplie $f = \phi + i\psi$ par i, on remplace donc f par $f = -\psi + i\phi$, qui reste holomorphe. On obtient un écoulement où les lignes de courant et les équipotentielles sont permutés.

On a donc de nombreux moyens de générer des potentiels complexes !

REMARQUE 5.24.

On peut faire une analogie entre les courbes de niveau de la fonction ϕ et les courbes d'altitude constante, utilisées en topographie. Voir annexe N.

5.2.1.2. Simulations numériques.

Les différents potentiels donnés en cours sont les suivants (certains seront étudiés en TD, voir exercices TD 5.5 et 5.4) et la plupart seront tracés en TP (voir exercice de TP 1.6) :

$$f(z) = e^{-i\alpha} U z, \text{ pour } U, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{5.32a}$$
$$f(z) = \mathrm{Ln}(z), \tag{5.32b}$$
$$f(z) = i\,\mathrm{Ln}(z), \tag{5.32c}$$
$$f(z) = 1/z, \tag{5.32d}$$
$$f(z) = Uz + K/z, \text{ pour } U, K \in \mathbb{R}, \tag{5.32e}$$
$$f(z) = Uz + \mathrm{Ln}(z), \text{ pour } U \in \mathbb{R}, \tag{5.32f}$$
$$f(z) = k\,\mathrm{Ln}(z+a) - k\,\mathrm{Ln}(z-a), \text{ pour } k, a \in \mathbb{R}_+^*, \tag{5.32g}$$
$$f(z) = kz^n, \text{ pour } k, n \in \mathbb{R}_+^*. \tag{5.32h}$$

Seules sont présentées ici quelques figures (que vous ferez lors de l'exercice 1.6 du TP) : sur ces figures, ont été représentées, pour différents potentiels complexes, les lignes de courant (en noir), les équipotentielles en pointillés, ainsi que le potentiel, par un dégradé de couleurs.

— La figure 5.2 correspond à un potentiel défini par (5.32a), qui correspond à un écoulement rectiligne uniforme.
— La figure 5.4 correspond à un potentiel défini par (5.32b), qui correspond à un écoulement de source ponctuelle centrée à l'origine.
— La figure 5.5 correspond à un potentiel défini par (5.32f), qui correspond à la superposition des deux écoulements précédents (5.32a) et (5.32b).
— La figure 5.6 correspond à un potentiel défini par (5.32h), sur laquelle on représenté un obstacle.

3. Voir note de bas de page 1 page 246.

4. Notons que la parois correspond en fait à une ligne de courant particulière, puisque sur une parois, la vitesse est tangentielle à celle-ci.

(1) Écoulement rectiligne uniforme

Si $u = U$ =constante et $v = 0$, l'équation (5.27) donne

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U,$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

et donc $\phi = \phi(x)$, $\psi = \psi(y)$ et $\phi'(x) = U$ et $\psi'(y) = U$. Ainsi (à une constante près),

$$\phi = Ux, \tag{5.33a}$$
$$\psi = Uy, \tag{5.33b}$$
$$f = \phi + i\psi = U(x + iy) = Uz. \tag{5.33c}$$

Un nouvel écoulement est obtenu en remplaçant f par $e^{-i\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On obtient donc (5.32a). On a alors

$$\begin{aligned}\phi &= \mathrm{Re}(f),\\ &= \mathrm{Re}(e^{-i\alpha}Uz),\\ &= U\,\mathrm{Re}((\cos\alpha - i\sin\alpha)(x + iy)),\\ &= U(x\cos\alpha + y\sin\alpha),\end{aligned}$$

On fait de même pour ψ et on obtient finalement

$$\phi = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha),$$
$$\psi = U(y\cos\alpha - x\sin\alpha).$$

Les lignes de courant sont données par $\psi = U(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$ =constantes, soit $y = x\tan\alpha$+constante. Ce sont donc des droites faisant un angle α avec l'axe des x.

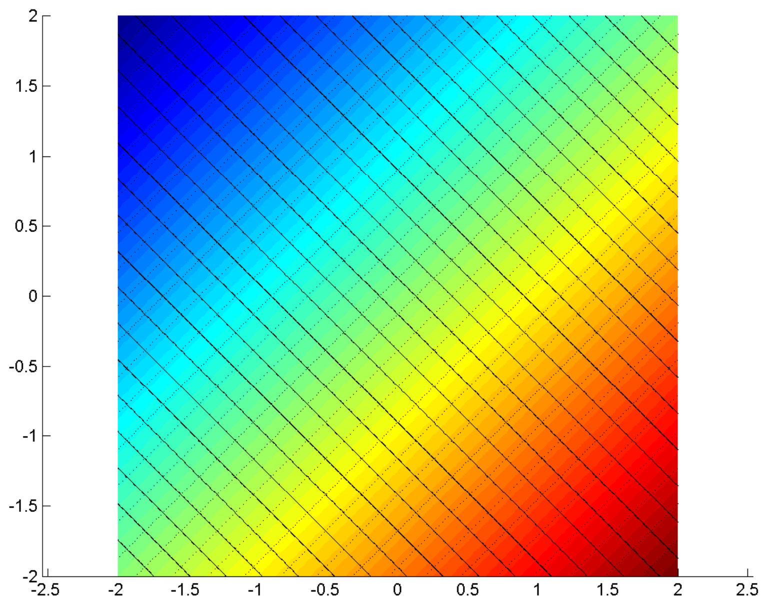


FIGURE 5.2. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.32a).

Voir la figure 5.2.

(2) Écoulement de source

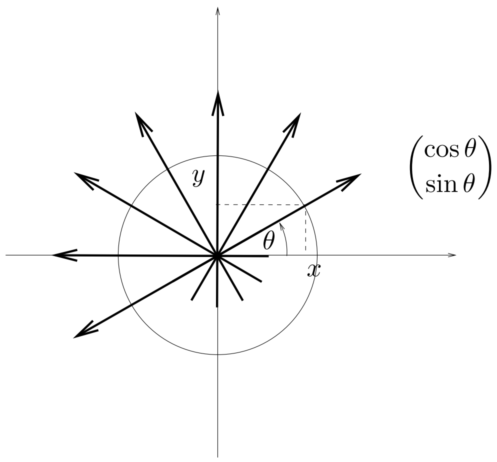


FIGURE 5.3. Écoulement de source.

On sait que les lignes de courant sont des droites issues de l'origine et donc données par (u, v) colinéaire à $(\cos\theta, sin\theta) = (x, y)/r$. On suppose que, par invariance du problème par rotation autour de l'origine, ce champ de vitesse ne dépend pas de θ. Ainsi, il existe une fonction A qui ne dépend que de r et telle que, pour r non nul,

$$u(x, y) = A(r)\frac{x}{r},$$
$$v(x, y) = A(r)\frac{y}{r}.$$

En notant D le débit constant à travers tout cercle de centre l'origine, on montre que $A(r) = D/(2\pi r)$. On a donc

$$u(x, y) = \frac{Dx}{2\pi r^2}, \tag{5.34a}$$
$$v(x, y) = \frac{Dy}{2\pi r^2}. \tag{5.34b}$$

On cherche alors f donnée par (5.30) ;

$$f'(z) = u - iv = \frac{D}{2\pi r^2}(x - iy).$$

Puisque

$$\frac{x - iy}{r^2} = \frac{\overline{z}}{r^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z},$$

il vient

$$f'(z) = \frac{D}{2\pi z}. \tag{5.35}$$

Si on utilise le point 1 de la proposition 2.36, on en déduit

$$f'(z) = \frac{D}{2\pi}\mathrm{Ln}(z)' \tag{5.36}$$

Grâce à la proposition 1.20, on a alors, à une constante additive près,

$$f(z) = \frac{D}{2\pi}\mathrm{Ln}(z), \tag{5.37}$$

et on retrouve à une constante multiplicative près (5.32b). Puisque $f = \phi + i\psi$ et $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z$, il vient

$$\phi = \frac{D}{2\pi}\ln|z|,$$
$$\psi = \frac{D}{2\pi}\arg(z).$$

On retrouve le fait que les équipotentielles, définies par ϕ =constantes, c'est-à-dire ici, $\ln|z| = \ln r$=constantes, sont des cercles centrés à l'origine. De même, les lignes de courant, définies par ψ =constantes, c'est-à-dire ici, $\arg(z)$=constantes, sont des demi-droites passant par l'origine.

Remarque 5.25. Attention, si on utilise la fonction Ln, définie sur le plan fendu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on constate une chose curieuse : l'écoulement source est, *a priori*, défini sur $\mathbb{R}^2$ et est invariant par rotation autour de l'origine. L'introduction du plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ rompt cette symétrie !

De plus, il sera nécessaire lors de la visualisation de ce potentiel, d'ôter le demi axe $\mathbb{R}_-$. Numériquement, on enlèvera une « petite bande » autour de $\mathbb{R}_-$ ainsi qu'un « petit cercle » autour de l'origine.

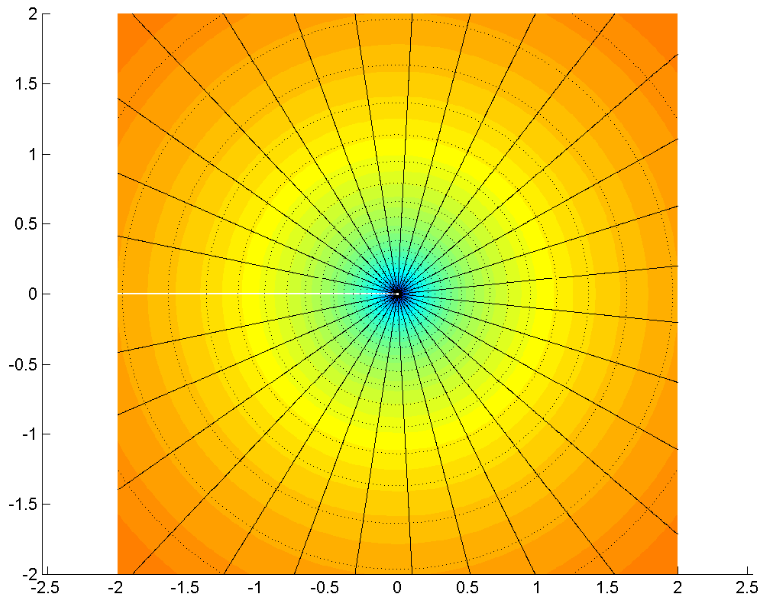


Figure 5.4. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.32b).

Voir la figure 5.4.

(3) Tourbillon ponctuel

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.219].

On multiplie le potentiel défini par (5.37) par i : On a alors, à une constante additive près,

$$f(z) = \frac{Di}{2\pi}\operatorname{Ln}(z), \tag{5.38}$$

et on retrouve à une constante multiplicative près (5.32c). Conformément à la remarque 5.23, on obtient un écoulement où les lignes de courant et les équipotentielles sont permutés, c'est-à-dire des équipotentielles qui sont des demi-droites passant par l'origine et des lignes de courant qui sont des cercles centrés à l'origine.

Il faudra aussi prendre la précaution de la remarque 5.25.

(4) Doublet

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.220].

On dérive le potentiel défini par (5.37) :

$$f(z) = \frac{D}{2\pi z}, \tag{5.39}$$

et on retrouve à une constante multiplicative près (5.32d). Conformément à la remarque 5.23, on obtient encore un potentiel complexe.

(5) Superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet : écoulement autour d'un cylindre.

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.220].

On fait une combinaison linéaire de l'écoulement (5.32a) (avec $\alpha = 0$) et de (5.32d). On obtient (5.32e). Conformément à la remarque 5.23, on obtient encore un potentiel complexe.

(6) Autres

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.220] et [Gué+04, p. 80 et 89].

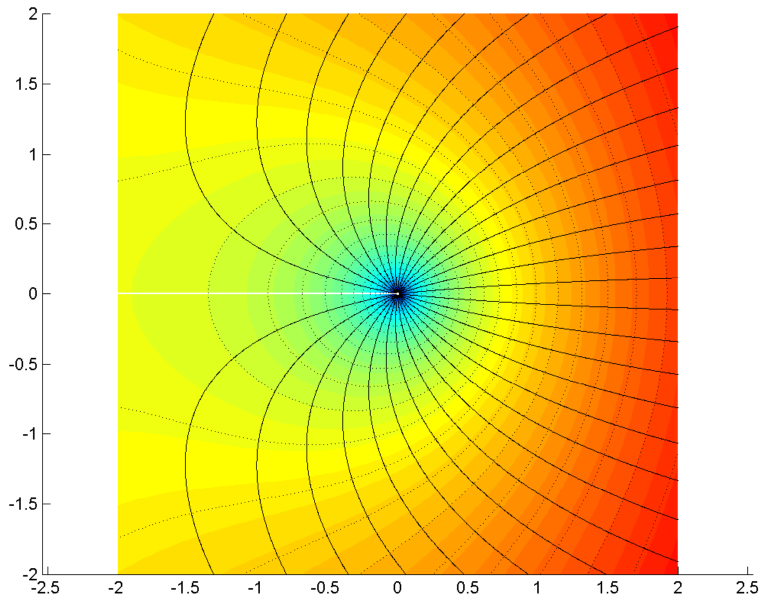


FIGURE 5.5. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.32f).

Voir les potentiels définis par (5.32f) (voir figure 5.5) (5.32g) et (5.32h) (voir figure 5.6 page suivante).

Voir aussi la figure 5.7 qui correspond à l'écoulement où une barrière est présente. Cet écoulement est traité dans l'exerice de TD facultatif 5.18.

Voir la section 5.2.1.3 page 72 de la version longue. ♠

Voir la section 5.2.2 page 76 de la version longue. ♠

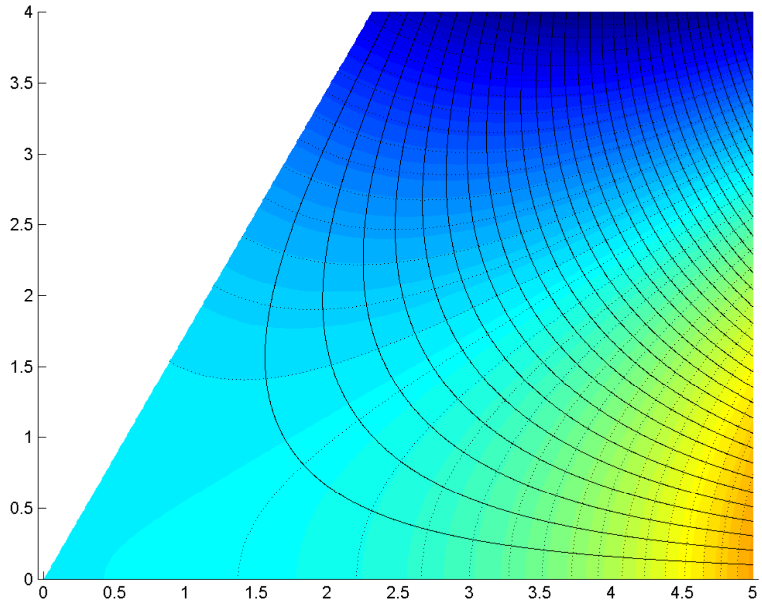


FIGURE 5.6. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.32h) avec $n = 3$.

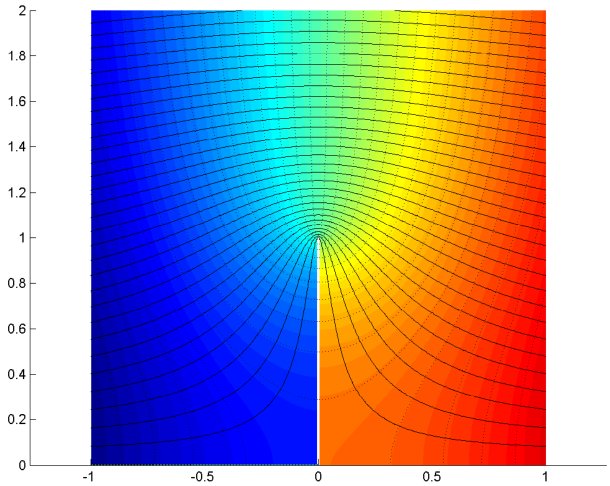


FIGURE 5.7. Un écoulement.

Deuxième partie

Distributions

Chapitre 6

Introduction aux distributions

On pourra consulter [Kib01, chap. 5] (à l'usage des physiciens, il montre la façon dont les physiciens et les mathématiciens considèrent avec deux regards différents, mais complémentaires, la même notion), une bonne introduction aux distributions [LT09, chap. 4 et 5], [GW03, chap.VIII] ou [Pet98, chap. I et II] ou enfin `http://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathématiques)`

On pourra aussi consulter les rappels donnés dans les annexes P, Q et R.

6.1. Introduction

Les références précédemment citées ne montrent peut-être pas assez l'histoire de la théorie des distributions, qui demeure une très belle illustration de l'interaction constructive entre mécaniciens (ou physiciens de façon plus générale), mathématiciens et informaticiens, notamment lors de la seconde moitié du siècle dernier.

Sur `http://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-des-distributions/`, on peut lire le texte suivant :

"Professeur à l'université de Nancy, Laurent Schwartz (1915-2002) fonde la théorie mathématique des distributions dans un article intitulé “Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques” [Sch45]. Il donne une interprétation unifiée des nombreuses fonctions généralisées introduites auparavant par des mathématiciens ou des physiciens, comme le pic de Dirac ou la « marche d'escalier » de Heaviside. L'idée fondamentale est de considérer les fonctionnelles linéaires définies sur l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact. L'analyse fonctionnelle et la notion de dualité permettent alors de décrire ces objets de façon rigoureuse et systématique.[...] Schwartz reçut la médaille Fields en 1950 pour ce travail."

Selon la légende, l'idée de ce papier aurait été écrite en une nuit, ce qui n'empêche probablement pas les longues heures de gestation intellectuelle ! Cet article a été à l'origine de cette théorie des distributions, qui a été une très importante innovation ! Sur le plan théorique d'une part, mais aussi sur les nombreux domaines de la physique dont les équations sont écrites « au sens des distributions », mais aussi sur la plan informatique, puisque que de très nombreux codes ont besoin du cadre mathématiques rigoureux qui garantit la bonne écriture des algorithmes utilisés et la convergence des schémas numériques associés.

6.2. Pourquoi les distributions ?

On pourra consulter les introductions [BC93, p. 133 à 135], [Bal91, chap. 0] ou la très bonne introduction [GW03, leçon 26] qui donnent une justification de l'aspect lacunaire des fonctions en mécanique et qui explique pourquoi il a fallu introduire ce concept de distributions (certains parlent de fonctions généralisées) qui généralisent les fonctions, en donnant un sens mathématique rigoureux de certaines notions apréhendées par des physiciens comme Heaviside, mais qui n'avaient pas été formalisées.

On renvoie à l'exemple 6.1 page 83 de la version longue. ♠

Dans cet exemple, des définitions formelles de "fonctions" qui ne le sont pas mais qui sont manipulées comme telles sont données. La théorie des distributions, données en section 6.3 page 64, donnera enuite un sens correct et rigoureux à ces curieux objets. Dans l'exemple 6.1 page 83 de la version longue, on montre les relations suivantes :

On introduit la fonction en escalier, non dérivable en 0, notée H et appelée fonction de Heaviside et définie par

$$\forall x < 0, \quad H(x) = 0, \tag{6.1a}$$

$$\forall x > 0, \quad H(x) = 1. \tag{6.1b}$$

Heaviside et Dirac qui faisaient le même type d'opérations, ont écrit que la dérivée de la fonction H, non dérivable en zéro, puisque discontinue, était une fonction généralisée, notée δ. On pose formellement [1]

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(x) = \frac{dH}{dx}(x). \tag{6.2}$$

On peut écrire formellement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{6.3}$$

On écrit aussi, de façon tout aussi formelle :

$$\forall x < 0, \quad \delta(x) = 0, \tag{6.4a}$$

$$\forall x > 0, \quad \delta(x) = 0, \tag{6.4b}$$

$$\delta(0) = +\infty. \tag{6.4c}$$

Notons que l'égalité (6.4c) pourrait se montrer rigoureusement de la façon suivante. On peut supposer que

$$H(0) \in]0, 1[. \tag{6.5}$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, si $x > 0$

$$\frac{H(x) - H(0)}{x} = \frac{1 - H(0)}{x},$$

D'après (6.5), on a $1 - H(0) > 0$ et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0, \\ x > 0}} \frac{H(x) - H(0)}{x} = +\infty. \tag{6.6}$$

De même, on montre que

$$\lim_{\substack{x \to 0, \\ x < 0}} \frac{H(x) - H(0)}{x} = +\infty. \tag{6.7}$$

Ainsi, de (6.6) et (6.7), on déduit que

$$\lim_{\substack{x \to 0, \\ x \neq 0}} \frac{H(x) - H(0)}{x} = +\infty.$$

Notons aussi que, si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$ (donc nulle en $\pm A$) alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = u(0). \tag{6.8}$$

On a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = -\int_{-A}^{A} H(x)\frac{du}{dx}(x). \tag{6.9}$$

Remarquons que cette égalité (6.8) est paradoxale et ne peut avoir lieu si δ est une « vraie » fonction. Dans ce cas, pour tout fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$, on aurait

$$u(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \delta(x)u(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = 0, \tag{6.10}$$

selon (6.4) (puisque la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur éventuellement infinie sur des points isolés) ce qui est absurde. $\diamondsuit$

Laurent Schwartz a donné un sens rigoureux à toutes ces opérations, déjà menées par les mécaniciens, dans [Sch45] disponible sur `http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AUG/AUG_1945__21_/AUG_1945__21__57_0/AUG_1945__21__57_0.pdf`. Rappelons pour conclure, les quelques lignes initiales de ce papier historique :

"Depuis l'introduction du calcul symbolique [2], les physiciens se sont fréquemment servis de certains notions ou de certaines formules dont le succès était incontestable, alors qu'elles n'étaient pas justifiées mathématiquement. C'est ainsi que la fonction $y(x)$ de la variable réelle, égale à 0, pour $x < 0$ à 1 pour $x > 0$ [3] est couramment considérée comme ayant pour dérivée « la fonction de Dirac » $y'(x) = \delta(x)$, nulle pour $x \neq 0$, égale à $+\infty$ pour

1. c'est-à-dire comme si la dérivée existe alors que cette fonction n'est pas dérivable !
2. c'est-à-dire les règles de dérivation non fondées, comme ici pour la poutre de l'exemple 6.1 page 83 de la version longue.
3. C'est la fonction H.

$x = 0$, et telle que, de plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$. Un tel « abus de langage » est malgré tout incompatible avec la notion habituelle de fonction et de dérivation ! Et que penser alors de la dérivation successive de la fonction de Dirac ! Et pourtant de telles expressions rendent de constants services en électricité en sont très adaptées à l'étude de la transformation de Laplace ou de Fourier et de la mécanique ondulatoire. Le but de cet article est de faire un très bref résumé (sans démonstrations) d'un travail [...] qui apporte une justification complète au langage précédent. Il se trouve que ce langage, ainsi réhabilité dans le domaine de l'analyse, est fécond dans beaucoup de questions diverses : électricité et physique mathématique ..."

Depuis, il a a réécrit tout cela dans [Sch66] par exemple, mais la littérature fourmille de références sur les distributions (voir par exemple [LT09 ; Har10 ; Ciu ; Kib01]).

6.3. Définition des distributions

Quittons maintenant le domaine de la RDM pour entrer dans celui de la définition mathématique, plus abstraite. Il faut bien garder l'idée que ces deux domaines, loin de s'opposer, se complètent harmonieusement !

Nous allons donc introduire le concept de distributions, qui généralise la notions de fonctions usuelles, qui englobe la « fonction » de Dirac δ et qui soit la dérivée de la fonction de Heaviside, définie par (6.1) et qui vérifie formellement (6.2), (6.3) et (6.8). Bien entendu, cette fonction doit être elle même dérivable autant de fois que l'on veut, en un sens à préciser. C'est la grande forces des distributions que de rendre la dérivation comme une opération algébrique et l'on peut appliquer autant de fois que l'on veut sur des fonctions dérivables (auquel cas, cette opération s'identifie à la dérivation usuelle) mais aussi sur des fonctions généralisées et qui ne sont plus nécessairement dérivables au sens usuel !

Nous allons donner maintenant les définitions habituelles des définitions en retrouvant les équations (6.2), (6.3) et (6.8) données de façon formelle (voir 6.1 page 83 de la version longue. ♠)

Notons aussi que l'on a montré que l'égalité (6.8) est paradoxale et ne peut avoir lieu si δ est une « vraie » fonction.

« à la physicienne »	« à la mathématicienne »
notation : $\delta_a(x)$ ou $\delta(x-a)$	notation : δ_a ou δ
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = u(0)$ pour u arbitraire	$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a).$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$	
δ n'est pas continue comme fonction	δ_a est linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{si } x = 0, \end{cases}$	
$H'(x) = \delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$H' = \delta,$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

TABLE 6.1. Visions du δ « à la physicienne » et « à la mathématicienne ».

Concluons par la donnée du tableau 6.1 qui récapitule les choses vues « à la physcienne » (ce n'est pas péjoratif !) sur la fonction de Dirac δ. Ce tableau reprend en partie [Kib01, tableau p. 196]. Il a été aussi complété pour donner en parallèle les choses vues « à la mathématicienne » (ce n'est pas péjoratif !)

Il nous faut changer de paradigme : voir les fonctions autrement, de façon radicalement différente, même au prix d'un coûteux effort, tellement rentable finalement. Cette nouvelle façon de voir doit d'une part, englober les fonctions au sens usuel que vous connaissez mais aussi prendre en compte les nouveaux objets introduits et leur donner un sens mathématique. Cette démarche est identique à celles de l'émergence de nouveaux modèles en mécanique [4] qui doit à la fois prendre en compte les anciennes lois qui fonctionnent et décrivent correctement le réel [5] mais naturellement, qui doit aussi envisager les nouvelles expériences observées, non prises en compte par l'ancien modèle [6].

Dans toute la suite de ce chapitre, on étudie des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas de fonction de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$, voire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$, les distributions se définissent aussi. On renvoie par exemple à [RT92, chap. 1] ou [Bal91]. $\diamondsuit$

La suite de ce chapitre est inspirée de [Pet98, chap. I], [Bal91, chap. 0 à 4], [Kib01, chap. 5] et[GW03, leçon 27].

6.3.1. Définition des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$

6.3.1.1. Définition informelle.

Dans tout ce chapitre, pour alléger les notations et s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera toutes les intégrales sur $\mathbb{R}$ sous la forme $\int f$.

Comme définition informelle des distributions, on fait parfois [7] la considération suivante : une grandeur f en physique (un déplacement, une pression,...) n'est connue que par une mesure physique, ce qui revient donc à prendre la quantité suivante (qui est une moyenne).

$$\int f(x)\phi(x)dx, \tag{6.11}$$

où la fonction ϕ dépend de l'appareil de mesure. Dire que la moyenne réalisée par l'appareil de mesure ne prend en compte que les valeurs de f au voisinage de x_0 où l'on désire connaître f idéalement se traduit que ϕ est nulle en dehors d'un voisinage de x_0. Si le réel n'est qu'expérimental [8], on accède aux grandeurs réelles uniquement par la mesure de f via (6.11). Autrement dit, connaître f revient à connaître *tous* les nombres définis par (6.11) pour *tous* les appareils de mesure ! Tout phénomène est donc décrit par une distribution, c'est-à-dire, une application qui à tout appareil de mesure associe le nombre défini par (6.11). Cela est valable dans le cas où cette grandeur est représentable par une fonction. Mais il peut exister des cas où le résultat de toute mesure ϕ est $\phi(x_0)$. Par exemple, on a rencontré cette situation, en remarquant précédemment (voir équation (6.8)) que si la fonction généralisée δ était intégrable, on aurait si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$,

$$\int \delta(x)u(x)dx = u(0). \tag{6.12}$$

Il n'existe aucune fonction f que, pour tout fonction ϕ,

$$\int f(x)\phi(x)dx = \phi(x_0). \tag{6.13}$$

Voir par exemple la preuve informelle dans le cas de l'exemple du Dirac (6.8). Dans ce cas, on a donc une distribution qui associe à ϕ un nombre ($\phi(0)$) mais qui ne s'écrit pas sous la forme (6.11), donc réservée aux distributions associées à une fonction. Bref, la notion de distribution généralise la notion de fonction. C'est une application T qui à ϕ, toute fonction nulle en dehors d'un intervalle, associe un nombre noté $T(\phi)$. Dans le cas où T est associé à une fonction f, on la note T_f et on aura donc

$$T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx. \tag{6.14}$$

---

4. par exemple apparition de la mécanique relativiste par rapport à la mécanique newtonienne.
5. La mécanique relativite est identique à la mécanique newtonniennne aux faibles vitesse.
6. La mécanique relativite explique le décalage du périhélie de Mercure, inexpliqué par la mécanique newtonienne.
7. Voir par exemple [BC18, pp. 90 et 91] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_distributions.pdf`.
8. Hypothèse bien souvent fausse en mathématique !

Ainsi, formellement, d'après (6.12), δ est une distribution définie par

$$\forall \phi, \quad \delta(\phi) = \phi(0). \tag{6.15}$$

Remarquons aussi que si f est une fonction dérivable et que ϕ est nulle en dehors de $]-A, A[$, on a, d'après la formule d'intégration par partie,

$$\int f'(x)\phi(x)dx = \int_{-A}^{A} f'(x)\phi(x)dx = -\int_{-A}^{A} f(x)\phi'(x)dx + f(A)\phi(A) - f(-A)\phi(-A) = -\int f(x)\phi'(x)dx. \tag{6.16}$$

et donc selon (6.14), puisque f est une fonction,

$$\int f'(x)\phi(x)dx = -T_f(\phi'). \tag{6.17}$$

De façon plus générale, la dérivée d'une distribution T est donc la distribution T' telle que

$$\forall \phi, \quad T'(\phi) = -T(\phi'). \tag{6.18}$$

Remarquons que si l'on reprend le calcul (6.9), on a, formellement,

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = -\int_{-A}^{A} H(x)\frac{d\phi}{dx}(x)dx = -T_H(\phi')$$

et donc par définition (6.18),

$$\delta(\phi) = T'_H(\phi)$$

puisque cela est vrai pour toute fonction ϕ, les deux applications $\phi \mapsto \langle \delta, \phi \rangle$ et $\phi \mapsto T'_H(\phi)$ sont égales et donc les deux distributions associées δ et T'_H sont égales, autrement dit

$$T'_H = \delta, \tag{6.19}$$

ce qui montre que la dérivée de la distribution T_H, associée à la fonction H est le Dirac, ce qu'on a observé formellement dans (6.2). Mais il faut bien comprendre que cette dérivée a lieu au sens de la dérivée de distributions, mais pas des fonctions ! La distribution T_H, associée à H est dérivable et sa dérivée vaut δ, qui n'est pas une fonction !

6.3.1.2. Définition rigoureuse (et mathématicienne !)

On peut dériver une fois une distribution si les fonctions tests ϕ sont dérivables. Si les fonctions test sont C^∞, on pourra donc dériver toute distribution autant de fois que l'on désire ! D'après ce que l'on vient de voir, les fonctions ϕ doivent être nulles au dehors d'un intervalle et de classe C^∞, ce qui fournit la première définition de l'ensemble des fonctions ϕ appelées « fonctions test » :

DÉFINITION 6.1. Dans tout ce chapitre, $\Omega =]a, b[$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, où

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty. \tag{6.20}$$

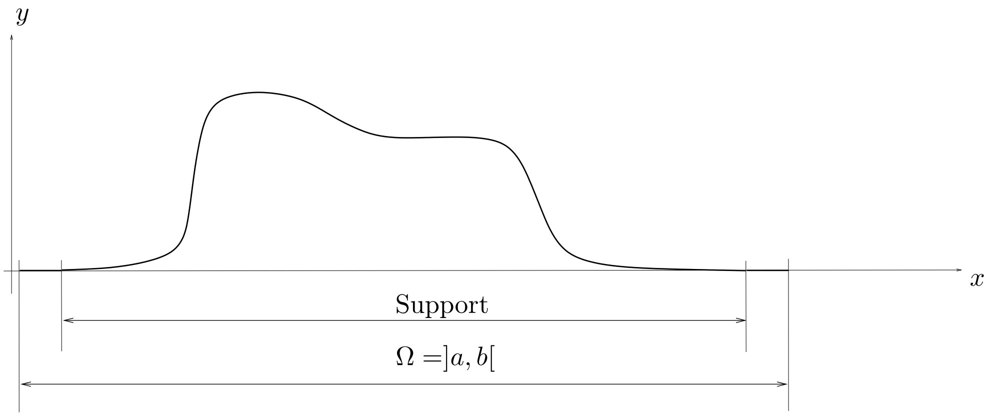
On appelle l'ensemble des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω, nulles en dehors de tout intervalle de type $[A, B]$ inclus dans Ω.

REMARQUE 6.2. On donne les définitions suivantes :

DÉFINITION 6.3. Soit ϕ une fonction continue définie sur l'intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$. On appelle support de ϕ la fermeture (ou l'adhérence) dans Ω de l'ensemble des points où ϕ est non nulle. C'est aussi le complémentaire dans Ω de la réunion des ouverts de Ω sur lesquel ϕ est nulle, c'est-à-dire sur le plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

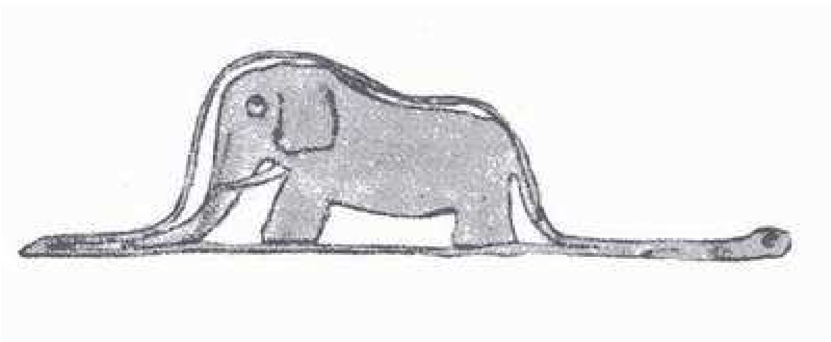
Si, par exemple, ϕ, définie sur $\mathbb{R}$, est non nulle sur $]A, B[$ et nulle sur $]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$, son support est $[A, B]$.

On a alors



(a) La fonction

(b) ... et son modèle



(c) ... et son autre modèle

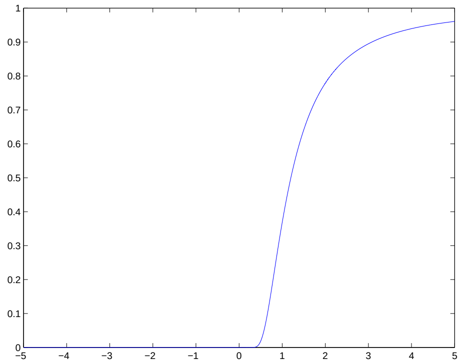
FIGURE 6.1. Un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

DÉFINITION 6.4. Pour tout intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$. On appelle l'ensemble des fonctions test l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact [9] dans Ω.

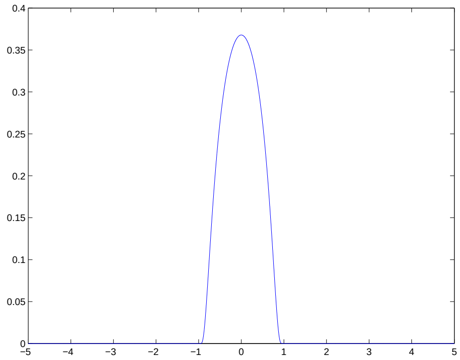
Au bord de Ω, ϕ a une limite nulle.

EXEMPLE 6.5. Voir sur la figure [10] 6.1, un exemple de fonction indéfiniment dérivable à support compact.

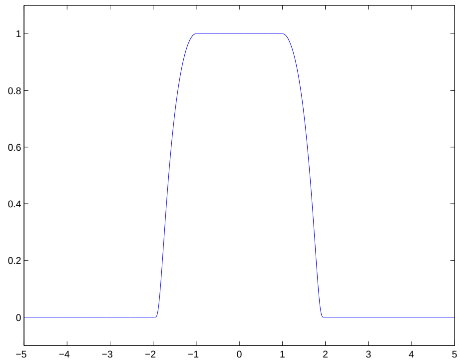
9. c'est-à-dire, dans $\mathbb{R}$, fermé et borné.
10. Toutes ces figures représentent aussi, selon l'âge de vos yeux, un chapeau ou un serpent qu'a mangé un éléphant issu du Petit prince de St-Exupery ; voir `http://lepetitprinceexupery.free.fr/illustrations/01-02.jpg`, `http://lepetitprinceexupery.free.fr/illustrations/01-03.jpg`, et `http://lepetitprinceexupery.free.fr/chapitre01.htm`.



(a) La fonction ζ.



(b) La fonction η.



(c) Une fonction égale à 1 pour $|x| \leq 1$ et nulle pour $|x| \geq 2$.

FIGURE 6.2. Quelques exemples de fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 6.6. Remarquons que la fonction ζ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \zeta(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \tag{6.21}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction η définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \eta(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \tag{6.22}$$

est une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Voir les figures 2(a) et 2(b).

EXEMPLE 6.7. Grâce aux fonctions ζ et η de l'exemple 6.6, on peut aussi construire des fonctions égales à un sur un intervalle, nulle en dehors d'un intervalle strictement plus grand et indéfiniment dérivables. Voir la figure 2(c).

$\diamond$

6.3.2. Définition des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Compte tenu de l'introduction informelle de la section 6.3.1.1, on peut adopter la définition suivante

DÉFINITION 6.8. Une distribution T sur Ω est une application linéaire [11] de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On note $T(\phi)$ l'image de ϕ par T. On note l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$.

11. $\mathcal{D}(\Omega)$ est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel de fonctions.

NOTATION 6.9. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test, l'image de ϕ par T est notée $\langle T, \phi \rangle$ (à la place de $T(\phi)$).

REMARQUE 6.10. Il existe, en toute rigueur, une condition qui n'est pas donnée dans ce cours (voir la condition (6.43) page 93 de la version longue. ♠) mais qui sera toujours vérifiée en pratique.

REMARQUE 6.11. La distinction entre $T(\phi)$ et $\langle T, \phi \rangle$ n'est pas anodine. Si on se donne une distribution connue, on notera $\langle T, \phi \rangle$. Sinon, on notera $T(\phi)$ *tant que l'on a pas montré que T est une distribution.* On vérifie que l'application qui à ϕ associe $T(\phi)$ est linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On utilisera alors la notation dédiée $\langle T, \phi \rangle$ puisque que l'on sait que l'on a affaire à une distribution.

REMARQUE 6.12. L'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel. On peut aussi écrire

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathscr{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R}).$$

♢

REMARQUE 6.13. L'égalité de deux distributions T_1 et T_2 est exactement identique à celle de deux fonctions f_1 et f_2 ! Cette dernière a lieu ssi, pour tout x de l'ensemble de départ, on a $f_1(x) = f_2(x)$. De même $T_1 = T_2$, ssi pour tout tout ϕ de l'ensemble de départ ($\mathcal{D}(\Omega)$), on a $\langle T_1, \phi \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$.

REMARQUE 6.14. Il est très important de mémoriser le schéma suivant, qui ne fait que traduire qu'une distribution T est une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, qui à ϕ associe $\langle T, \phi \rangle$:

$$T\colon \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \langle T, \phi \rangle \end{array} \right. \tag{6.23}$$

6.3.3. L'intégration de Lebesgue, à la base des distributions

L'intégration de Riemann, que vous devez connaître, ne suffit plus pour la suite. La notion d'intégration de Lebesque la supplante avantageusement. Voir l'annexe Q.

6.3.4. Exemple de « distributions-fonctions »

DÉFINITION 6.15. Pour tout de fonction f de $L^2(\Omega)$ ou dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (voir annexe R), on pose

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx. \tag{6.24}$$

L'application $\phi \mapsto T_f(\phi)$ est clairement linéaire. On a donc défini la distribution T_f par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx. \tag{6.25}$$

Le théorème suivant est essentiel et permet de comprendre pourquoi la notion de distribution généralise la notion de fonction.

THÉORÈME 6.16. *À toute fonction f de $L^1_{loc}(\Omega)$, on associe la distribution T_f définie par* (6.25). *L'application de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui a f associe T_f est linéaire et injective.*

DÉMONSTRATION. Ce résultat est admis (voir preuve dans [Bal91, p. 18]). Il montre que si $T_{f_1} = T_{f_2}$, alors $f_1 = f_2$. L'égalité de deux fonctions f_1 et f_2 de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ signifie l'égalité presque-partout de f_1 et f_2 (voir annexe Q.2). □

REMARQUE 6.17. Si on appelle Ψ, l'application de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ du théorème 6.16, on a donc le schéma suivant :

$$\Psi : \left| \begin{array}{lcl} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto & T_f = \Psi(f) : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \end{array} \right. \end{array} \right. . \tag{6.26}$$

♢

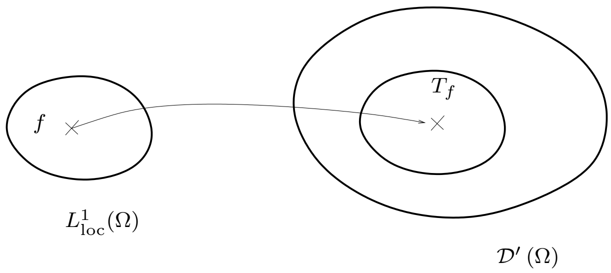


FIGURE 6.3. Injection de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

REMARQUE 6.18.
On donc le schéma représenté sur la figure 6.3. Il est issu de [GW03]. Comme habituellement, on identifiera $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à la sous-partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui lui est isomorphe *via* l'injection Ψ. Si l'ensemble d'arrivée est réduit à $\Psi\left(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\right)$, cette injection devient en effet un isomorphisme.

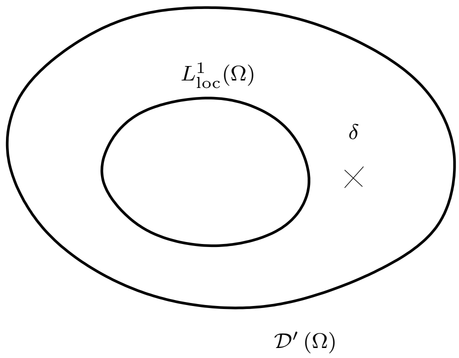


FIGURE 6.4. Identification de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à une sous partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On identifiera $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ donc à une sous partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$, comme le montre la figure 6.4, elle aussi issue de [GW03].

$\diamondsuit$

Autrement dit, on peut donc identifier la distribution T_f, pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à la fonction f, grâce à (6.25). On notera donc par abus f à la place de T_f *si f est une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$* et donc (6.25) sera noté sous la forme

$$\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx. \tag{6.27}$$

On parle donc de distributions-fonctions. La notion de distribution généralise donc la définition de fonction, puisqu'elle englobe toutes les fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (et donc de $L^2(\Omega)$).

REMARQUE 6.19. Puisque une distribution-fonction de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ n'est définie que presque-partout, on peut donc changer, sans modifier la distribution, les valeurs de cette fonction sur des ensembles négligeables, en particulier sur des ensemble au plus-dénombrables [12], en particulier donc sur des ensembles finis. Pour la fonction de Heaviside H définie par (6.1), ses valeurs sur $\mathbb{R}$ pourraient être modifiées sur des valeurs finies, mais on garde traditionnellement l'expression donnée par (6.1a) et (6.1b). En revanche, en zéro, finalement, H n'a pas besoin d'être définie, puisque cette valeur ne joue pas ! On pose parfois, de façon purement conventionnelle

$$H(0) = 1/2, \tag{6.28}$$

égale à $(H(0+0) + H(0-0))/2$. Tout autre valeur pourrait être choisie !

12. C'est-à-dire dénombrables ou finis.

NOTATION 6.20. On notera, tout au long de ce chapitre, f pour la fonction et T_f pour la distribution fonction associée. Cette notation est conforme à celle utilisée dans [Bal91] ou [Sch45]). D'autres auteurs (comme dans [Pet98]), notent $\{f\}$ à la place de T_f. Par la suite, pour alléger les notations et, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on les notera de la même façon, c'est-à-dire, que l'on écrira f pour T_f.

REMARQUE 6.21. Il faut désormais s'habituer à considérer qu'une fonction f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ mais qu'on peut aussi la considérer simultanément comme une distribution, c'est-à-dire, une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, il faut s'habituer aux deux écriture différentes du même objet f :

$$f : \left| \begin{array}{lll} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. \quad \text{et } f : \left| \begin{array}{lll} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \langle f, \phi \rangle = \int f\phi \end{array} \right. . \tag{6.29}$$

Bien relire la remarque 6.14 page 69, dans le cas général !

La question est maintenant de savoir s'il existe des distributions qui ne sont pas des fonctions !

6.3.5. Exemple de « distributions non fonctions »

DÉFINITION 6.22. Soit Ω un intervalle ouvert et $a \in \Omega$. On appelle distribution (ou masse de) Dirac δ_a, la distribution définie par par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a). \tag{6.30}$$

DÉMONSTRATION. δ_a est clairement une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. □

NOTATION 6.23. Quand a est nul, on note δ à la place de δ_0.

REMARQUE 6.24. Pour toute la suite, on fera implicitemet l'hypotèse en parlant de δ_a que a appartient à Ω.

La propriété essentielle est que

PROPOSITION 6.25. *Le Dirac δ_a n'appartient pas à $L^1_{loc}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Reprenons la preuve de [GW03, pp. 205, 206]. Si le Dirac δ_a appartenait à $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, il existerait une fonction f de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, telle que, avec l'abus de notation déjà signalé,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \phi(a) = \langle \delta, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx. \tag{6.31}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique (6.31) à ψ définie par

$$\psi(x) = \eta(n(x-a)),$$

où η est définie par (6.22). ψ est non nulle pour x vérifiant

$$-1 \leq n(x-a) \leq 1,$$

soit encore

$$a - \frac{1}{n} \leq x \leq a + \frac{1}{n}.$$

D'après (6.22), on a

$$\psi(a) = \eta(0) = \frac{1}{e},$$

et on a donc, selon (6.31), pour n assez grand :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{e} &= |\psi(a)|\,, \\
&= \left|\int_{\Omega} f\psi\right|, \\
&= \left|\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f\psi\right|, \\
&\leq \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} |f|\,|\psi|\,,
\end{aligned}
$$

et, puisque $|\eta|$ est majorée par 1, $|\psi|$ l'est aussi :

$$
\leq \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} |f|\,,
$$

et puisque f est intégrable sur $[a-1/n, a+1/n]$, cette quantité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On aurait donc à la limite n tend vers l'infini :

$$
\frac{1}{e} = 0,
$$

ce qui est absurde. □

Voir deux preuves alternatives page 97 de la version longue. ♠

REMARQUE 6.26. Sur le schéma de la figure 6.4 page 70, on placera donc le dirac à l'extérieur de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. De plus, il sera "au bord" de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, puisque le dirac est la limite d'une suite de distributions-fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (voir exercice de TD 6.2).

◇

Et voilà ! On a généralisé les fonctions en créant un espace qui le contient et strictement plus grand[13].

6.3.6. Combinaison linéaire de distributions

DÉFINITION 6.27. Si λ et μ sont deux réels et Si T_1 et T_2 sont deux distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution $\lambda T_1 + \mu T_2$ par :

$$
\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle \lambda T_1 + \mu T_2, \phi\rangle = \lambda\langle T_1, \phi\rangle + \mu\langle T_2, \phi\rangle. \tag{6.32}
$$

6.4. Limite d'une suite de distributions

Pour plus de détails, lire [Bal91, chapitre 3] et [GW03, leçon 29].

Voir l'exemple 6.29 page 98 de la version longue. ♠

DÉFINITION 6.28 (Convergence au sens des distributions). Soient (T_n) une suite de distributions sur l'intervalle ouvert Ω et T une distribution sur l'intervalle ouvert Ω. On dit que la suite (T_n) de distributions converge vers T sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \phi\rangle)$ converge vers $\langle T, \phi\rangle$.

REMARQUE 6.29. Une suite de distribution étant une suite d'application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, la convergence de (T_n) vers T ne fait que la traduire la convergence simple de T_n vers T, puisque celle-ci est équivalente à, pour tout ϕ, $\langle T_n, \phi\rangle = T_n(\phi)$ tend vers $\langle T, \phi\rangle = T(\phi)$.

Cette condition de la définition 6.28 est donc beaucoup moins exigeante que tous les résultats de convergence de l'annexe P où il faut des conditions spécifiques pour qu'une suite de fonctions converge vers une fonction.

13. Fantasme de nombreux mathématiciens, en quète permanente de généralisation !

D'autres limites de fonctions peuvent fournir le Dirac : voir [Pet98, p. 49] ou l'exercice de TD 6.2 ou 6.13.

Voir le lemme 6.32 page 99 de la version longue. ♠

Voir le lemme 6.33 page 99 de la version longue. ♠

Cette notion de limite est grandement simplifiée par le fait qu'il est inutile de vérifier en fait que l'objet limite est une distribution :

THÉORÈME 6.30. *Soit (T_n) une suite de distributions sur l'intervalle ouvert Ω. On suppose que pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \phi\rangle)$ converge. Soit l_ϕ sa limite. Alors l'application T qui a ϕ associe l_ϕ est une distribution (et c'est donc la limite de la suite des distributions (T_n)).*

DÉMONSTRATION. Admise (voir [Bal91, p. 24]). □

Voir l'exemple 6.35 page 100 de la version longue. ♠

EXEMPLE 6.31 (Valeur principale de $1/x$). On pose $\Omega = \mathbb{R}$. La fonction $1/x$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. En revanche, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \tag{6.33}$$

où l'on a posé

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx. \tag{6.34}$$

En effet, pour A assez grand et pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\phi(x)}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\phi(x)}{x} dx - \int_{A}^{\varepsilon} \frac{\phi(-x)}{-x} dx,\\
&= \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x} dx,\\
&= \int_{0}^{A} \psi_\varepsilon(x) dx,
\end{aligned}$$

où la fonction ψ_ε est définie sur $[0, A]$ par

$$\forall x \in [0, A], \quad \psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in [\varepsilon, A],\\ 0 & \text{si } x \in [0, \varepsilon[. \end{cases}$$

On introduit la fonction ψ, définie par

$$\forall x \in [0, A], \quad \psi_(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x} & \text{si } x > 0,\\ 2\phi'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange en zéro, on a, pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi(0) + x\phi'(0) + \frac{x^2}{2}\phi''(r_x),\\
\phi(-x) &= \phi(0) - x\phi'(0) + \frac{x^2}{2}\phi''(s_x),
\end{aligned}$$

où $r_x \in]0, x[$ et $s_x \in]-x, 0[$ et donc

$$\psi(x) = 2\phi'(0) + \frac{x}{2}\left(\phi''(r_x) + \phi''(s_x)\right),$$

cette dernière quantité tendant vers zéro quand x tend vers 0. On peut aussi établir cela avec la règle de l'Hospital. Ainsi, la fonction ψ est continue sur $[0, A]$. Donc, la fonction ψ_ε est bornée indépendamment de ε et tend simplement vers la fonction ψ sur $[0, A]$, qui est continue. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue Q.3 page 256, on a, à A fixé,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^A \psi_\varepsilon(x) dx = \int_0^A \psi(x) dx,$$

et donc pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la limite (6.33) existe. Ainsi, la limite $\lim_\varepsilon \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$ existe pour toute fonction ϕ. D'après la proposition 6.30, on sait que l'on a affaire à une distribution (et qui est donc par définition la limite de (f_ε) où f_ε est la distribution fonction dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } |x| \geq \varepsilon,\\ 0 & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

On a par définition

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \tag{6.35}$$

où on note abusivement

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

Ainsi, puisque $1/x$ n'est pas dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{vp}(1/x)$ n'est pas une distribution-fonction.

Démonstration.
Voir la preuve page 101 de la version longue. ♠

□

◇

6.5. Dérivation des distributions

Pour plus de détails, lire [Bal91, chapitre 4], [GW03, leçon 28] et [Pet98, chap. II].

En généralisant ce qu'on a observé en section 6.3.1.1, on donne

Définition 6.32 (Dérivée d'une distribution). Soit T une distribution sur l'intervalle ouvert Ω. On définit la dérivée T' de T par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle. \tag{6.36}$$

et, de façon plus générale,

Définition 6.33 (Dérivée (d'ordre quelconque) d'une distribution). Soit T une distribution sur l'intervalle ouvert Ω. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la dérivée k-ième $T^{(k)}$ de T par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle T^{(k)}, \phi \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, \phi^{(k)} \right\rangle. \tag{6.37}$$

Exemple 6.34 (Dérivée de la fonction de Heaviside H). La fonction de Heaviside H est définie par (6.1). On retrouve (6.19) :

$$H' = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{6.38}$$

En effet, on refait le calcul (6.16). Par définition, on a, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et puisque H est dans $L^2(\Omega)$,

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_{-A}^{A} H(x)\phi'(x)dx = -\int_0^A \phi'(x)dx = -\phi(A) + \phi(0) = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

On a de même

$$H'(.-a) = \delta_a, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{6.39}$$

Notons bien que H est dans $L^2(\Omega)$ et que sa dérivée, au sens des distributions mais pas des fonctions, est égale à δ, qui n'est plus une fonction !

On peut généraliser cela avec la formule des sauts :

Proposition 6.35 (Formules des sauts). *Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, $(a_i)_{0\leq i\leq N}$ un ensemble fini ordonné dans l'ordre strictement croissant de points de Ω, où a_0 et a_N sont les extrémités (finies ou non) de Ω. Soit f une fonction continûment dérivable*[14] *sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \{0, ..., N-1\}$ ayant en chaque a_i pour $i \in \{1, ..., N-1\}$ (voir figure 6.5), une limite à droite et une limite à gauche, notée respectivement $f(a_i+0)$ et $f(a_i-0)$. On suppose de plus que*

$$f' \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{6.40}$$

On note le saut de f en a_i, pour $i \in \{1, ..., N-1\}$, la quantité

$$\sigma_{a_i} = f(a_i+0) - f(a_i-0). \tag{6.41}$$

14. C'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$.

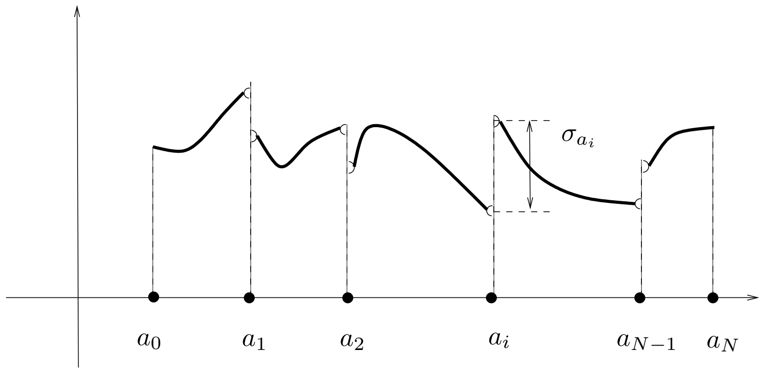


FIGURE 6.5. Une fonction discontinue aux points a_i.

On note f', la fonction définie par la dérivée usuelle de f (sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$). Alors,

$$f \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{6.42}$$

et

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T'_f = f' + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6.43}$$

REMARQUE 6.36. On laisse au lecteur le soin de vérifier que la condition (6.40) est équivalente à

$$\forall i \in \{0, ..., N-1\}, \quad f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(]a_i, a_{i+1}[). \tag{6.44}$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6.35. On se donne $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ où $\Omega = I$. La continuité de f sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et l'existence des limite finie à droite et à gauche de f en chaque a_i impliquent que f peut être prolongée par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$, ce qui implique (6.42) et donc

$$\begin{aligned}\langle T'_f, \phi\rangle &= -\langle T_f, \phi'\rangle, \\ &= -\langle f, \phi'\rangle,\end{aligned}$$

et donc,

$$\langle T'_f, \phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx. \tag{6.45}$$

Nous allons ensuite, pour revenir à ϕ, essayer de faire des intégrations par partie "là ou c'est possible", c'est-à-dire sur des intervalles ne contenant pas les endroits a_i pour $1 \leq i \leq N-1$, où est f discontinue.

(1) Donnons tout d'abord le lemme suivant, très proche de l'intégration par partie habituelle :

LEMME 6.37 (Intégration par partie générale). *Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$, f continuement dérivable sur $]\alpha, \beta[$ possédant une limite à droite en α, notée $f(\alpha + 0)$ et une limite à gauche en β, notée $f(\beta + 0)$; on suppose de plus*

$$f' \in L^1_{loc}(]\alpha, \beta[). \tag{6.46}$$

Soit ϕ, continuement dérivable sur $[\alpha, \beta]$. Alors,

$$f \in L^1_{loc}(]\alpha, \beta[), \tag{6.47}$$

et

$$\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx + f(\beta - 0)\phi(\beta) - (\alpha + 0)\phi(\alpha). \tag{6.48}$$

DÉMONSTRATION. Considérons X et Y tels que

$$\alpha < X < Y < \beta. \tag{6.49}$$

Par hypothèse, f et ϕ sont continuement dérivables sur $[X, Y]$ et la formule d'intégration classique donne

$$\int_X^Y f(x)\phi'(x)dx = -\int_X^Y f'(x)\phi(x)dx + [f\phi]_X^Y,$$

et donc

$$\int_X^Y f(x)\phi'(x)dx = -\int_X^Y f'(x)\phi(x)dx + f(Y)\phi(Y) - f(X)\phi(X). \tag{6.50}$$

Puisque f est continue sur $]\alpha, \beta[$ et admet des limites à droite et à gauche en α et β, elle se prolonge en une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, ce dont on déduit (6.47). Ainsi $f\phi'$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ et le théorème de convergence dominée (voir théorème Q.3) implique que :

$$\lim_{\substack{X\to\alpha, X>\alpha,\\ Y\to\beta, Y>\alpha}} \int_X^Y f(x)\phi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx. \tag{6.51}$$

D'après (6.46), on a de même

$$\lim_{\substack{X\to\alpha, X>\alpha,\\ Y\to\beta, Y>\alpha}} \int_X^Y f'(x)\phi(x)dx = \int_\alpha^\beta f'(x)\phi(x)dx. \tag{6.52}$$

Par définition de $f(\alpha + 0)$ et et $f(\beta + 0)$ et puisque ϕ est continue en α et β, on a

$$\lim_{X\to\alpha, X>\alpha} f(X)\phi(X) = f(\alpha + 0)\phi(\alpha), \tag{6.53a}$$

$$\lim_{Y\to\beta, Y<\beta} f(X)\phi(X) = f(\beta - 0)\phi(\beta). \tag{6.53b}$$

Il suffit donc de passer à la limite $X \to \alpha$ avec $X > \alpha$ et $Y \to \beta$ avec $Y < \beta$ et d'utiliser (6.50) (6.51), (6.52) et (6.53). □

(2) Démontrons tout d'abord la formule (6.43) pour $N = 2$. On peut supposer, quitte à augmenter le support de ϕ qu'il est égal à $[A, B]$ où $a_0 < A < a_1$ et $a_1 < B < a_2$. On écrit grâce à (6.45)

$$\langle T_f', \phi\rangle = -\int_A^B f(x)\phi'(x)dx, \tag{6.54}$$

et donc

$$\langle T_f', \phi\rangle = -\int_A^{a_1} f(x)\phi'(x)dx - \int_{a_1}^B f(x)\phi'(x)dx. \tag{6.55}$$

Si on utilise enfin le lemme 6.37 (ce qui est loisible, grâce à (6.40)) avec $\alpha = A$ et $\beta = a_1$, on a :

$$\int_A^{a_1} f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^{a_1} f'(x)\phi(x)dx + f(a_1 - 0)\phi(a_1) - f(A + 0)\phi(A),$$

et donc, puisque ϕ est nulle en A

$$\int_A^{a_1} f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^{a_1} f'(x)\phi(x)dx + f(a_1 - 0)\phi(a_1). \tag{6.56a}$$

On obtient de même en utilisant le lemme 6.37 avec $\alpha = a_1$ et $\beta = B$

$$\int_{a_1}^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_1}^B f'(x)\phi(x)dx - f(a_1 + 0)\phi(a_1). \tag{6.56b}$$

Ainsi, grâce à (6.55) et (6.56)

$$\begin{aligned}
\left\langle T_f', \phi \right\rangle &= \int_A^{a_1} f'(x)\phi(x)dx + \int_{a_1}^{B} f'(x)\phi(x)dx - f(a_1-0)\phi(a_1) + f(a_1+0)\phi(a_1),\\
&= \int_A^{B} f'(x)\phi(x)dx + (f(a_1+0) - f(a_1-0))\phi(a_1),\\
&= \int_A^{B} f'(x)\phi(x)dx + \sigma_{a_1}\phi(a_1),\\
&= \int_A^{B} f'(x)\phi(x)dx + \sigma_{a_1}\langle \delta_{a_1}, \phi\rangle,\\
&= \int_{a_0}^{a_2} f'(x)\phi(x)dx + \sigma_{a_1}\langle \delta_{a_1}, \phi\rangle,\\
&= \langle f', \phi\rangle + \sigma_{a_1}\langle \delta_{a_1}, \phi\rangle,\\
&= \langle f' + \sigma_{a_1}\delta_{a_1}, \phi\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui est exactement (6.43) dans le cas où $N = 2$.

(3) Démontrons-maintenant (6.43) dans le cas général. Soit donc N un entier supérieur ou égal à 3. Soit $i \in \{1, ..., N-2\}$. On peut supposer, quitte à augmenter le support de ϕ qu'il est égal à $[A, B]$ où $a_0 < A < a_1$ et $a_{N-1} < B < a_N$. Appliquons le lemme 6.37 avec $\alpha = a_i$ et $\beta = a_{i+1}$, ce qui donne

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx + f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i),$$

et donc

$$\forall i \in \{1, ..., N-2\}, \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx + f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i). \tag{6.57}$$

Si on somme toute ces égalités pour i décrivant $\{1, ..., N-2\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx &= \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx,\\
&= \sum_{i=1}^{N-2} \left(-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx + f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i) \right),\\
&= \sum_{i=1}^{N-2} \left(-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx \right) + \sum_{i=1}^{N-2} \left(f(a_{i+1})\phi(a_{i+1}-0) - f(a_i+0)\phi(a_i) \right),\\
&= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{N-2} f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - \sum_{i=1}^{N-2} f(a_i+0)\phi(a_i),
\end{aligned}$$

on manipule les somme pour faire apparaître les sauts de f ; on commence par isoler les deux termes initial et final des deux sommes :

$$= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{N-3} f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - \sum_{i=2}^{N-2} f(a_i+0)\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1),$$

on pose $i' = i+1$ dans la première somme que l'on réécrit ensuite i :

$$\begin{aligned}
&= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=2}^{N-2} f(a_i-0)\phi(a_i) - \sum_{i=2}^{N-2} f(a_i+0)\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1),\\
&= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=2}^{N-2} \left(f(a_i-0) - f(a_i+0) \right)\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1),
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{N-2} \sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1). \tag{6.58}$$

Enfin, exactement comme dans le cas (2), on obtient

$$\int_A^{a_1} f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^{a_1} f'(x)\phi(x)dx + f(a_1-0)\phi(a_1), \tag{6.59a}$$

$$\int_{a_{N-1}}^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_{N-1}}^B f'(x)\phi(x)dx - f(a_{N-1}+0)\phi(a_{N-1}). \tag{6.59b}$$

Bref, si on somme (6.58) et (6.59), on obtient

$$\int_A^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{N-2}\sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_{N-1}+0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1) + f(a_1-0)\phi(a_1),$$

soit encore

$$\int_A^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=1}^{N-1}\sigma_{a_i}\phi(a_i). \tag{6.60}$$

On finit donc exactement comme dans le cas (2) : Ainsi, grâce à (6.54) et (6.60)

$$\begin{aligned}\left\langle T'_f,\phi\right\rangle &= \int_A^B f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{N-1}\sigma_{a_i}\phi(a_i),\\ &= \left\langle f' + \sum_{i=1}^{N-1}\sigma_{a_i},\phi\right\rangle,\end{aligned}$$

ce qui est exactement (6.43). $\diamondsuit$

$\square$

Remarque 6.38. Contrairement à ce que l'on a adopté dans la remarque 6.20, il est fondamental ici de noter différemment T_f, la distribution fonction associée à la fonction f : ainsi T'_f est la dérivée de la distribution fonction T_f et f' est fonction égale à la dérivée usuelle de f. Si on notait, ici, f' pour T'_f, on aurait l'égalité absurde

$$f' = f' + \sum_{i=1}^{N-1}\sigma_{a_i}\delta_{a_i}.$$

Voir aussi [Pet98, p. 40]. Pour éviter cette ambiguité, d'autres auteurs comme dans [Bal91 ; Lam08], écrivent (6.43) sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ (T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{N-1}\sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6.61}$$

Remarque 6.39. Certains auteur comme dans [Lam08] font l'hypothèse (6.40) ou ce qui revient au même (6.46), d'autres comme dans [Bal91] ne la font pas. On peut remarquer, en reprenant la preuve du lemme 6.37, que si X et Y sont définis par (6.49), on a

$$\int_X^Y f'(x)dx = f(Y) - f(X),$$

ce qui implique en passant à la limite que

$$\lim_{\substack{X\to\alpha, X>\alpha,\\ Y\to\beta, Y>\alpha}} \int_X^Y f'(x)dx \text{ existe et que } \lim_{\substack{X\to\alpha, X>\alpha,\\ Y\to\beta, Y>\alpha}} \int_X^Y f'(x)dx = f(\beta-0) - f(\alpha+0).$$

Cela *n'implique* pas au sens de l'intégration de Lebesgue (voir annexe Q) que la fonction f' est intégrable sur $[\alpha,\beta]$ (sauf dans le cas par exemple où f' est de signe constant aux bords du segment $]\alpha,\beta[$.) Pour cela, il faudrait en effet qu'il existe une constante C telle que pour tout X et Y, on ait

$$\int_X^Y |f'(x)|dx \leq C.$$

Il est donc important de faire l'hypothèse (6.40) ou (6.46).

$\diamondsuit$

Exemple 6.40. si $f(x) = |x|$, $T'_f =$ signe dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

En particulier, si les sauts sont nuls, on a clairement deux conséquences immédiates de la proposition 6.35 :

LEMME 6.41. *Si f est continûment dérivable sur Ω, alors f est dérivable au sens des distributions et sa dérivée vaut sa dérivée usuelle.*

LEMME 6.42. *Si f est continue sur un intervalle ouvert Ω et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points sur Ω, alors f est dérivable au sens des distributions et sa dérivée y vaut sa dérivée usuelle.*

On peut donc écrire aussi que f' est égale presque partout (sauf aux points ou elle n'est pas dérivable) à sa dérivée usuelle.

Voir la proposition 6.48 page 106 de la version longue. ♠

REMARQUE 6.43. On pourra aussi trouver une formule de sauts avec un nombre infinis de sauts dans l'exercice de TD 6.12. Son énoncé est le suivant

PROPOSITION 6.44 (Formules des sauts (nombre infinis)).

(1) Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante telle que

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = +\infty. \tag{6.62}$$

On supposera que $a_0 \geq -\infty$. On pose alors $\Omega =]a_0, +\infty[$. Soit f une fonction continûment dérivable sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \mathbb{N}$ ayant en chaque a_i pour $i \in \mathbb{N}^*$, une limite à droite et une limite à gauche. On note le saut de f en a_i, pour $i \in \mathbb{N}^*$, la quantité définie par (6.41). On suppose de plus l'équation (6.40) a lieu. On note f', la fonction définie par la dérivée usuelle de f (sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$). Alors, on a l'équation (6.42) et

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6.63}$$

Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante et vérifie (6.62) et les hypothèses précédentes

$$\lim_{i\to-\infty} a_i = -\infty, \tag{6.64}$$

l'équation (6.63) est remplacée par

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6.65}$$

(2) (a) Plus généralement, on fait les mêmes hypothèses que dans le cas 1 sauf que la suite a_n est strictement monotone et on considère $l \in \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = l. \tag{6.66}$$

On pose

$$\Omega = \begin{cases}]a_0, K[, & \text{où } K \text{ est un réel quelconque tel que } l < K \leq +\infty \text{ si la suite } a_i \text{ est croissante ;} \\ ]K, a_0[, & \text{où } K \text{ est un réel quelconque tel que } +\infty \leq K < l \text{ si la suite } a_i \text{ est décroissante.} \end{cases} \tag{6.67}$$

Si l est fini, on suppose de plus que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\sigma_i| < +\infty \ ; \tag{6.68a}$$

f possède une limite à gauche et à droite en l avec un saut noté σ_l ; (6.68b)

si la suite a_i est décroissante, f est continûment dérivable sur $]K, l[$; (6.68c)

si la suite a_i est croissante, f est continûment dérivable sur $]l, K[$. (6.68d)

(6.68e)

On a les mêmes conclusions que dans le cas 1 sauf dans le cas où l est fini, auquel cas (6.63) est remplacé par

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} + \sigma_l\delta_l. \tag{6.69}$$

(b) Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est strictement monotone, on fait les mêmes hypothèses que dans le cas (2a). Dans ce cas, (6.69) est remplacée par

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} + \sigma_{l^+}\delta_{l^+} + \sigma_{l^-}\delta_{l^-}, \tag{6.70}$$

où $l^{\pm}$ désigne la limite de a_i quand i tend $\pm\infty$, quand elle est supposée finie, en supposant dans ce cas que

$$\sum_{i=1}^{\pm\infty} |\sigma_i| < +\infty. \tag{6.71}$$

REMARQUE 6.45. Comme dans la remarque6.35, on peut remplacer la condition (6.40) par

$$\forall i \in I, \quad f' \in L^1_{\text{loc}}(]a_i, a_{i+1}[), \tag{6.72}$$

avec $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$ en rajoutant cette fois-ci la condition (si la limite est finie)

$$\sum_{i\in I} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(x)|dx < +\infty. \tag{6.73}$$

◊

◊

Voir la remarque 6.53 page 108 de la version longue. ♠

PROPOSITION 6.46. *Si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont la dérivée est nulle, alors T est une fonction constante.*

DÉMONSTRATION. Voir [GW03, p. 227] ou corollaire U.12 page 269. □

Enfin, on a le lemme suivant, finalement immédiat à montrer

LEMME 6.47. *Soient (T_n) une suite de distributions sur l'intervalle ouvert Ω et T une distribution sur l'intervalle ouvert Ω telle que la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout entier k, $(T_n^{(k)})$ converge vers $T^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout k, $\left\langle T_n^{(k)}, \phi \right\rangle = (-1)^k \langle T_n, \phi^{(k)} \rangle$ qui tend vers $(-1)^k \langle T, \phi^{(k)} \rangle = \langle T^{(k)}, \phi \rangle$. □

EXEMPLE 6.48 (Dérivée k-ième du dirac). On a vu dans l'exemple 6.34 que le dirac est la dérivée de la fonction de Heaviside. On peut continuer de dériver : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \delta_a^{(k)}, \phi \right\rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(a).$$

En effet,

$$\left\langle \delta_a^{(k)}, \phi \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta_a, \phi^{(k)} \right\rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(a).$$

Comme dans la proposition 6.25, on peut montrer que les dérivées successives du dirac δ_a n'appartiennent pas à $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Voir la section 6.6 page 108 de la version longue. ♠

6.6. Produit de distributions (produit par une fonction indéfiniment dérivable)

Pour plus de détails, lire [Bal91, section IV-1].

On ne peut malheureusement multiplier deux distributions quelconques. Néanmoins, on a

DÉFINITION 6.49 (Multiplication d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable). Soient g une fonction indéfiniment dérivable sur Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit la distribution gT par la formule

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle gT, \phi \rangle = \langle T, g\phi \rangle. \tag{6.74}$$

On admet que cela définit bien une distribution. Remarquons que si g est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $g\phi$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ et (6.74) a bien un sens.

EXEMPLE 6.50. La définition du produit d'une distribution fonction par une fonction indéfiniment dérivable généralise évidemment le produit usuel des fonctions. En remarquant que si f appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, il en est de même de gf et on a

$$gT_f = T_{gf}.$$

Notons une conséquence importante de cette définition

LEMME 6.51. *Si a appartient à Ω et si g est une fonction indéfiniment dérivable sur Ω, on a*

$$g\delta_a = g(a)\delta_a. \tag{6.75}$$

En particulier, si $g(a) = 0$, on a

$$g\delta_a = 0. \tag{6.76}$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a, pour toute fonction test ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle g\delta_a, \phi\rangle = \langle \delta_a, g\phi\rangle = [g\phi]_{x=a} = g(a)\phi(a) = g(a)\left(\langle \delta_a, \phi\rangle\right) = \langle g(a)\delta_a, \phi\rangle. \tag{6.77}$$

Si $g(a) = 0$, l'équation (6.76) est donc une conséquence immédiate de (6.75). □

EXEMPLE 6.52. Si a appartient à Ω, on a

$$(x-a)\delta_a = 0, \quad (x-a)\delta'_a = -\delta_a. \tag{6.78}$$

DÉMONSTRATION. Voir exercice 6.4 de TD. □

Donnons aussi un résultat qui généralise la dérivée d'un produit de fonctions :

PROPOSITION 6.53 (Dérivation d'un produit de distributions). *Soient g une fonction indéfiniment dérivable sur Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

$$(gT)' = g'T + gT'. \tag{6.79}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire, une fois de plus, les différentes définitions que l'on a vues : avec les bonnes hypothèses, on a

$$\begin{aligned}\left\langle (gT)', \phi\right\rangle &= -\langle gT, \phi'\rangle,\\ &= -\langle T, g\phi'\rangle,\\ &= \langle T, -g\phi'\rangle,\end{aligned}$$

et puisque $-g\phi' = g'\phi - (g\phi)'$, il vient

$$\begin{aligned}&= \langle T, g'\phi - (g\phi)'\rangle,\\ &= \langle T, g'\phi\rangle - \langle T, (g\phi)'\rangle,\\ &= \langle g'T, \phi\rangle + \langle T', g\phi\rangle,\\ &= \langle g'T, \phi\rangle + \langle gT', \phi\rangle,\\ &= \langle g'T + gT', \phi\rangle\end{aligned}$$

□

On pourra de nouveau lire la preuve alternative de la proposition 6.25, page 97.♠

6.7. Série de distributions

En utilisant la définition 6.28 page 72 de la convergence d'une suite de distribution et le théorème (6.30), on donne la définition suivante

DÉFINITION 6.54 (Série de distributions). Soit une suite $(T_n)_n$ de distribution. On suppose que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la série numérique de terme général $\langle T_n, \phi \rangle$ converge, c'est-à-dire

$$\exists l_\phi \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle T_n, \phi \rangle = l_\phi.$$

Alors l'application T qui a ϕ associe l_ϕ est une distribution (et c'est donc la somme $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ vue comme limite au sens des distributions).

On définit naturellement de la même façon la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n$.

On a donc, par définition,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_n, \phi \rangle. \tag{6.80}$$

LEMME 6.55. *Soient (T_n) une suite de distributions sur l'intervalle ouvert Ω. Si la série de distribution $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge, alors on a la série de distribution $\sum_{n=0}^{\infty} T'_n$ converge et*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} T'_n. \tag{6.81}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire, une fois de plus, les différentes définitions que l'on a vues : on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right)', \phi \right\rangle &= -\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \phi' \right\rangle, \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \langle T_n, \phi' \rangle, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T'_n, \phi \rangle, \\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} T'_n, \phi \right\rangle,
\end{aligned}$$

cette série numérique convergeant, puisqu'elle est égale à $\langle \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \phi' \rangle$ qui converge. □

C'est donc très facile de dériver terme à terme !

On renvoie aux exemples 6.64 page 110 et 6.65 page 111 de la version longue. ♠

Voir La section 6.9 page 112 de la version longue. ♠

Voir La section 6.10 page 113 de la version longue. ♠

6.8. Généralisation des distributions définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$

On peut aussi définir les distributions définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, où est un entier non nul comme c'est fait dans [Bal91].

Chapitre 7

Produit de convolution pour les distributions

Ce chapitre a été simplifié. Voir la version précédente (abandonnée) dans [Bas21, chapitre : "Produit de convolution pour les distributions"].

Dans tout ce chapitre, toutes les fonctions et distributions sont définies sur $\Omega = \mathbb{R}$. Par abus de notation, on notera $\int f$ à la place de $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

7.1. Rappels sur la convolution de fonctions

Voir votre cours de OMI2, [Bre83, p. 66 à 69], [Rud92, p. 139 et 140] ou la section 7.1.1.

7.1.1. Définition de la convolution de fonctions

On rappelle la définition suivante :

Définition 7.1. Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy, \tag{7.1}$$

qui est définie presque partout sur $\mathbb{R}$. La fonction h appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Elle est appelée le produit de convolution [1] de f et de g et est notée $f * g$. On a aussi (voir définition R.1 page 257)

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \tag{7.2}$$

Remarquons que ce produit est commutatif : c'est-à-dire

$$f * g = g * f. \tag{7.3}$$

En effet, dans (7.1), posons (à x fixé) $u = x - y$. On a donc $y = x - u$ et $dy = -du$ et

$$\begin{aligned}(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)du, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)f(y)dy = (g * f)(x)\end{aligned}$$

On a aussi la linéarité :

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2. \tag{7.4}$$

Comme dans le chapitre 6, toutes les intégrales sur $\mathbb{R}$ sont notées $\int f$.

7.1.2. Propriété de la convolution de fonctions

Notons aussi

Proposition 7.2. *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ presque partout dérivables et telles que f' et g' soient dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et*

$$(f * g)' = f' * g = f * g'. \tag{7.5}$$

1. ou la convolution

Autrement dit, pour dériver un produit de convolution de fonctions, il suffit de dériver l'une des deux fonctions !

DÉMONSTRATION. Par dérivation sous le signe somme, on a

$$(f*g)'(x) = \int \frac{\partial}{\partial x}(f(x-y)g(y))dy = \int f'(x-y)g(y)dy = (f'*g)(x).$$

Par commutativité, on a aussi $(f*g)' = (g*f)' = g'*f = f*g'$. □

REMARQUE 7.3. Il suffit en fait qu'une seule des deux fonctions f ou g soient dérivable. Par exemple, si f l'est, on a en effet

$$(f*g)' = f'*g. \tag{7.6}$$

7.2. Produit de convolution pour les distributions

On pourra consulter, pour plus de détails, [Bal91, chapitre 5], [Pet98, chapitre IV] ou [Kib01, section 5.4].

7.2.1. Définition formelle du produit de convolution pour les distributions

Contrairement au chapitre 6, où toutes les notions ont été étendue « assez facilement » des fonctions aux distributions, la notion de produit de convolution pour les distributions est plus difficile à donner et nous commettrons quelques abus, en ne respectant pas toujours la rigueur des mathématiques !

Soient f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Admettons que l'intégrale double [2] suivante existe

$$I = \iint f(x)g(y)\phi(x+y)dxdy, \tag{7.8}$$

D'après le théoème de Fubini (voir par exemple [Bre83, chapitre IV], on a, d'une part,

$$I = \int\int f(x)g(y)\phi(x+y)dxdy = \int\left[\int f(x)g(y)\phi(x+y)dx\right]dy = \int g(y)\left[\int f(x)\phi(x+y)dx\right]dy,$$

et donc, puisque x et y sont muettes,

$$I = \int g(x)\left[\int f(y)\phi(x+y)dy\right]dx. \tag{7.9}$$

D'autre part, dans (7.8), on fait le changement de variable $x = u$ et $y = v-u$. On admet qu'il est justifié et que $dxdy = dudv$. On a donc

$$I = \iint f(u)g(v-u)\phi(v)dudv,$$

et, d'après le théorème de Fubini, on a donc

$$I = \int\int f(u)g(v-u)\phi(v)dudv = \int\left[\int f(u)g(v-u)du\right]\phi(v)dv = \int (f*g)(v)\phi(v)dv = \int (f*g)(x)\phi(x)dx.$$

◇ D'après (7.8) et (7.9), on a donc montré que

$$\int g(x)\left[\int f(y)\phi(x+y)dy\right]dx = \int (f*g)(x)\phi(x)dx. \tag{7.10}$$

On sait que $f*g \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, d'après le théorème 6.16 page 69, on a identifié $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ à une partie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on a donc

$$\int (f*g)(x)\phi(x)dx = \langle f*g, \phi\rangle. \tag{7.11}$$

Pour x réel, considérons la translatée de ϕ par x, la fonction notée $\phi(.+x)$ et définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (\phi(.+x))(y) = \phi(y+x). \tag{7.12}$$

REMARQUE 7.4. Parfois, on note aussi $\tau_x(\phi) = \phi(.+x)$.

2. Parfois, elle est aussi notée

$$I = \int f(x)g(y)\phi(x+y)dxdy. \tag{7.7}$$

La fonction $\phi(.+x)$ appartient encore à $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ainsi, à x fixé, on peut écrire, en considérant $f \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\int f(y)\phi(x+y)dy = \int f(y)(\phi(.+x))(y)dy$$

et donc

$$\int f(y)\phi(x+y)dy = \langle f, \phi(.+x)\rangle. \tag{7.13}$$

Si f n'est plus une fonction, mais une distribution, la quantité $\langle f, \phi(.+x)\rangle$ garde encore un sens et définit l'immage d'une application de x. Bref, compte tenu de (7.10), (7.11) et (7.13), on a

$$\langle f * g, \phi\rangle = \int g(x) \left[\int f(y)\phi(x+y)dy\right] dx = \int g(x)\langle f, \phi(.+x)\rangle dx \tag{7.14}$$

Cette dernière quantité peut aussi s'interpréter comme l'action de la fonction (distribution) g sur la fonction $x \mapsto \langle f, \phi(.+x)\rangle$:

$$\langle f * g, \phi\rangle = \langle g, \langle f, \phi(.+x)\rangle\rangle. \tag{7.15}$$

Cette égalité est valable pour tout fonction f, g dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous la prendrons comme *définition* du produit de convolution des deux distributions S et T :

$$\forall S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle S * T, \phi\rangle = \langle T, \langle S, \phi(.+x)\rangle\rangle. \tag{7.16}$$

dans la mesure où les quantités $\langle S, \phi(.+x)\rangle$ *et* $\langle T, \langle S, \phi(.+x)\rangle\rangle$ *sont définies* ; il suffit donc que l'application $x \mapsto \langle S, \phi(.+x)\rangle$ soit dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Dans l'égalité (7.16), on rappelle que l'on fait d'abord agir la distribution S sur la fonction test : $x \mapsto \phi(.+x)$, quantité qui dépend de x. On fait agir ensuite la distribution T sur la fonction $x \mapsto \langle S, \phi(.+x)\rangle$, qui est censée être dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

7.2.2. Définition du produit de convolution pour les distributions

Il est clair que l'application $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à ϕ associe $\langle T, \langle S, \phi(.+x)\rangle\rangle$ est linéaire (par linéarité de S et de T).

Définition 7.5. Soient S et T deux distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour x réel, la fonction notée $\phi(.+x)$ et définie par (7.12) est notée $\phi(.+x)$ et est appelée la translatée de ϕ par x. On suppose que la fonction $x \mapsto \langle S, \phi(.+x)\rangle$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, la distribution H définie [3] par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle H, \phi\rangle = \langle T, \langle S, \phi(.+x)\rangle\rangle. \tag{7.17}$$

est appelée le produit de convolution [4] de S et de T et est notée $S * T$.

Remarque 7.6. Notons que l'équation (7.14) permet d'écrire la relation (7.16) ou (7.17) sous une forme abusive suivante : on remplace la fonction $g \mapsto g(x)$ par la distribution x "$\mapsto$" T_x et la fonction $f \mapsto f(y)$ par la distribution y "$\mapsto$" S_y, de sorte que par analogie avec l'intégrale double

$$\int g(x) \int f(y)\phi(x+y)dydx,$$

on notera (7.16) ou (7.17) sous la forme

$$\forall S_y, T_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle S_y * T_x, \phi\rangle = \big\langle T_x, \langle S_y, \phi(x+y)\rangle\big\rangle. \tag{7.18}$$

Bien entendu, on a, par construction,

3. C'est un abus de notation. Il faudra noter en théorie

$$\langle H, \phi\rangle = \big\langle T, x \mapsto \langle S, \phi(.+x)\rangle\big\rangle.$$

4. ou la convolution

PROPOSITION 7.7. *Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, la convolution des fonctions f et g définit une distribution égale au à la convolution des deux distributions associées à f et g.*

7.2.3. Condition suffisante d'existence du produit de convolution pour les distributions

Les conditions d'existence du produit de convolution de deux distributions est une condition suffisante d'existence mais n'est pas nécessaire. Elle peut être affaiblie (voir [Bal91, chapitre 5], [Pet98, chapitre IV]).

Pour cela, définissons (en généralisant la définition 6.3 page 66) le support d'une distribution : dans cette définition, Ω est un intervalle ouvert quelconque de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 7.8. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(1) Pour tout ouvert ω inclus dans Ω, T est dite nulle sur ω si et seulement si, pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est inclus dans ω, on a $\langle T, \phi \rangle = 0$.

(2) Le support de T est le complémentaire dans Ω de la réunion des ouverts de Ω sur lesquel T est nulle, c'est-à-dire sur le plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

On note Supp(T), le support de T.

Une définition équivalente est donnée par

DÉFINITION 7.9. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Un point x appartient au support de T si et seulement si pour toute boule ouverte B de centre x et incluse dans Ω, il existe une fonction test à support dans B telle que $\langle T, \phi \rangle$ soit non nul.

$\diamondsuit$

Par exemple, le support de la distribution associée à une fonction à support compact est ce support. Le support de δ_a est $\{a\}$.

Pour plus de détails, voir [Bal91, section II.2].

Dans ce cas, on a

PROPOSITION 7.10. *Le produit de convolution de distributions S et T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est défini si l'une des deux conditions suivante est assurée :*

— *l'une au moins des deux distributions est à support borné ;*

— *S et T ont toutes deux des supports d'un seul même coté de 0 (par exemple, ils sont tous les deux inclus dans $\mathbb{R}_+$).*

D'autres conditions suffisantes d'existence plus faibles pourraient être choisies.

On a aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 7.11. *Soient S et T deux distributions dont le produit de convolution existe. On a alors*

$$Supp(S * T) \subset \overline{Supp(S) + Supp(T)}. \tag{7.19}$$

DÉMONSTRATION. Voir [Lam08, Exercice 87, chapitre 7]. $\square$

$\diamondsuit$

REMARQUE 7.12. On introduit parfois $\mathcal{D}'_+$, l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Par exemple si f est une fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$ et dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ou δ sont des éléments de $\mathcal{D}'_+$. Pour plus de détails, voir [Kib01 ; Pet98]. Ainsi, d'après la proposition 7.10, $S * T$ est défini dès que S et T sont dans $\mathcal{D}'_+$.

REMARQUE 7.13. D'après la proposition 7.11, $S * T$ est dans $\mathcal{D}'_+$ dès que S et T sont dans $\mathcal{D}'_+$.

7.2.4. Propriétés du produit de convolution

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les produits de convolutions évoqués existent.

PROPOSITION 7.14. *Pour tout couple (S,T) de distributions tels que $S*T$ existe, $T*S$ existe et vérifie*

$$S*T=T*S.$$

Si S est une distribution, si λ et μ sont deux réels et T_1 et T_2 sont deux distributions telles que $S*T_1$ et $S*T_2$ existent, alors $S*(\lambda T_1+\mu T_2)$ existe et

$$S*(\lambda T_1+\mu T_2)=\lambda S*T_1+\mu S*T_2.$$

Voir la proposition 7.15 page 118 de la version longue. ♠

Une proposition fondamentale est la suivante (on rappelle la notation 6.23 page 71) :

PROPOSITION 7.15. *Pour toute distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $\delta*T$ existe (donc $T*\delta$ existe et lui est égal) et on a*

$$\delta*T=T. \tag{7.20}$$

DÉMONSTRATION. Formellement, en considérant que δ et T sont des fonctions et en utilisant l'abus (6.8), on aurait :

$$\begin{aligned}
\langle\delta*T,\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\delta*T)(x)\phi(x)dx,\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}T(x-y)\delta(y)dy\right)\phi(x)dx,\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}T(x)\phi(x)dx,\\
&= \langle T,\phi\rangle.
\end{aligned}$$

Rigoureusement, mettons cette fois les mains dans le goudron ! Par définition et sous réserve d'existence :

$$\forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \langle\delta*T,\phi\rangle=\big\langle T,\langle\delta,\phi(.+x)\rangle\big\rangle.$$

Or, on a, à x fixé,

$$\langle\delta,\phi(.+x)\rangle=[\phi(.+x)]_{y=0}=\phi(x),$$

et donc cela définit bien une fonction test et en utilisant l'abus de notation déjà signalé dans la note 3 page 85

$$\langle\delta*T,\phi\rangle=\langle T,\phi(x)\rangle=\langle T,\phi\rangle$$

♢ □

On a de même

PROPOSITION 7.16. *Pour toute distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $\delta'*T$ existe (donc $T*\delta'$ existe et lui est égal) et on a*

$$\delta'*T=T'. \tag{7.21}$$

DÉMONSTRATION. Par définition et sous réserve d'existence :

$$\forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \langle\delta'*T,\phi\rangle=\langle T,\langle\delta',\phi(.+x)\rangle\rangle.$$

Or, on a, à x fixé,

$$\langle\delta',\phi(.+x)\rangle=-\phi'(x),$$

et donc cela définit bien une fonction test et

$$\langle\delta'*T,\phi\rangle=-\langle T,\phi'(x)\rangle=-\langle T,\phi'\rangle=\langle T',\phi\rangle.$$

□

On conclue par la dernière proposition fondamentale :

PROPOSITION 7.17. *Pour tout couple de distributions (S,T) tel que $S*T$ existe, on a*

$$(S*T)' = S'*T = S*T'. \tag{7.22}$$

Ce résultat généralise naturellement, la proposition 7.2.

DÉMONSTRATION. Supposons que $S*T$ existe. D'après la proposition 7.16, sa dérivée est donc égale à $\delta' * (S*T)$:

$$\delta' * (S*T) = (S*T)'. \tag{7.23}$$

Chacun des produit $\delta' * S = S'$, $\delta' * T = T'$ et $S*T$ existent et

$$\delta' * (S*T) = (\delta' * S) * T = S' * T. \tag{7.24}$$

On a aussi

$$\delta' * (S*T) = \delta' * (T*S) = (\delta' * T) * S = T' * S = S * T'$$

et donc

$$\delta' * (S*T) = S*T'. \tag{7.25}$$

On conclue grâce à (7.23), (7.24) et (7.25). □

On a de la même façon, pour toute distribution T

$$T'' = (T')' = (\delta' * T)' = (\delta')' * T = \delta'' * T,$$

et en dérivant n fois

$$T^{(n)} = \delta^{(n)} * T,$$

soit

PROPOSITION 7.18. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pour tout n entier, le produit $\delta^{(n)} * T$ existe (donc $T * \delta^{(n)}$ existe et lui est égal) et on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta^{(n)} * T = T^{(n)}. \tag{7.26}$$

REMARQUE 7.19. Si on note, pour toute distribution T, $T^{(0)} = T$, (7.26) est aussi valable pour $n = 0$.

On obtient alors comme pour la proposition 7.17 (preuve par récurrence),

PROPOSITION 7.20. *Pour tout couple de distributions (S,T) tel que $S*T$ existe, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (S*T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}. \tag{7.27}$$

Voir la remarque 7.22 page 120 de la version longue. ♠

7.3. Exemples d'applications : résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 1

Désormais, cette section fait partie du chapitre 8 ; voir section 8.1 du chapitre 8.

Chapitre 8

Applications des distributions : Équations différentielles de distributions

8.1. Résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 1

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \mathcal{F}. \tag{8.1}$$

L'"inconnue" est ici la distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La notion de condition initiale n'a pas de sens au sens de distributions. Nous reviendrons dessus plus bas. La résolution de cette équation différentielle est très proche de la suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{8.2}$$

où l'"inconnue" est ici la fonction y, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On renvoie à la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf` dont on s'inspire pour résoudre (8.1).

Nous allons

— en section 8.1.2, donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (8.1) ;

— en section 8.1.3.1, donner les réponses impulsionnelles, c'est-à-dire les solutions de (8.1) avec un second membre égal à δ ;

— en section 8.1.3.3, donner les solutions générales de l' 'équation différentielle (8.1) ;

— et enfin, en section 8.1.4, retrouver la solution générale connue d'une équation différentielle ordinaire bien connue, comme cas particulier.

8.1.1. Un lemme sur la "variation de la constante"

Lemme 8.1 (Variation de la constante). *La distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle* (8.1) *si et seulement si la distribution C définie par*

$$C = e^{bt/a} Y, \tag{8.3}$$

vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} e^{bt/a} \mathcal{F}. \tag{8.4}$$

Démonstration. Notons que l'équation (8.3) a un sens puisque l'on multiplie la fonction $\mathcal{C}^\infty$ $e^{bt/a}$ (qui devrait être notée en toute rigueur $e^{b\cdot/a}$) par la distribution C. Elle est équivalente à

$$Y = e^{-bt/a} C. \tag{8.5}$$

On a alors, en utilisant la proposition 6.53

$$\begin{aligned} aY' + bY &= = a\left(e^{-bt/a}C' - \frac{b}{a}e^{-bt/a}C\right) + be^{-bt/a}C, \\ &= ae^{-bt/a}C' + \underbrace{\left(-be^{-bt/a}C + be^{-bt/a}C\right)}_{\text{quantité nulle}}, \end{aligned}$$

et donc, en disivant par $ae^{-bt/a}$, non nul, on constate que (8.1) est équivalent à (8.4). □

8.1.2. Résolution générale de l'équation homogène associée (EHA)

LEMME 8.2 (Résolution générale de l'équation homogène associée). *Y est solution de l'équation homogène associée*

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = 0, \tag{8.6}$$

si et seulement si il existe une constante c telle que

$$Y = ce^{-bt/a}. \tag{8.7}$$

Dans ce cas, Y est une distribution-fonction.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le lemme 8.1 avec $\mathcal{F} = 0$, selon lequel y est solution de (8.6) ssi la fonction C définie par (8.3) vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = 0, \tag{8.8}$$

ce qui est donc équivalent, d'après la proposition 6.46, à l'existence d'une constante c telle que $C = c$, ce qui est équivalent à (8.6) en revenant à Y donné par (8.5). □

8.1.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"], on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. Ici, nous utiliserons la recherche d'une solution particulière.

8.1.3.1. Recherche de la solution générale dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ (réponse impulsionnelle).

La réponse impulsionnelle est la solution de (8.1) dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$: on considère donc l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \delta. \tag{8.9}$$

PROPOSITION 8.3 (Réponses impulsionnelles). *La distribution Y est solution de* (8.9) *ssi il existe une constante c telle que*

$$Y = ce^{-bt/a} + Y_0, \tag{8.10}$$

où la distribution-fonction Y_0 est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}e^{-bt/a}, & \textit{si } t > 0, \\ 0, & \textit{si } t < 0. \end{cases} \tag{8.11}$$

ce qui est équivalent à

$$Y_0 = \frac{1}{a}e^{-bt/a}H, \tag{8.12}$$

où H est la fonction de Heaviside.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer de nouveau le lemme 8.1 dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ selon lequel y est solution de (8.6) ssi la fonction C définie par (8.3) vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a}e^{bt/a}\delta$$

ce qui est équivalent, d'après l'équation (6.75) de la proposition 6.51

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} e^{b/a \times 0} \delta,$$

soit

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} \delta,$$

ce que l'on peut écrire encore sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \left(C - \frac{1}{a} H \right)' = 0. \tag{8.13}$$

L'équation (8.13) est donc équivalente, d'après la proposition 6.46, à l'existence d'une constante c telle que

$$C - \frac{1}{a} H = c,$$

soit

$$C = c + \frac{1}{a} H,$$

ce qui est équivalent à (8.10) en revenant à Y donné par (8.5). □

8.1.3.2. Recherche d'une solution particulière dans le cas général.
Nous allons donc maintenant le résultat très important, spécifique aux distributions : une solution de la solution générale est le produit de convolution de la réponse impulsionnelle par le second membre.

Lemme 8.4 (Une solution particulière dans le cas général). *Une solution de* (8.1) *est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{8.14}$$

où Y_0 *est donnée par* (8.12). *On admettra que ce produit existe*[1].

Démonstration. Notons que d'après la proposition 8.3, en prenant $c = 0$ dans (8.10), une solution de (8.9) est donnée par $Y = Y_0$. On a donc

$$aY_0' + bY_0 = \delta. \tag{8.15}$$

Utilisons pour conclure les deux égalités fondamentales du cours : les équations (7.20) et (7.22) qui impliquent successivement, en considérant Y défini par (8.14) :

$$\begin{aligned} aY' + bY &= a(\mathcal{F} * Y_0)' + b(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a\mathcal{F} * Y_0' + b\mathcal{F} * Y_0, \\ &= \mathcal{F} * (aY_0' + bY_0), \\ &= \mathcal{F} * (aY_0' + bY_0), \end{aligned}$$

et d'après (8.15)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

□

Remarque 8.5. L'égalité (8.15) peut aussi se retrouver à la main. De deux façons différentes, on peut montrer

$$Y_0' = -\frac{b}{a} e^{-bt/a} H + \frac{1}{a} \delta. \tag{8.16}$$

1. Tout du moins, on fera si possible l'hypothèse qui assure l'existence ce produit de convolution. Voir la proposition 8.8.

(1) À partir de la définition (8.12), on a

$$\begin{aligned}
Y_0' &= \left(\frac{1}{a}e^{-bt/a}H\right)', \\
&= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-bt/a}H', \\
&= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-bt/a}\delta, \\
&= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-b/a\times 0}\delta,
\end{aligned}$$

ce qui implique (8.16).

(2) Si on utilise la formule des sauts (proposition 6.35) et la définition (8.11) de Y_0, dont la dérivée usuelle vaut

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0'(t) = \begin{cases} -\frac{b}{a}e^{-bt/a}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{8.17}$$

et qui présente un saut égal à $1/a$ en zéro (voir figure 8.1). On a donc

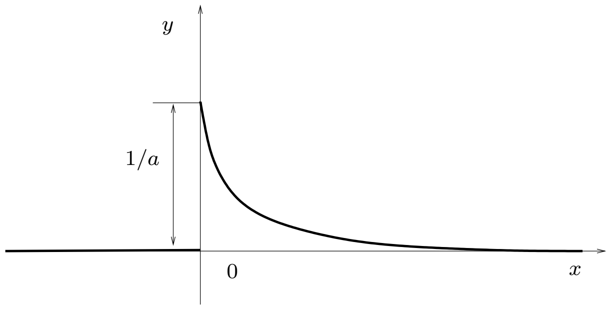


FIGURE 8.1. La distribution fonction Y_0.

$$Y_0' = y_0' + \frac{1}{a}\delta,$$

ce qui implique (8.16).

D'après (8.16), on a donc bien

$$\begin{aligned}
aY_0' + bY_0 &= a\left(-\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}\delta\right) + be^{-bt/a}H, \\
&= -be^{-bt/a}H + \delta + be^{-bt/a}H, \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

8.1.3.3. Résolution générale.

On peut enfin conclure, comme pour les équations différentielles usuelles, en utilisant le principe de superposition

PROPOSITION 8.6 (Résolution générale). *Les solutions de* (8.1) *sont données par : il existe une constante* c *telle que*

$$Y = \underbrace{\mathcal{F} * Y_0}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{8.18}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer Y une solution quelconque de (8.1) et de poser $Z = Y - Y_p$, où $Y_p = \mathcal{F} * Y_0$, où Y_0 est définie par (8.12). On a alors, par linéarité

$$aZ' + bZ = aY' + bY - \left(aY_p' + bY_p\right)$$

qui vaut $\mathcal{F}-\mathcal{F}=0$ puisque Y et Y_p sont toutes les deux solutions de (8.1), d'après le lemme 8.4. D'après le lemme 8.2 appliqué à Z, on a, d'après (8.7)

$$Z = ce^{-bt/a},$$

et donc

$$Y - Y_p = ce^{-bt/a},$$

dont on déduit (8.18). □

On peut remplacer la proposition 8.6 par la suivante, qui donne une méthode de résolution, tout à finalement identique à celle des équations différentielles habituelles de fonctions :

PROPOSITION 8.7 (Résolution générale (méthode alternative)). *Les solutions de* (8.1) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{Y_p}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{8.19}$$

où Y_p est donnée par

$$\mathcal{G} \text{ est une primitive de la distribution } e^{bt/a}\mathcal{F}, \text{ notée } \int e^{b./a}\mathcal{F}d.\,; \tag{8.20a}$$

$$Y_p = \frac{1}{a}e^{-bt/a}\mathcal{G} = \frac{1}{a}e^{-bt/a}\int e^{b./a}\mathcal{F}d. \tag{8.20b}$$

de sorte que (8.19) *s'écrit :*

$$Y = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a}e^{-bt/a}\int e^{b./a}\mathcal{F}d. \tag{8.21}$$

DÉMONSTRATION. Ce calcul est l'adaptation exacte de ce qui est fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un" et annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2", section "Équations différentielles d'ordre 1"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 8.1. D'après (8.4), C est égale à une primitive quelconque de $\frac{1}{a}e^{bt/a}\mathcal{F}$, dont on sait qu'elle existe, d'après l'annexe U. On conclut en écrivant, avec le formalisme (8.20), sur l'existence d'une constante c telle que

$$C = c + \frac{1}{a}\int e^{b./a}\mathcal{F}d.,$$

et en réutilisant (8.5) qui permet de conclure. □

◇

8.1.3.4. Traitement de la condition initiale.

Pour les distributions, la notion de condition initiale n'a *a priori* aucun sens car une distribution n'est pas nécessairement une distribution-fonction et donc la notion de valeur temporelle n'a pas lieu d'être.

Néanmoins, on peut donner une condition initiale grâce à la notion de support d'une distribution.

On renvoie à la remarque 7.12 page 86.

Nous dirons qu'un signal "vit dans $\mathbb{R}_+$" s'il est associé à une distribution de $\mathcal{D}'_+$. Si cette distribution est une distribution-fonction, être dans $\mathcal{D}'_+$ est équivalent à être nulle sur $\mathbb{R}_-$.

PROPOSITION 8.8 (Résolution générale avec une condition initiale particulière). *On suppose que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{D}'_+$. Le produit de convolution $\mathcal{F} * Y_0$ existe et l'unique solution de* (8.1) *dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{8.22}$$

où Y_0 est définie par (8.12).

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 7.10, le produit de convolution $\mathcal{F} * Y_0$ existe puisque $\mathcal{F}$ et Y_0 sont dans $\mathcal{D}'_+$. D'après la proposition 8.6, toutes les solutions de (8.1) sont données par (8.18). Si on impose que Y est dans $\mathcal{D}'_+$, alors nécessairement c est nul. En effet, pour toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}^*_-$, on a par définition (voir la définition 7.8)

$$0 = \langle Y, \phi\rangle = \langle F * Y_0, \phi\rangle + \left\langle ce^{-bt/a}, \phi\right\rangle.$$

on a $\langle F * Y_0, \phi\rangle = 0$ puisque F, Y_0 et $F * Y_0$ sont dans $\mathcal{D}'_+$ (voir remarque 7.13). On a donc

$$0 = \left\langle ce^{-bt/a}, \phi \right\rangle = c \int_{\mathbb{R}_-} e^{-bt/a}\phi(t)dt.$$

On peut choisir ϕ strictement positive sur son support et donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_-} e^{-bt/a}\phi(t)dt$ est strictement positive et donc c est nul. Ainsi, Y d'après (8.18), est unique est donnée par (8.22). $\square$

8.1.3.5. Généralisation.

(1) Si au lieu de se placer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on souhaite se placer sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ où Ω est un intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, la proposition 8.6 n'est plus valable parce qu'on ne peut pas définir la convolution sur un intervalle autre que $\mathbb{R}$. En, revanche, la propostion 8.7 reste tout à fait valable.

(2) Supposons, maintenant que a et b sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω est un intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. Au lieu de considérer l'équation différentielle (8.1), on considère l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad a(t)Y' + b(t)Y = \mathcal{F}, \tag{8.23}$$

où cette fois, $a(t)$ et $b(t)$ désignent (abusivement) les fonctions a et b. Dans ce cas, même dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$, la proposition 8.6 n'est plus valable. En effet, elle est fondée sur le calcul fait dans la preuve du lemme 8.14 qui ne marche pas ici ! En effet, si on considère la réponse impulsionnelle Y_0 de

$$a(t)Y_0' + b(t)Y_0 = \delta, \tag{8.24}$$

(on sait la déterminer, comme on verra plus bas), alors si on calcule $a(t)Y' + b(t)Y$ en posant $Y = Y_0 * \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= a(t)(\mathcal{F} * Y_0)' + b(t)(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a(t)(\mathcal{F} * Y_0') + b(t)(\mathcal{F} * Y_0), \end{aligned}$$

mais on ne peut conclure, comme dans la preuve du lemme 8.14, car, en général (sauf si a est constant !), si S et T sont deux distributions,

$$a(t)(S * T) \neq (a(t)S) * T.$$

et on ne peut donc plus conclure en écrivant

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= \mathcal{F} * (a(t)Y_0' + b(t)Y_0), \\ &= \mathcal{F} * (a(t)Y_0' + b(t)Y_0), \end{aligned}$$

et d'après (8.15)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

Cependant, la proposition 8.7 demeure, quant à elle, tout à fait valable !

Nous en donnons la généralisation :

Proposition 8.9 (Résolution générale (méthode alternative, plus générale)). *Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur Ω intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. On considère α une primitive quelconque de b/a. Les solutions de* (8.23) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{Y_p}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-\alpha(t)}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{8.25}$$

où Y_p est donnée par

$$\mathcal{G} \text{ est une primitive de la distribution } \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}, \text{ notée } \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d.\,; \tag{8.26a}$$

$$Y_p = e^{-\alpha(t)}\mathcal{G} = e^{-\alpha(t)} \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \tag{8.26b}$$

de sorte que (8.25) *s'écrit :*

$$Y = ce^{-\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)} \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \tag{8.27}$$

DÉMONSTRATION. Cela se fait exactement comme dans la preuve de la proposition 8.7 et comme on a fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un" et annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2", section "Équations différentielles d'ordre 1"]. C'est encore une méthode de variation de la constante ! Comme dans le lemme 8.1, on considère C défini de façon analogue à (8.3) :

$$C = e^{\alpha(t)}Y. \tag{8.28}$$

On a alors

$$Y = e^{-\alpha(t)}C \tag{8.29}$$

et donc

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= = a(t)\left(-\alpha'(t)e^{-\alpha(t)}C + e^{-\alpha(t)}C'\right) + b(t)e^{-\alpha(t)}C,\\ &= -b(t)e^{-\alpha(t)}C + a(t)e^{-\alpha(t)}C' + b(t)e^{-\alpha(t)}C,\\ &= a(t)e^{-\alpha(t)}C' \end{aligned}$$

et, on a, de façon analogue à (8.4),

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad C' = \frac{1}{a(t)}e^{\alpha(t)}\mathcal{F}. \tag{8.30}$$

Ainsi, C est égale à une primitive quelconque de $\frac{1}{a(t)}e^{\alpha(t)}\mathcal{F}$, dont on sait qu'elle existe, d'après l'annexe U. On conclut en écrivant, avec le formalisme (8.20), sur l'existence d'une constante c telle que

$$C = c + \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d.$$

et en réutilisant (8.29) ce qui permet de conclure. □

◊

8.1.4. Retour sur la formule de Duhamel

Nous allons pouvoir aussi utiliser les calculs précédents pour déterminer la solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{8.31a}$$

$$y(0) = y_0. \tag{8.31b}$$

Si f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait (voir par exemple [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"]) que la solution est donnée par la formule de Duhamel :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{1}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)}f(u)du. \tag{8.32}$$

On peut affaiblir l'hypothèse sur f que l'on suppose appartenir à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, la formule (8.32) est encore valable.

PROPOSITION 8.10 (Formule de Duhamel). *On suppose que f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. L'unique solution de* (8.31) *est donnée par* (8.32).

DÉMONSTRATION.

(1) On introduit tout d'abord la notation suivante :

NOTATION 8.11. Si z est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, on la prolonge sur $\mathbb{R}$ en définissant $\widetilde{z}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{z}(x) = \begin{cases} z(x), & \text{si } x \geq 0,\\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{8.33}$$

Si de plus z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\widetilde{z}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$ (au sens usuel, sauf en zéro) et grâce à la formule des sauts (proposition 6.35), on a

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{\widetilde{z}} = \widetilde{z}' + z(0)\delta. \tag{8.34}$$

En fait, si z n'est que dérivable presque partout sur $\mathbb{R}_+$, $\widetilde{z}$ n'est que dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et (8.34) est encore valable (voir proposition 6.48 de la version longue).

Enfin, on a

LEMME 8.12. *Soient v et w deux fonctions appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Alors, le produit de convolution $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ existe et est donné par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widetilde{v} * \widetilde{w})(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 0, \\ \displaystyle\int_0^x v(x-y)w(y)dy, & si\ x \geq 0. \end{cases} \tag{8.35}$$

La restriction de $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ à $\mathbb{R}_+$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. De plus, si v et w sont dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, alors la restriction de $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ à $\mathbb{R}_+$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

DÉMONSTRATION. On se contente de calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, le produit $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widetilde{v} * \widetilde{w})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du. \tag{8.36}$$

Remarquons que, pour tout u, x dans $\mathbb{R}$,

$$(u < 0 \text{ ou } x < u) \Longrightarrow \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u) = 0. \tag{8.37}$$

En effet, si $u < 0$, alors $\widetilde{w}(u) = 0$. Si $x < u$, alors $x - u < 0$ et $\widetilde{v}(x-u) = 0$.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$ fixé. Si $x < 0$, alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $u < 0$ ou $x < u$. En effet, si $u < x$, on a $u < x < 0$. Si $u > x$, alors $x < u$. Donc, d'après (8.37), la fonction $u \mapsto \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)$ est nulle et son intégrale égale à $(\widetilde{v} * \widetilde{w})(x)$ est nulle. Ainsi, $(\widetilde{v} * \widetilde{w})(x) = 0$. Au contraire, si $x > 0$, on a pour $u < 0$, $\widetilde{w}(u) = 0$ et pour $u > x$, on a $\widetilde{v}(x-u) = 0$. Ainsi, la fonction $u \mapsto \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)$ est nulle sur $]-\infty, 0[\cup]x, +\infty[$ et son intégrale se réduit donc à

$$h(x) = \int \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du = \int_0^x \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du = \int_0^x v(x-u)v(u)du.$$

Les autres résultats sont admis. □

(2) Démontrons la proposition. Supposons donc que y vérifie (8.31). Transformons l'équation différentielle (8.31) en une équation du type (8.1). On définit $\widetilde{y}$ grâce à la notation (8.11). D'après (8.34) appliqué à y, on a

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{\widetilde{y}} = \widetilde{y}' + y(0)\delta. \tag{8.38}$$

et donc

$$\begin{aligned} aT'_{\widetilde{y}} + bT_{\widetilde{y}} &= a\left(\widetilde{y}' + y(0)\delta\right) + b\widetilde{y}, \\ &= a\widetilde{y}' + b\widetilde{y} + ay_0\delta, \end{aligned}$$

et puisque y vérifie (8.31), on a donc $a\widetilde{y}' + b\widetilde{y} = \widetilde{f}$ et donc

$$aT'_{\widetilde{y}} + bT_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} + ay_0\delta.$$

On a donc (8.1) vérifiée par $T_{\widetilde{y}}$ avec

$$\mathcal{F} = \widetilde{f} + ay_0\delta. \tag{8.39}$$

Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{y}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, les distributions associées sont dans $\mathcal{D}'_+$ et d'après la proposition 8.8, l'unique solution de (8.1) (dans $\mathcal{D}'_+$) est donnée par

$$T_{\widetilde{y}} = \mathcal{F} * Y_0.$$

soit compte tenu de (8.39)

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{y}} &= \left(\widetilde{f} + ay_0\delta\right) * Y_0, \\ &= Y_0 * \widetilde{f} + ay_0\delta * Y_0, \end{aligned}$$

et donc

$$T_{\widetilde{y}} = Y_0 * \widetilde{f} + ay_0Y_0. \tag{8.40}$$

Puisque f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, alors $\widetilde{f}$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et d'après le lemme 8.12, la restriction de $Y_0 * \widetilde{f}$ appartient $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. D'après (8.35), l'équation (8.40) implique que pour tout [2] $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \widetilde{y}(t), \\ &= \frac{1}{a}\int_0^t e^{-b(t-y)/a} f(y)dy + y_0 e^{-bt/a}, \end{aligned}$$

ce qui est exaxtement (8.32).

□

2. en fait, cela est vrai presque partout sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 8.13.

(1) Ces résultats pourraient aussi être obtenus en utilisant les résultat de [Bas22, la Section "Équations différentielles d'ordre un" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"], fondés sur la méthode de la variation de la constante.

(2) Une autre façon de faire est de d'utiliser les transformations de Laplace (voir votre cours de OMI2).

(3) On peut aussi partir de l'expression donnée par (8.32) et vérifier que c'est bien la solution de (8.31).

(a) En effet, si y est donnée par (8.32), on a

$$y(0) = y_0 e^{-\frac{b}{a}\times 0} + \frac{1}{a}\int_0^0 e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du = y_0.$$

(b) De plus, on vérifie que si g est dérivable, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^t g(u-t)f(u)du\right)' = -\int_0^t g'(u-t)f(u)du + g(0)f(t). \tag{8.41}$$

Ainsi, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du\right)' = -\frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du + f(t),$$

et donc finalement, si on dérive (8.32),

$$\begin{aligned} ay'(t) + by(t) &= -y_0 b e^{-\frac{b}{a}t} + y_0 b e^{-\frac{b}{a}t} - \frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du + f(t) + \frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du, \\ &= f(t). \end{aligned}$$

(4) On laisse au lecteur le soin de vérifier que la solution de l'équation

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{8.42a}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{8.42b}$$

est

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_{t_0} e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a}\int_{t_0}^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du. \tag{8.43}$$

♢

8.1.5. Deux exemples

EXEMPLE 8.14.
Cet exemple est issu de [Pet98, p. 52].

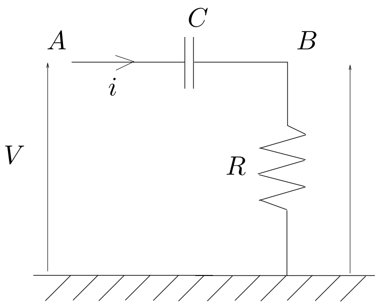


FIGURE 8.2. Le circuit dérivateur.

On étudie le circuit dérivateur représenté sur la figure 8.2. On pose $V = V_A$, $v = V_B$. En éliminant i entre

$$\begin{aligned} q &= C(V - v), \\ v &= Ri, \\ i &= \dot{q}, \end{aligned}$$

on obtient

$$v = Ri = RC(\dot{V} - \dot{v}),$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \dot{V}(t), \tag{8.44}$$

où

$$\tau = RC. \tag{8.45}$$

On suppose que pour $t \leq 0$, toute les tensions sont nulles. On a donc, en particulier,

$$\forall t \leq 0, \quad v(t) = V(t) = 0. \tag{8.46}$$

On suppose V connue et on cherche v.

(1) Compte tenu de (8.44) et de (8.46), on est donc exactement dans le cadre de la proposition 8.8 avec $a = 1$, $b = 1/\tau$ et $\mathcal{F} = \dot{V}$. D'après (8.22), on a donc en notant $Y = T_v$:

$$\begin{aligned} T_v &= \mathcal{F} * Y_0, \\ &= \dot{V} * Y_0, \\ &= (V * Y_0)', \\ &= V * Y_0'. \end{aligned}$$

On sait que

$$Y_0' = \delta - 1/\tau Y_0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_v &= V * (\delta - 1/\tau Y_0), \\ &= V * \delta - 1/\tau V * Y_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$T_v = V - 1/\tau V * Y_0.$$

(2) On suppose que V est une distribution-fonction, (notée v). D'après le lemme 8.12, on a donc, pour tout $t \geq 0$

$$v(t) = V(t) - \frac{1}{\tau}\int_0^t V(u) e^{-(t-u)/\tau} du$$

(3) Si on a $V(t) = 1$ pour $t \geq 0$, alors

$$v(t) = 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\int_0^t e^{u/\tau} du = 1 - e^{-t/\tau}[e^{u/\tau}] = 1 - e^{-t/\tau}[e^{t/\tau} - 1] = 1 - 1 + e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}.$$

On retrouve donc la réponse impulsionnelle, qui correspond bien à $y = \dot{H} = \delta$ et qui est une fonction discontinue en zéro.

Exemple 8.15. On s'intéresse à un circuit éléctrique constitué d'une inductance et d'une résistance et soumis à une tension $e(t)$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = e. \tag{8.47}$$

On suppose que

$$\forall t \leq 0, \quad i(t) = 0, \tag{8.48}$$

et que $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = E_0 H(t), \tag{8.49}$$

où E_0 est une constante.

On est encore exactement dans le cas de la proposition 8.8 avec $a = L$, $b = R$ et $\mathcal{F} = EH$. On alors

$$T_i = \mathcal{F} * Y_0 = E_0 H * Y_0.$$

De nouveau d'après le lemme (8.12)

$$\forall t \geq 0, \quad i(t) = \frac{E_0}{L} \int_0^t e^{-Ru/L} du = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-Rt/L}\right),$$

expression qui peut aussi être obtenue très rapidement à la main, comme c'est fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"] ! Cette fonction est continue en zéro.

8.2. Résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 2

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \mathcal{F}. \tag{8.50}$$

L'"inconnue" est ici la distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La notion de conditions initiales n'a pas de sens au sens de distributions. Nous reviendrons dessus plus bas. La résolution de cette équation différentielle est très proche de la suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \tag{8.51}$$

où l'"inconnue" est ici la fonction y, deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On renvoie à la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf` dont on s'inspire pour résoudre (8.50).

Le calcul est très proche de celui de la section 8.1 et, comme dans le cas des équations d'ordre un, la seule difficulté théorique est d'étudier l'équation homogène associée, dont le calcul est quasiment identique à celui des équations différentielles de fonctions. On s'inspire pour cela de la méthode élémentaire donnée dans le papier à la fois très complet et succinct de Daniel Perrin, disponible sur `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf`

Nous allons
- en section 8.2.2, donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (8.50) ;
- en section 8.2.3.1, donner une réponse impulsionnelle, c'est-à-dire une solution de (8.50) avec un second membre égal à δ ;
- en section 8.2.3.3, donner les solution générales de l' 'équation différentielle (8.50) ;
- et enfin, en section 8.2.4, retrouver la solution générale connue d'une équation différentielle ordinaire bien connue, comme cas particulier.

8.2.1. Un lemme sur la "variation de la constante"

LEMME 8.16. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et b, c et $r \in \mathbb{R}$. On considère une distribution Z et une distribution Y donnée par*

$$Y = e^{rt} Z. \tag{8.52}$$

On a alors dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$aY'' + bY' + cY = e^{rt} \left(aZ'' + (2ar + b)Z' + (ar^2 + br + c)Z.\right). \tag{8.53}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de calculer successivement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Y, Y' et Y'', en utilisant (8.52). On a respectivement

$$\begin{aligned}
Y &= e^{rt} Z, \\
Y' &= re^{rt} Z + e^{rt} Z', \\
Y'' &= r^2 e^{rt} Z + re^{rt} Z' + re^{rt} Z' + e^{rt} Z'', \\
&= r^2 e^{rt} Z + 2re^{rt} Z' + e^{rt} Z''.
\end{aligned}$$

On a donc
$$aY'' + bY' + cY = e^{rt}\left(ar^2 Z + 2arZ' + aZ'' + brZ + bZ' + cZ\right)$$
dont on déduit, après réarangement des termes, (8.53). □

◇

8.2.2. Résolution générale de l'équation homogène associée (EHA)

Comme dans le lemme 8.2, où intervient la distribution-fonction définie par (8.7) (et une constante quelconque) solution de (8.64), nous allons tout d'abord définir une fonction définie par deux constantes quelconques et qui sera solution de l'équation différentielle
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{8.54}$$
Le calcul est très ensuite proche de la résolution des équations différentielles de fonctions, pour l'équation homogène associée, donnée dans la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] et rappelé dans le lemme 8.18.

DÉFINITION 8.17 (Définition de la fonction ξ). L'équation caractéristique associée à (8.54) est
$$ar^2 + br + c = 0, \tag{8.55}$$
qui admet *a priori* deux solutions complexes r_1 et r_2. On considère alors les différents cas suivants selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Si $\Delta \neq 0$: on a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.

(a) Si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont réelles données par
$$r_k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{8.56}$$
On définit alors, pour C_1 et C_2 deux constantes données, la fonction ξ par
$$\xi(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{8.57}$$

(b) Si $\Delta < 0$, r_1 et r_2 sont complexes conjuguées ; on considère $(\omega, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ définis par
$$r_k = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\omega. \tag{8.58}$$
On définit [3] alors, pour A et B deux constantes données, la fonction ξ par
$$\xi(t) = e^{\alpha t}\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big). \tag{8.60}$$

(2) Si $\Delta = 0$: on a deux racines réelles confondues, égales à
$$r = -\frac{b}{2a}. \tag{8.61}$$
On définit alors, pour A et B deux constantes données, la fonction ξ par
$$\xi(t) = e^{rt}(At + B). \tag{8.62}$$

LEMME 8.18.
On reprend les notations de la définition 8.17.

(1) La solution générale de (8.54) est la fonction ξ donnée dans la définition 8.17, définie par deux constantes, notées (C_1, C_2) ou (A, B) selon les différents cas.

---

3. On peut aussi la mettre sous une autre forme équivalente :
$$\xi(t) = e^{\alpha t} A\cos(\omega t + \phi), \tag{8.59}$$

(2) *Pour tout couple de réel (y_0, y'_0) il existe (respectivement selon les cas 1a, 1b et 2) un unique couple respectivement noté (C_1, C_2) ou (A, B) tel que l'unique solution ξ définie donnée dans la définition 8.17, associée à ces constantes, vérifie les conditions initiales*

$$y(t_0) = y_0, \tag{8.63a}$$

$$y'(t_0) = y'_0. \tag{8.63b}$$

DÉMONSTRATION.

(1) Voir [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"].
(2) Calcul simple laissé au lecteur. Chaque couple est donné par un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui admet une unique solution.

□

◇
Le lemme 8.19 n'est que la copie du point 1 du lemme 8.18, adapté aux distributions.

LEMME 8.19 (Résolution générale de l'équation homogène associée). *Y est solution de l'équation homogène associée*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = 0, \tag{8.64}$$

ssi Y est la distribution-fonction solution de l'équation différentielle (8.54) *et est égale à ξ, fournie par la définition 8.17.*

DÉMONSTRATION.

(1) Premier cas : $\Delta = 0$. La racine unique r de l'équation caractéristique (8.55) est donnée par (8.61) et vérifie donc aussi

$$2ar + b = 0. \tag{8.65}$$

On considère Y solution de l'equation homogène associée et Z donnée par (8.52). D'après le lemme 8.53, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= aY'' + bY' + cY, \\ &= \left(aZ'' + (2ar + b)Z' + (ar^2 + br + c)Z.\right), \end{aligned}$$

et d'après (8.55) et (8.65)

$$= aZ'',$$

et puisque $a \neq 0$, on a donc $Z'' = 0$. D'après la proposition 6.46, la distribution Z' est constante et il existe donc une constante A telle que

$$Z' = A = (At)'.$$

Puisque $(Z - At)' = 0$, en utilisant de nouveau la proposition 6.46, cela implique qu'il existe une constante B telle que

$$Z - At = B,$$

et donc

$$Z = At + B,$$

et, en revenant à Y grâce à (8.52), on en déduit (8.62).

(2) Deuxième cas : $\Delta > 0$.
Nous avons deux racines r_1 et r_2 données par (8.56), dont on déduit (ce qui provient aussi de résultats plus généraux sur la somme de racines de polynôme)

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \tag{8.66}$$

On considère Y solution de l'equation homogène associée et, cette fois-ci, Z donnée par (8.52) où

$$r = r_1. \tag{8.67}$$

D'après le lemme 8.53, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= aY'' + bY' + cY, \\ &= \left(aZ'' + (2ar_1 + b)Z' + (ar_1^2 + br_1 + c)Z.\right), \end{aligned}$$

et donc, d'après l'équation caractéristique (8.55), on a

$$aZ'' + (2ar_1 + b)Z' = 0.$$

soit

$$a(Z')' + (2ar_1 + b)Z' = 0.$$

ou encore

$$Z'' + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) Z' = 0.$$

D'après le lemme 8.2, il existe une constante K telle que

$$Z' = Ke^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t}.$$

Puisque $\Delta \neq 0$, on vérifie que

$$2r_1 + \frac{b}{a} \neq 0.$$

On en déduit

$$Z' = \left(-\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t}\right)'$$

et, donc, d'après la proposition 6.46, qu'il existe une constante C_1 telle que

$$Z = -\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

soit, en notant

$$C_2 = -\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}},$$

on a

$$Z = C_2 e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

En revenant à Y grâce à (8.52) (avec (8.67)), on en déduit

$$\begin{aligned}
Y &= e^{r_1 t}\left(C_2 e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1\right),\\
&= C_2 e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}+r_1\right)t} + C_1 e^{r_1 t},\\
&= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{\left(-r_1-\frac{b}{a}\right)t},
\end{aligned}$$

et d'après (8.66), on a $-r_1 - \frac{b}{a} = r_2$ et donc

$$= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

ce qui montre (8.57).

(3) Troisième cas : $\Delta < 0$.

Ici, on utilise une méthode légèrement différente de celle utilisée dans `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf` afin de pouvoir l'adapter aux distributions.

Il suffit de reprendre les calculs du cas 2 en supposant cette fois-ci que les racines r_1 et r_2 sont complexes, données par (8.56). Il existe donc des complexes C_1 et C_2 tels que (8.57) ait lieu. Avec les notations (8.58), on a donc

$$Y = C_1 e^{(\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(\alpha-i\omega)t},$$

et donc

$$Y = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{8.68}$$

On écrit ensuite que la distribution-fonction Y est à valeurs réelles. On la note désormais sous la forme $Y = y$. D'après (8.68), on a

$$\overline{y(t)} = \overline{\left(e^{\alpha t}\right)}\left(\overline{C_1}\,\overline{\left(e^{i\omega t}\right)} + \overline{C_2}\,\overline{\left(e^{-i\omega t}\right)}\right)$$

et donc, puisque α et ω sont réels, on a

$$\overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\overline{C_1} e^{-i\omega t} + \overline{C_2} e^{i\omega t}\right) \tag{8.69}$$

De (8.68) et (8.69), on déduit

$$y(t) - \overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\left(C_1 - \overline{C_2}\right) e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right) e^{-i\omega t}\right). \tag{8.70}$$

On a donc, pour tout t, puisque $y(t)$ est réel

$$0 = y(t) - \overline{y(t)}$$

et donc, d'après (8.70),

$$\left(C_1 - \overline{C_2}\right) e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right) e^{-i\omega t} = 0.$$

Puisque cela est vrai pour tout t, on peut prendre deux valeurs différentes de t et vérifier que cela implique

$$C_1 = \overline{C_2} \text{ et } C_2 = \overline{C_1}$$

Si on remplace cela dans (8.68), on a donc

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1} e^{-i\omega t}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1 e^{i\omega t}}\right), \\ &= 2e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\left(C_1 e^{i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Si on écrit $C_1 = K + iK'$, avec K et K' réels, o a donc

$$\begin{aligned} C_1 e^{i\omega t} &= (K + iK')e^{i\omega t}, \\ &= (K + iK')\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right), \\ &= K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t) + i\left(K\sin(\omega t) + K'\cos(\omega t)\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Re}(y(t)) = K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t),$$

et, d'après ce qui précède

$$y(t) = 2e^{\alpha t}\left(K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t)\right)$$

ce qui permet de montrer (8.56), en posant $A = 2K$ et $B = -2K'$.

□

◊

La suite du calcul est très proche de celui de la section 8.1.

8.2.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre deux" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"], on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. Ici, nous utiliserons la recherche d'une solution particulière.

8.2.3.1. Recherche d'une solution particulière le cas où $\mathcal{F} = \delta$.

La réponse impulsionnelle est la solution de (8.50) dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$: on considère donc l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \delta. \tag{8.71}$$

La technique est légèrement différente de celle du lemme 8.3 mais le résultat en est assez proche. À la différence de ce lemme, on ne cherche pas toutes les solutions de (8.71) mais une solution (voir le lemme 8.21). Néanmoins, on montrera *a priori* dans la section 8.2.3.5 (voir proposition 8.26) qu'en fait on obtient bien toutes les solutions de (8.71).

Grâce au lemme 8.18, on définit tout d'abord la fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

DÉFINITION 8.20. Il existe une unique fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \tag{8.72a}$$

$$y(0) = 0, \tag{8.72b}$$

$$y'(0) = \frac{1}{a}. \tag{8.72c}$$

Elle est donnée par (en utilisant les notations du lemme 8.18) :

$$\text{si } \Delta > 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{a(r_1 - r_2)}., \tag{8.73a}$$

$$\text{si } \Delta < 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{\alpha t}\sin(\omega t)}{a\omega},, \tag{8.73b}$$

$$\text{si } \Delta = 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{rt} t}{a}. \tag{8.73c}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les différentes équations le lemme 8.18. Les différentes constantes intervenant dans ces fonctions sont données par (8.72b) et (8.72c) et qui fournissent les différents cas (selon les cas 1a, 1b et 2), données ici :

$$C_1 + C_2 = 0, \quad r_1 C_1 + r_2 C_2 = 1/a,$$

ou

$$A = 0, \quad B\omega + A\alpha = 1/a,$$

ou

$$B = 0, \quad rB + A = 1/a.$$

dont on déduit successivement

$$C_1 = \frac{1}{a(r_1 - r_2)}, \quad C_2 = -\frac{1}{a(r_1 - r_2}, \\ A = 0, \quad B = \frac{1}{a\omega}, \\ A = \frac{1}{a}, \quad B = 0,$$

dont on déduit (8.73). □

◊

Lemme 8.21 (Une réponse impulsionnelle). *Une solution particulière de* (8.71) *est donnée par la distribution-fonction* Y_0 *définie de la façon suivante :*

(1) On considère l'unique fonction ξ_0 *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *fournie par la définition 8.20 ;*

(2) On considère alors la distribution-fonction Y_0 *donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases} \tag{8.74}$$

ce qui est équivalent à

$$Y_0 = \xi_0 H, \tag{8.75}$$

où H *est la fonction de Heaviside.*

Démonstration. On cherche Y une solution particulière de (8.71) sous la forme

$$Y = yH, \tag{8.76}$$

où y est une fonction classe $\mathcal{C}^\infty$ ce qui est légitime comme le produit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par la distribution H. On calcule dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ successivement en utilisant la proposition 6.53 et l'équation (6.75) de la proposition 6.51

$$Y_0 = yH,$$

puis

$$\begin{aligned}Y_0' &= (yH)', \\ &= y'H + yH', \\ &= y'H + y\delta, \\ &= y'H + y(0)\delta,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}Y_0'' &= (y'H + y(0)\delta)', \\ &= (y'H)' + (y(0)\delta)', \\ &= y''H + y'H' + y(0)\delta', \\ &= y''H + y'\delta + y(0)\delta', \\ &= y''H + y'(0)\delta + y(0)\delta',\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}aY'' + bY' + cY &= a\left(y''H + y'(0)\delta + y(0)\delta'\right) + b\left(y'H + y(0)\delta\right) + c\left(yH\right), \\ &= ay''H + ay'(0)\delta + ay(0)\delta' + by'H + by(0)\delta + cyH, \\ &= \left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0)\delta\right)\delta + ay(0)\delta',\end{aligned}$$

et puisque Y doit être solution de (8.71), on a donc (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0)\delta\right)\delta + ay(0)\delta' = \delta,$$

soit

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0) - \delta\right)\delta + ay(0)\delta' = 0.$$

Pour cela, il suffit que

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H = 0, \tag{8.77a}$$

$$ay'(0) + by(0) - 1 = 0, \tag{8.77b}$$

$$ay(0) = 0. \tag{8.77c}$$

L'équation (8.77a) est vraie ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

ce qui est fait en vrai si (8.54) a lieu. Notons que (8.77b) et (8.77c) sont équivalentes à

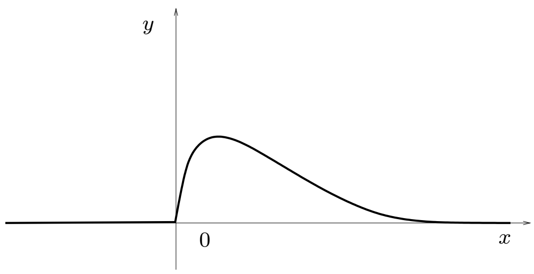
$$y(0) = 0, \tag{8.78a}$$

$$y'(0) = \frac{1}{a}. \tag{8.78b}$$

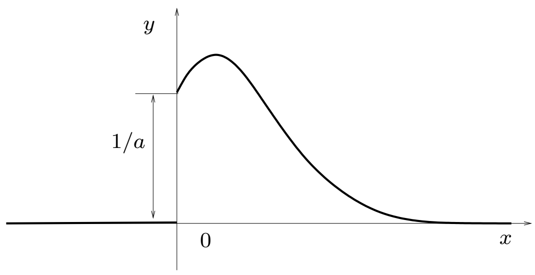
Choisissons y comme solution de l'équation différentielle (8.54) avec les conditions initiales (8.78). D'après la définition 8.20, alors est nécessairement y égale à ξ_0, ce qui permet de conclure, d'après (8.76) qui implique (8.75). □

Remarque 8.22. En fait, d'après (8.75), les valeurs de y pour $t < 0$ n'interviennent pas. De façon analogue à la figure (8.1), on peut tracer la distribution-fonction Y_0 et sa dérivée usuelle : voir figure 8.3.

◇



(a) la fonction



(b) sa dérivée usuelle

FIGURE 8.3. La distribution-fonction Y_0.

8.2.3.2. Recherche d'une solution particulière dans le cas général.
Le lemme suivant est l'analogue du lemme 8.4.

LEMME 8.23 (Une solution particulière dans le cas général). *Une solution de* (8.50) *est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{8.79}$$

où Y_0 est donnée par (8.75)*. On admettra que ce produit existe*[4].

DÉMONSTRATION. Notons que d'après le lemme 8.21, une solution de (8.71) est donnée par $Y = Y_0$. On a donc

$$aY_0'' + bY_0' + bY_0 = \delta. \tag{8.80}$$

Utilisons pour conclure les deux égalités fondamentales du cours : les équations (7.20), (7.22) et (7.26) pour $n = 2$, qui impliquent successivement, en considérant Y défini par (8.79) :

$$\begin{aligned} aY'' + bY' + cY &= a(\mathcal{F} * Y_0)'' + b(\mathcal{F} * Y_0)' + c(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a\mathcal{F} * Y_0'' + b\mathcal{F} * Y_0' + c\mathcal{F} * Y_0, \\ &= \mathcal{F} * (aY_0'' + b'Y_0 + cY_0), \end{aligned}$$

et d'après (8.80)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

□

8.2.3.3. Résolution générale.
On conclut enfin exactement comme pour la proposition (8.6).

PROPOSITION 8.24 (Résolution générale). *Les solutions de* (8.50) *sont données par : il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 8.17 (et donc définie par deux constantes) et une unique distribution Y_0 définie par* (8.75) *telles que*

$$Y = \underbrace{\mathcal{F} * Y_0}_{\textit{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{\xi}_{\textit{la solution générale de l'EHA}} . \tag{8.81}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer Y une solution quelconque de (8.71) et de poser $Z = Y - Y_p$, où $Y_p = \mathcal{F} * Y_0$, où Y_0 est définie par (8.75). On a alors, par linéarité

$$aZ'' + bZ' + cZ = aY' + bY' + cZ - \left(aY_p'' + bY_p\right)$$

4. Tout du moins, on fera implicitement l'hypothèse qui assure l'existence ce produit de convolution.

qui vaut $\mathcal{F} - \mathcal{F} = 0$ puisque Y et Y_p sont toutes les deux solutions de (8.71). D'après le lemme 8.19 appliqué à Z, on a donc $Z = \xi$. Il vient donc $Y - Y_p = \xi$, dont on déduit (8.81). □

8.2.3.4. Traitement de la condition initiale.

Proposition 8.25 (Résolution générale avec une condition initiale particulière). *On suppose que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{D}'_+$. L'unique solution de* (8.50) *dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{8.82}$$

où Y_0 est définie par (8.75)

Démonstration. D'après la proposition 8.24, toutes les solutions de (8.1) sont données par (8.81). Si on impose que Y est dans $\mathcal{D}'_+$, alors nécessairement ξ est nul. En effet, pour toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}^*_-$, on a par définition (voir la définition 7.8)

$$0 = \langle Y, \phi\rangle = \langle F * Y_0, \phi\rangle + \langle \xi, \phi\rangle.$$

on a $\langle F * Y_0, \phi\rangle = 0$ puisque F, Y_0 et $F * Y_0$ sont dans $\mathcal{D}'_+$ (voir remarque 7.13). On a donc

$$0 = \langle \xi, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}_-} \xi(t)\phi(t)dt. \tag{8.83}$$

Puisque (8.83) a lieu pour toute fonction test à support inclus dans $\mathbb{R}^*_-$, cela signifie que la fonction ξ est nulle. En effet, on peut considérer $\widetilde{\xi}$, la restriction de ξ à $\mathbb{R}_-$. D'après (8.83), on peut donc écrire, en considérant $T_{\widetilde{\xi}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_-)$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_-), \quad \left\langle T_{\widetilde{\xi}}, \phi\right\rangle = 0,$$

ce qui signifie d'après le théorème 6.16, que $T_{\widetilde{\xi}}$ est nulle, et $\widetilde{\xi}$ est donc (presque partout) nulle sur $\mathbb{R}_-$ et par continuité, nulle sur $\mathbb{R}_-$. Vue la forme de $\widetilde{\xi}$ comme restriction sur $\mathbb{R}_-$ de la fonction donnée dans la définition 8.17, et donc définie par deux constantes, on laisse au lecteur vérifier que, dans tous les cas, ces constantes sont nulles, ce qui implique la nullité de ξ. Ainsi, Y est unique et est donnée par (8.82). □

8.2.3.5. Retour sur la recherche de toutes les solutions dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ (réponse impulsionnelle).

En fait le lemme 8.21 permet d'obtenir toutes les réponses impulsionnelles, comme dans le lemme 8.3.

Proposition 8.26 (Réponses impulsionnelles). *Les solutions de* (8.71) *sont données par : il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 8.17 (et donc définie par deux constantes) telle que*

$$Y = \xi + Y_0, \tag{8.84}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 8.24 avec $\mathcal{F} = \delta$. Dans ce cas, $\mathcal{F} * Y_0 = \delta * Y_0 = Y_0$ et (8.81) implique (8.84). □

◇

8.2.4. Retour sur la formule de Duhamel

Nous allons pouvoir aussi utiliser les calculs précédents pour déterminer la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \tag{8.85a}$$

$$y(0) = y_0, \tag{8.85b}$$

$$y'(0) = y'_0, \tag{8.85c}$$

et obtenir une formule proche de la formule de Duhamel (8.32).

Proposition 8.27 (Formule de Duhamel). *On suppose que f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. L'unique solution de* (8.85) *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy + ay_0\xi_0'(t) + (ay_0' + by_0)\xi_0(t). \tag{8.86}$$

Plus précisement, en uilisant la définition 8.20, on a

$$\text{si } \Delta > 0, \quad y(t) = \frac{1}{a(r_1-r_2)}\int_0^t \left(e^{r_1(t-y)} - e^{r_2(t-y)}\right) f(y)dy + \frac{y_0}{r_1-r_2}\left(r_1e^{r_1t} - r_2e^{r_2t}\right) + \frac{ay_0'+by_0}{a(r_1-r_2)}\left(e^{r_1t}-e^{r_2t}\right), \tag{8.87a}$$

$$\text{si } \Delta < 0, \quad y(t) = \frac{1}{a\omega}\int_0^t e^{\alpha(t-y)}\sin(\omega(t-y))f(y)dy + \frac{y_0}{\omega}\left(\alpha e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \omega e^{\alpha t}\cos(\omega t)\right) + \frac{ay_0'+by_0}{a\omega}e^{\alpha t}\sin(\omega t), \tag{8.87b}$$

$$\text{si } \Delta = 0, \quad y(t) = \frac{1}{a}\int_0^t e^{r(t-y)}(t-y)f(y)dy + ry_0e^{rt}\left(rt+1\right) + \frac{(ay_0'+by_0)}{a}e^{rt}t. \tag{8.87c}$$

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 8.10.

Supposons donc que y vérifie (8.85). On supposera que y admet une dérivée seconde. Transformons l'équation différentielle (8.85) en une équation du type (8.50). On définit $\widetilde{y}$ grâce à la notation (8.11). Puisque y admet une dérivée seconde, $\widetilde{y}$ admet une dérivée seconde usuelle [5] sur $\mathbb{R}^*$. On a tout d'abord (8.38), que l'on peut dériver de nouveau sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T''_{\widetilde{y}} = \left(\widetilde{y}'\right)' + y(0)\delta'. \tag{8.88}$$

Puisque $\widetilde{y}'$ admet un saut égal à $y'(0)$ en zéro et que sa dérivée usuelle vaut $\widetilde{y}''$, on a donc d'après la formule de sauts (proposition 6.35)

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \left(\widetilde{y}'\right)' = \left(T_{\widetilde{y}'}\right)' = \widetilde{y}'' + y'(0)\delta.$$

et donc, d'après (8.88)

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T''_{\widetilde{y}} = \widetilde{y}'' + y'(0)\delta + y(0)\delta'. \tag{8.89}$$

On a donc, d'après (8.38) et (8.89) :

$$\begin{aligned} aT''_{\widetilde{y}} + bT'_{\widetilde{y}} + cT_{\widetilde{y}} &= a\left(\widetilde{y}'' + y'(0)\delta + y(0)\delta'\right) + b\left(\widetilde{y}' + y(0)\delta\right) + c\widetilde{y}, \\ &= \left(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y}\right) + ay(0)\delta' + \left(ay'(0) + by(0)\right)\delta, \end{aligned}$$

et donc, d'après les conditions initiales (8.85b) et (8.85c), on a

$$aT''_{\widetilde{y}} + bT'_{\widetilde{y}} + cT_{\widetilde{y}} = \left(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y}\right) + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta.$$

Puisque y vérifie (8.85), on a donc $a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y} = \widetilde{f}$ et donc

$$aT''_{\widetilde{y}} + bT'_{\widetilde{y}} + cT_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta. \tag{8.90}$$

On a donc (8.50) vérifiée par $T_{\widetilde{y}}$ avec

$$\mathcal{F} = \widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta. \tag{8.91}$$

Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{y}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, les distributions associées sont dans $\mathcal{D}'_+$ et d'après la proposition 8.25, l'unique solution de (8.71) (dans $\mathcal{D}'_+$) est donnée par

$$T_{\widetilde{y}} = \mathcal{F} * Y_0.$$

soit compte tenu de (8.91)

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{y}} &= \left(\widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta\right) * Y_0, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\delta' * Y_0 + \left(ay_0' + by_0\right)\delta * Y_0, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0Y_0' + \left(ay_0' + by_0\right)Y_0, \end{aligned}$$

5. en toute rigueur définie presque partout sur $\mathbb{R}$.

et d'après (8.75)

$$\begin{aligned}
&= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\left(\xi_0 H\right)' + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H,\\
&= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\left(\xi_0' H + \xi_0 H'\right) + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H,\\
&= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\xi_0\delta + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H,\\
&= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\xi_0(0)\delta + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H,
\end{aligned}$$

et d'après (8.72b)

$$= \widetilde{f} * Y_0 + 0 \times \delta + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H,$$

et donc

$$T_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} * Y_0 + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H. \tag{8.92}$$

On conclue enfin en utilisant (8.35) et (8.92) : pour tout [6] $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \widetilde{y}(t),\\
&= \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0(t) + ay_0\xi_0'(t),
\end{aligned}$$

ce qui est exactement (8.86). □

Remarque 8.28.

(1) Ces résultats pourraient aussi être obtenus en utilisant les résultat de [Bas22, la Section "Équations différentielles d'ordre deux" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"]. fondés sur la méthode de la double variation de la constante.

(2) Une autre façon de faire est de d'utiliser les transformations de Laplace (voir votre cours de OMI2).

(3) On peut aussi partirde l'expression donnée par (8.86) et vérifier que c'est bien la solution de (8.85), comme c'est fait dans la remarque 8.13. On peut remarquer que y est la somme de y_1 et y_2 (qui sont en fait respectivement une solution de l'équation particulière de (8.85a) la solution générale de l'équation homogène associée (8.54)) donnée par

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy,\\
y_2(t) &= ay_0\xi_0'(t) + (ay_0' + by_0)\xi_0(t).
\end{aligned}$$

Puisque ξ_0 (et donc ξ_0') sont solutions de (8.54)), par linéarité y_2 l'est aussi. Vérifions que y_1 est solution de (8.85a). D'après (8.41), on a successivement (grâce à (8.72b) et (8.72c)) :

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= \left(\int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy\right)',\\
&= \int_0^t \xi_0'(t-y)f(y)dy + \xi_0(0)f(t),\\
&= \int_0^t \xi_0'(t-y)f(y)dy,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
y_1''(t) &= \left(\int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy\right)'',\\
&= \left(\int_0^t \xi_0'(t-y)f(y)dy\right)',\\
&= \int_0^t \xi_0''(t-y)f(y)dy + \xi_0'(0)f(t),\\
&= \int_0^t \xi_0''(t-y)f(y)dy + \frac{1}{a}f(t).
\end{aligned}$$

On a donc puisque ξ_0 est solution de (8.54)

$$\begin{aligned}
ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) &= \int_0^t \left(a\xi_0''(t-y) + b\xi_0'(t-y) + c\xi_0(t-y)\right) f(t)dt + f(t),\\
&= f(t).
\end{aligned}$$

6. en fait, cela est vrai presque partout sur $\mathbb{R}$.

et par linéarité, on a donc

$$ay''(t) + by(t) + cy(t) = f(t).$$

Vérifions enfin les conditions initiales (8.85b) et (8.85c). D'après (8.72b) et (8.72c), on a donc

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_0^0 \xi_0(0-y)f(y)dy + ay_0\xi_0'(0) + (ay_0' + by_0)\xi_0(0), \\ &= y_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y'(0) &= \int_0^0 \xi_0'(0-y)f(y)dy + \xi_0(0)f(0) + ay_0\xi_0''(0) + (ay_0' + by_0)\xi_0'(0), \\ &= y_0(-b\xi_0'(0) - c\xi_0(0)) + (ay_0' + by_0)\xi_0'(0), \\ &= (-by_0 + ay_0' + by_0)\xi_0'(0) - cy_0\xi_0(0), \\ &= y_0', \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (par unicité de la solution).

♢

8.2.5. Exemples

EXEMPLE 8.29 (Une équation de distribution particulière). Chercher toutes les distributions $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' + Y = \delta, \tag{8.93}$$

et déterminer celles qui appartiennentà $\mathcal{D}'_+$.

D'après la proposition 8.24, il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 8.17 (et donc définie par deux constantes) et une unique distribution Y_0 définie par (8.75) telles que Y est donnée par (8.81). L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (8.93) est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $\pm i$. Ainsi, d'après la définition 8.17 et l'équation (8.75), on a

$$Y = \delta * Y_0 + \xi = Y_0 + \xi,$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A\cos t + B\sin t, \\ \xi_0(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

où A et B sont deux constantes quelconques et donc

$$Y = H\sin t + A\cos t + B\sin t. \tag{8.94}$$

Si, on impose que Y appartient à $\mathcal{D}'_+$, alors, d'après la proposition 8.82, la seule solution est donnée par

$$Y = H\sin t. \tag{8.95}$$

EXEMPLE 8.30 (Une équation de distribution particulière). Chercher toutes les distributions $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' - 3Y' + 2Y = \delta, \tag{8.96}$$

et déterminer celles qui appartiennentà $\mathcal{D}'_+$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, c'est-à-dire $(r-1)(r-2) = 0$, dont les racines sont 1 et 2. Comme dans l'exemple 8.29, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$Y = H\left(e^t - e^{2t}\right) + C_1e^t + C_2e^{2t}. \tag{8.97}$$

Si, on impose que Y appartient à $\mathcal{D}'_+$, alors, d'après la proposition 8.82, la seule solution est donnée par

$$Y = H\left(e^t - e^{2t}\right). \tag{8.98}$$

EXEMPLE 8.31 (Choc en mécanique). On considère un point matériel de masse m, soumis à un ressort linéaire de raideur k et à un amortissement visqueux C, dont le mouvement est donc gouverné par l'équation différentielle

$$\forall t, \quad mx''(t) + kx(t) + Cx'(t) = f(t), \tag{8.99}$$

où f est l'unique force extérieure appliquée. Si le solide est initialement au repos et que l'on commence appliquer une force f continue à partir de $t = 0$, la fonction x étant de classe C^2, $x(0)$ et $x'(0)$ sont nuls. Il est des cas où si on applique une force f non continue, on peut avoir une discontinuité de la vitesse initiale.

On suppose que le solide est initialement au repos et qu'on le soumet à un choc, appelé percussion, souvent considérée comme une grandeur infiniment grande appliquée sur un intervalle infiniment petit (autour de zéro, par exemple). Le bon cadre est celui des distribution, de prendre $f = F\delta$ et de considérer (8.99) au sens des distributions sur $\mathbb{R}$. La distribution $F\delta$ peut être considérée, comme la limite, au sens des disributions, quand ε tend vers zéro de la fonction valant $F\varepsilon$ sur $[-F\varepsilon/2, -F\varepsilon/2]$ comme nous le montrent l'exemple 6.29, l'exercice 6.2 de TD (avec $n = 1/\varepsilon$) ou le TP 2.1. On cherche donc la distribution $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telle que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = F\delta, \tag{8.100}$$

où F est une constante, ce qui est exactement le cadre de la proposition 8.25 (puisque $F\delta$ est dans $\mathcal{D}'_+$) avec $\mathcal{F} = F\delta$. On a donc, grâce à (8.82) :

$$X = \mathcal{F} * Y_0 = F\delta * Y_0 = FY_0,$$

Ainsi, d'après (8.75), X est une distribution-fonction, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à $F\xi_0$ sur $\mathbb{R}_+$ où ξ_0 est donnée dans la définition 8.20 (avec $a = m$, $b = C$ et $c = k$). Bref, on a donc

$$\forall t \geq 0, \quad X(t) = FY_0(t) = F\xi_0(t)H(t). \tag{8.101}$$

Ainsi, X est une distribution-fonction (voir figure 8.3), nulle sur $\mathbb{R}_-$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, continue en zéro, dont la dérivée admet une discontinuité en zéro.

EXEMPLE 8.32 (Infinités de chocs successifs en mécanique).

Traitons cet exemple sous la forme d'un exercice corrigé (donnée en examen à l'automne 2022).

Énoncé

Soient $\tau > 0$ et (F_n) une suite quelconque de réels.

(1) On cherche toutes les distributions $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n\delta_{\tau n}. \tag{8.102}$$

et celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$.

(a) Montrer que la distribution suivante existe

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n\delta_{\tau n}. \tag{8.103}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chercher tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{8.104}$$

(c) Par linéarité, trouver une solution particulière de (8.102) et conclure.

(2) Chercher une situation physique correspondant à $k = 0$ et $C > 0$?

Corrigé

(1) (a) Nous avons déjà vu dans l'exercice de TD 6.12 (voir remarque 6.5 page 99 des corrections de TD) que la distribution définie par

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{8.105}$$

existe ; il suffit pour cela de considérer la suite définie par $a_i = i\tau$ et de remplacer σ_{a_i} par F_i.

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{8.106}$$

D'après le lemme 8.21, Y_n, une solution particulière de (8.50) avec

$$a = m, \quad b = C, \quad c = K \tag{8.107}$$

et

$$\mathcal{F} = \delta_{nT}, \tag{8.108}$$

est donnée par (8.74) (où ξ_0 est fournie par la définition 8.20). Ainsi, d'après le lemme (8.23), $\widetilde{Y}_n$, une solution particulière de (8.106) est donnée par

$$\widetilde{Y}_n = \delta_{\tau n} * Y_n.$$

D'après (8.75), on a donc

$$\widetilde{Y}_n = \delta_{\tau n} * (\xi_0 H) \tag{8.109}$$

D'après ce que l'on a déjà vu dans l'exercice de TD 7.1, on sait que si f est une distribution-fonction, on a

$$\delta_{\tau n} * f = f(. - \tau n), \tag{8.110}$$

et d'après (8.109), on a donc

$$\widetilde{Y}_n = (\xi_0 H)(. - \tau n), \tag{8.111}$$

c'est-à-dire (on rappelle que ξ_0 est donnée par la définition 8.20 avec (8.107)) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{Y}_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\tau n, \\ \xi_0(t - \tau n), & \text{si } x \geq \tau n. \end{cases} \tag{8.112}$$

qui appartient donc à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(c) Il suffit de sommer ensuite toute les solutions données par (en les multipliant par F_i) (8.111).

- Tout d'abord, montrons qu'existe la somme suivante :

$$\widetilde{Y} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n). \tag{8.113}$$

Prenons (comme dans l'exercice de TD 6.12) une fonction test ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[A, B]$. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n=0}^{p} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle &= \sum_{n=0}^{p} F_n \langle (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{p} F_n \int_{\mathbb{R}} (\xi_0 H)(t - \tau n) \phi(t) dt, \end{aligned}$$

on pose de nouveau $u = t - \tau n$ dans chaque intégrale

$$= \sum_{n=0}^{p} F_n \int_{\mathbb{R}} (\xi_0 H)(u) \phi(u + \tau n) du,$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{p} (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{p} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du. \tag{8.114}$$

Puisque $n\tau$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq N, \quad \tau p \geq B. \tag{8.115}$$

Soit $p \geq N$, alors d'après (8.115), pour tout $n \geq p$, pour tout $u \geq 0$, on a $u + \tau n \geq \tau p \geq B$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du$ est nulle. Ainsi, d'après (8.114)

$$\forall p \geq N, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{p} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du,$$

qui est une somme finie, indépendante de p. On peut donc faire tendre p vers l'infini et donc

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du,$$

ce qui nous montre que la distribution définie par (8.113) est définie.

- Grâce au lemme 6.55 page 82, on a donc (par linéarité de la somme "infinie" en fait)

$$\begin{aligned} m\left(\widetilde{Y}\right)'' + k\widetilde{Y} + C\left(\widetilde{Y}\right)' &= m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right)'' + k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right) + C\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right)', \\ &= m\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n'' + k\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n' + C\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n', \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \left(m\widetilde{Y}_n'' + k\widetilde{Y}_n + C\widetilde{Y}_n'\right), \end{aligned}$$

et puisque $\widetilde{Y}_n$ est définie comme la solution de (8.106)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{nT},$$

et on a donc bien trouvé une solution notée $\widetilde{Y}$ de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{8.116}$$

- Enfin, comme dans la preuve de la proposition 8.24, on montre que toute les solutions de (8.116) sont la somme d'une solution particulière de (8.116) et de l'équation homogène associée, c'est-à-dire,

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n) + \xi, \tag{8.117}$$

où ξ, est fournie par la définition 8.17 (avec (8.107)).
Celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$ sont données, d'après la proposition 8.25, par

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n). \tag{8.118}$$

(2) En cours de rédaction

REPRENDRE (voir latex)

8.3. Un exemple de résolution d'équation différentielle (ordinaire) d'ordre 4

En cours de rédaction

8.4. Fonctions de Green : résolution d'équations différentielles par la convolution

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants, méthode qui a été vue dans les deux sections 8.1 et 8.2

On renvoie pour plus de détails à [Pet98, p. 79 à 83] ou à
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Green`
`http://mpej.unige.ch/~kunz/lectures/green.pdf`
`http://houchmandzadeh.net/cours/Math/chap_GreenFunction.pdf`

8.5. Formulations faibles ou énergétiques (pour résolutions d'équations aux dérivées partielles)

Nous allons étudier dans cette sections quatre problèmes classiques en mécanique, traduits par une équation différentielle et qui fait intervenir la dérivée usuelle bien connue des fonctions. Nous montrons que cette équation différentielle peut être avantageusement vue au sens des distributions et que vision permet de :

— donner un sens plus général au problème étudié, en permettant notamment de considérer des chargements plus généraux (notamment la présence de forces ponctuelles qu'interdit la formulation usuelle).
— fournir l'existence et l'unicité du problème posés.
— donner un cadre dans lequel une approximation numérique peut être envisagée et qui est à la base de la théorie des éléments finis, qu'il est impossible d'ignorer pour un ingénieur mécanicien digne de ce nom !

Nous verrons ensuite dans la section 8.5.5 de la version longue que la formulation faible n'est qu'une formulation énergétique, tout à fait identique au théorème des travaux virtuels qui vous connaissez (ou apprendrez). De même, dans le cas particulier de la poutre en flexion étudiée en section 6.2, nous verrons que la formulation faible introduite permet de retrouver deux théorèmes classiques de la RDM : le théorème de Castigliano et celui de la force unitaire.

Nous montrerons quelques illustrations de simulations effectivement réalisées, s'appuyant sur toute cette théorie.

On pourra consulter pour plus de détails

— [Sal11] présentation concise mais complète de la méthode des élément finis ; Comme le dit lui-même l'auteur : "Les étudiants n'étant pas familiers avec les notions de base de l'analyse fonctionnelle, [l'auteur a] préféré éviter toute sophistication qu'induirait inévitablement l'introduction des espaces de Sobolev. Pour simplifier la formulation variationnelle des EDP est présentée comme une méthode permettant d'affaiblir les hypothèses sur la solution en considérant des fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux plutôt que des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. L'inconvénient majeur de cette approche est l'absence de théorèmes assurant l'existence et l'unicité des solutions comme le ferait le théorème de Lax-Milgram. Ainsi, l'existence d'une solution est toujours postulée".
— [Roy05, chap. 6], très pédagogue, il part d'un exemple monodimensionnel très simple sur lequel il montre le traitement complet par formulation faible puis par éléments finis avant de refaire la même démarche sur le problème complet de l'élasticité linéaire ;
— [RT92] beaucoup plus matheux que la référence précédente, il donne les bases des formulations faibles et leur discrétisations pour différents problèmes ;
— [Duv90, chap. 6] le traitement complet des différents types de problèmes de l'élasticité linéaire.

Naturellement, cette partie n'est qu'une toute petite introduction et n'a pour but de se supplanter aux enseignements que vous recevrez en mécanique sur les éléments finis, mais au contraire de renforcer votre connaissance de ce problème, par une vision un peu plus théoricienne !

Remarque 8.33. Notons aussi qu'au cours de votre formation, vous avez peut-être appris d'autres méthodes que les éléments finis pour approcher numériquement certains problèmes, par exemple, celles des différences finies. Par exemple, si on discrétise le problème de la section 8.5.1, en prenant une corde fixée à ses deux extrémités, le problème discret obtenu par éléments finis est le même que celui obtenu par une simple discrétisation spatiale du laplacien en monodimensionnel, à la base du schéma aux différences finies. Ne rejetons pas pour autant les formulations faibles ! D'une part, une force ponctuelle, modélisée par un dirac ne peut être prise directement en compte par les différences finies. D'autres part, pour d'autres conditions aux limites (notamment en dérivées comme dans le cas traité), ce schéma aux différences finies n'est pas aussi performant.

8.5.1. La corde sur fondation élastique

8.5.1.1. Principe.
Cette partie reprend l'exemple de la corde sur fondation élastique [Roy05, chap. 6, p. 273–287].

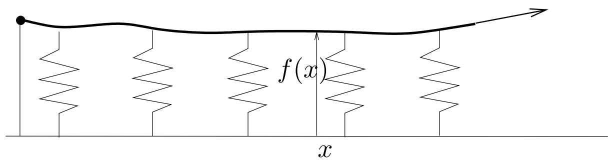


Figure 8.4. La corde sur fondation élastique.

Cette corde est fixée à son extrémité gauche $x = 0$, tandis que son extrémité droite $x = L$ est soumise à une tension T inclinée d'un angle par rapport à l'horizontale donné par $\tan\theta = \lambda$ où λ est un réel donné. Elle est soumise à une densité linéique de force g connue (voir figure 8.4). On adimensionne en posant $k = T = 1$ de sorte que l'on cherche $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in [0, L], \quad -f''(x) + f(x) = g(x), \tag{8.119a}$$

avec les conditions aux limites

$$f(0) = 0, \tag{8.119b}$$

$$f'(L) = \lambda. \tag{8.119c}$$

Attention, les notations ne sont pas exactement celles de [Roy05, chap. 6, p. 273–287], mais le problème est le même ! Dans (8.119), la fonction g est supposée continue, donc f doit être C^2.

(1) Posons $\Omega =]0, L[$. On part de la formulation (8.119a) que l'on multiplie par une fonction u et que l'on intègre sur $[0, L]$. On supposera pour cela que f est dans $H^2(\Omega)$ et g et u sont dans $L^2(\Omega)$. On obtient donc

$$-\int_0^L f''(x)u(x)dx + \int_0^L f(x)u(x)dx = \int_0^L g(x)u(x)dx. \tag{8.120}$$

Si u est dérivable, de dérivée dans L^2, une intégration par partie donne

$$-\int_0^L f''(x)u(x)dx = \int_0^L f'(x)u'(x)dx - [f'u]_0^L,$$

ce qui donne

$$-\int_0^L f''(x)u(x)dx = \int_0^L f'(x)u'(x)dx - f'(L)u(L) + f'(0)u(0), \tag{8.121}$$

et donc avec (8.119c) et (8.120), on obtient finalement

$$\int_0^L f'(x)u'(x)dx - \lambda u(L) + f'(0)u(0) + \int_0^L f(x)u(x)dx = \int_0^L g(x)u(x)dx.$$

On impose la condition suivante sur u :

$$u(0) = 0, \tag{8.122}$$

de sorte que

$$\int_0^L f'(x)u'(x)dx + \int_0^L f(x)u(x)dx = \lambda u(L) + \int_0^L g(x)u(x)dx. \tag{8.123}$$

Cette formulation est dite faible : on a besoin de moins d'hypothèse de régularité sur f *a priori* : il suffit que f' existe et soit dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire, f dans $H^1(\Omega)$ (voir annexe R). Dans ce cas, f est continue et $f(0)$ a un sens. On imposera la condition (8.119b) à f :

$$f(0) = 0. \tag{8.124}$$

Pour que les intégrales $\int_0^L f(x)u(x)dx$ et $\int_0^L f'(x)u'(x)dx$ existent, on imposera aussi à u d'être dans $H^1(\Omega)$. Puisque (8.122) a lieu, on imposera donc à u d'appartenir à l'espace V défini par

$$V = \left\{u \in H^1(\Omega), \quad u(0) = 0\right\}. \tag{8.125}$$

Bref, on a montré que si (8.119) a lieu, alors, pour tout $u \in V$, on a (8.123). On peut affaiblir cela et n'imposer à f son appartenance à V (assurant ainsi (8.124)).

Finalement, on considère V défini par (8.125), on définit a et $\mathcal{L}$ par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^L u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx, \tag{8.126a}$$

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{L}(v) = \lambda v(L) + \int_0^L g(x)v(x)dx. \tag{8.126b}$$

f est cherchée sous la forme de la formulation faible suivante :

$$f \in V \text{ et } \forall u \in V, \quad a(f,u) = \mathcal{L}(u). \tag{8.127}$$

Remarque 8.34. On a donc remplacé la formulation forte (8.119) (équation différentielle exigeant que f'' existe) par la formulation faible (8.127) (forme intégrale exigeant que f' soit intégrable).

La condition au bord (8.119b) a été intégrée dans la formulation faible (8.127), tandis que la condition au bord (8.119c) a apparamment disparu !

Cette formulation faible est en fait un théorème des travaux virtuels, bien connu en mécanique !

(2) Le résultat S.1 de l'annexe S permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (8.127). On admettra que a et l satisfont les hypothèses du lemme S.1.

En effet, ce problème est un cas particulier de (S.5) et admet donc une unique solution d'après le lemme S.1 page 259. Ici, a et $\mathcal{L}$ sont définie par (8.126). Les hypothèses du lemme S.1 sont vérifiées :

— On munit H^1 de son produit scalaire usuel. donné par

$$\langle u, v\rangle = \int_0^L u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx. \tag{8.128}$$

L'espace V est un sous-espace fermé de $H^1(0,L)$ comme noyau de l'application $\Phi : H^1(0,L) \to \mathbb{R}$ par $\Phi(v) = v(0)$, ce qui montre que V est un espace complet (voir preuve complète par exemple dans [Roy05, p. 276–277]).

— a est coercive et bilinéaire, car c'est exactement le produit scalaire de V !

— On vérifie que $\mathcal{L}$ est continue.

$\diamondsuit$

(3) Il reste maintenant à montrer que, réciproquement, la formulation faible (8.127) entraîne la formulation forte (8.119).

(a) La condition au limite (8.119b) a lieu puisque f est choisie dans V, qui l'impose !

(b) Soit ϕ une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$, ensemble inclus dans V. Ainsi, (8.127) appliqué à $u = \phi$ a lieu et donc puisque $\phi(L) = 0$

$$\int_0^L f'(x)\phi'(x) + f(x)\phi(x)dx = \lambda\phi(L) + \int_0^L g(x)\phi(x)dx = \int_0^L g(x)\phi(x)dx,$$

que l'on peut réécrire (puisque f et g sont dans $L^2(\Omega)$)

$$\langle f', \phi' \rangle + \langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle,$$

soit encore

$$-\langle f'', \phi \rangle + \langle f, \phi \rangle - \langle g, \phi \rangle = 0.$$

On a donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -f'' + f - g, \phi \rangle = 0, \tag{8.129}$$

ce qui traduit exactement que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad -f'' + f = g. \tag{8.130}$$

Si g et f sont dans $L^2(\Omega)$, alors, d'après (8.130), $f'' = f - g$ est dans $L^2(\Omega)$ et donc f est dans $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$-f''(x) + f(x) = g(x), \quad \text{p.p. sur } \Omega. \tag{8.131}$$

On est donc remonté à la formulation forte (8.119a), valable seulement presque partout et non partout.

(c) Il reste à montrer que (8.119c) a lieu. Notons que f étant dans $H^2(\Omega)$, f' est continue et $f'(L)$ a bien un sens. On reprend la formulation (8.127) :

$$\forall v \in V, \quad \int_0^L f'(x)v'(x) + f(x)v(x)dx = \lambda v(L) + \int_0^L g(x)v(x)dx. \tag{8.132}$$

Si on utilise de nouveau (8.121) « à l'envers », on a donc :

$$\int_0^L f'(x)v'(x)dx = -\int_0^L f''(x)v(x)dx + f'(L)v(L) - f'(0)v(0) = -\int_0^L f''(x)v(x)dx + f'(L)v(L),$$

et (8.132) donne donc

$$\forall v \in V, \quad -\int_0^L f''(x)v(x)dx + f'(L)v(L) + \int_0^L f(x)v(x)dx = \lambda v(L) + \int_0^L g(x)v(x)dx.$$

soit

$$\forall v \in V, \quad \int_0^L (-f''(x) + f(x) - g(x))v(x)dx = (-f'(L) + \lambda)v(L).$$

De (8.131), on tire donc

$$\forall v \in V, \quad (-f'(L) + \lambda)v(L) = 0.$$

Si on choisit $v \in V$ tel que $v(L) \neq 0$ (dont on admet que c'est loisible), on a donc

$$f'(L) = \lambda$$

et on retrouve (8.119c).

Ce problème constitue le problème modèle de l'équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites et qui sera généralisé au cours de la section 8.5.4 de la version longue.

On peut aussi vérifier que, grâce à cette formulation faible, on peut donner un sens plus général à (8.119a) en ne supposant plus que g est dans $L^2(0,L)$. On peut aussi le supposer égal à δ_l où $l \in]0,L[$ pour modéliser une force ponctuelle de norme G (exactement comme dans la section 6.2). La formulation faible (8.127) s'obtiendrait de la même façon en considérant (8.119a) valable dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ en remplaçant g par $G\delta_l$ et en l'appliquant formellement à $u \in V$: on aurait la formulation faible (ou variationnelle) est la suivante : On cherche f appartenant à V telle que

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L f'(x)u'(x) + f(x)u(x)dx = \lambda u(L) + Gu(l). \tag{8.133}$$

On consultera l'exercice 8.5 des TD où l'on étudie une situation analogue

Nous donnons maintenant une très rapide introduction à la méthodes des éléments finis.

8.5.1.2. Très très très rapide introduction à la méthodes des éléments finis.

Considérons le problème (8.127) que l'on « remplace » par le problème suivant : on cherche V_h un espace de dimension finie inclus dans V et on cherche f_h vérifiant

$$f_h \in V_h \text{ et } \forall u_h \in V_h, \quad a(f_h, u_h) = \mathcal{L}(u_h). \tag{8.134}$$

Remarquons que (8.127) implique en particulier

$$\forall u_h \in V_h, \quad a(f, u_h) = \mathcal{L}(u_h), \tag{8.135}$$

et par différence avec (8.134), on obtient donc

$$f_h \in V_h \text{ et } \forall u_h \in V_h, \quad a(f_h - f, u_h) = 0. \tag{8.136}$$

On a vu (dans (8.128)) que a peut être considéré comme le produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ de V, ainsi on peut réécrire (8.136) sous la forme

$$f_h \in V_h \text{ et } \forall u_h \in V_h, \quad \langle f_h - f, u_h \rangle = 0. \tag{8.137}$$

Autrement dit, $f - f_h$ est orthogonal à tous les éléments de u_h, donc f_h est la projection orthogonale de f sur

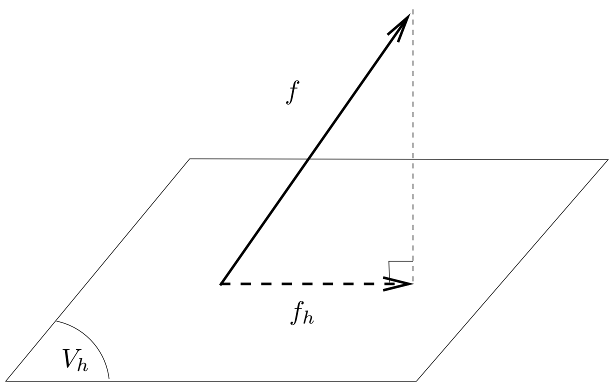


FIGURE 8.5. f_h est la projection orthogonale de f sur V_h

V_h (voir figure 8.5). Quand h tend vers 0, la dimension de V_h tend vers l'infini et V_h « tend » vers V autrement dit f_h tend vers f. L'approximation élément fini f_h de f tend donc vers f.

La mise en œuvre de la recherche de l'espace V_h constitue une étape de la discrétisation par éléments finis.

La résolution du problème approché (8.134) se fait par l'intermédiaire d'un système linéaire. On pourra par exemple consulter l'exemple très pédagogique déjà cité [Roy05, chap. 6, p. 278–287].

Voir la section 8.5.2 page 151 de la version longue. ♠

Voir la section 8.5.3 page 154 de la version longue. ♠
Voir la section 8.5.4 page 154 de la version longue. ♠
Voir la section 8.5.5 page 154 de la version longue. ♠

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Nombres complexes

Cette annexe constitue l'annexe I (en partie enrichie et développée) de [Bas11b].

Cette annexe propose quelques rappels théoriques sur les complexes en section A.1, des exercices en section A.2 ainsi que plusieurs problèmes corrigés de géométrie en section A.3.

On pourra aussi consulter `http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe` ou [Vél00] et, pour un regard historique et culturel, on pourra se référer à l'ouvrage [EG99] (difficile !).

A.1. Quelques rappels théoriques

A.1.1. Notions de base

On rappelle que

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ avec } i^2 = -1. \tag{A.1}$$

On en déduit la somme, le produit et la division de deux complexes, mis sous forme algébrique (c'est-à-dire définis par (A.1)) :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b'), \tag{A.2a}$$

$$(a + ib).(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b), \tag{A.2b}$$

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{-ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}. \tag{A.2c}$$

On rappelle [1] aussi que, pour tout nombre complexe non nul $z = a + ib$, il existe un unique couple (r, θ) appartenant à $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta}, \tag{A.3}$$

où, par définition,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{A.4}$$

La forme (A.3) est appelée la forme exponentielle. On appelle ρ le module de z et on le note $|z|$; on appelle θ l'argument de z et on le note $\arg z$. Attention, dans le chapitre 2, section 2.5.4.1, l'argument est nécessairement dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Pour calculer (ρ, θ) à partir de (a, b) (ou réciproquement), il suffit de remarquer que (ρ, θ) désignent les coordonnées en polaires du point de coordonnées cartésiennes (a, b) (voir [Bas22, Annexe "Trigonométrie"]).

Voir l'annexe B page 144.

Remarque A.1. En toute rigueur, θ appartient à $\mathbb{R}$ et est donc défini à 2π près. On parle alors d'un argument de z.

---

1. Cela provient du fait qu'en notant (r, θ) les coordonnées polaires du point (a, b), on a

$$a = r\cos\theta,$$
$$b = r\sin\theta,$$

et donc

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin(\theta) = r\left(\cos\theta + i\sin(\theta)\right).$$

On choisit donc la convention (A.4), ce qui permet d'écrire (A.3).

L'avantage de l'usage de la notation exponentielle apparaît avec les formules suivantes

$$\rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}, \tag{A.5}$$

$$\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}. \tag{A.6}$$

Ainsi, la forme exponentielle est donc adaptée au calcul de produit et de rapport de nombres complexes alors que la forme algébrique est utilisée pour le calcul de somme de complexes.

A.1.2. Résolution d'équation du second degré

A.1.2.1. Extraction de "racine carrée". Tout nombre réel positif admet une racine carrée. Tout nombre complexe admet deux racines carrées. Attention, on ne parle pas de la racine d'un complexe [2].

Soit un nombre complexe z (non nul). Il existe une unique paire $\{z_1, z_2\}$ de complexes telle que

$$z_1 = -z_2 \text{ et } z_1^2 = z_2^2 = z. \tag{A.8}$$

On pose $z = a + ib$ et on cherche les nombres z_1 et z_2 sous la forme

$$Z = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$z = a + ib = Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha\beta = b/2. \end{cases} \tag{A.9}$$

Puisque $|Z|^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est connu, on déduit donc de (A.9) que

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{A.10}$$

Par somme et différence, on en déduit α^2 et β^2 :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right). \end{cases} \tag{A.11}$$

On vérifie que les deux quantités $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ et $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$ sont nécessairement positives. On en déduit donc alors α (aux signe près, deux solutions) et β (aux signe près, deux solutions), ce qui fait quatre solutions pour Z. On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par la seconde équation de (A.9) ; on obtient donc bien deux solutions opposées pour Z.

---

2. Dans $\mathbb{R}$, on rappelle que, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ est le seul nombre positif qui élevé au carré donne x. En effet, l'équation $y^2 = x$ a deux racines qui sont $\pm\sqrt{x}$. Dans $\mathbb{C}$, il n'existe pas de relation d'ordre (c'est-à-dire un moyen de classer les complexes) compatible avec les lois + et × comme dans $\mathbb{R}$; si c'était le cas, comme dans $\mathbb{R}$, tout nombre carré serait positif, ce qui est évidemment faux pour $i^2 = -1$!

De même, on n'utilise pas le symbole $\sqrt{}$ pour évoquer l'une des deux racines d'un complexe. On peut aboutir par exemple à l'aberration suivante :

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = i \times i = i^2 = -1. \tag{A.7}$$

Moyennant certaines conventions, on peut tout de même définir la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ et lever le paradoxe de (A.7). Plus de détails dans l'annexe E.

EXEMPLE A.2. Déterminons les racines carrées de $z = 5+12i$. On refait les calculs précédents[3] avec $a = 5$ et $b = 12$ et on obtient, selon (A.11),

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5^2+12^2}\right) = \frac{1}{2}(5+13) = 9, \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{5^2+12^2}\right) = \frac{1}{2}(-5+13) = 4. \end{cases}$$

On en déduit donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3, \\ \beta = \pm\sqrt{4} = \pm 2. \end{cases}$$

Selon (A.9), on a $\alpha\beta = b/2 = 6$; ainsi α et β sont de même signe et on en déduit que les racines carrées de $5+12i$ sont

$$Z = \pm(3+2i).$$

A.1.2.2. Résolution effective d'équation du second degré. Toute équation polynômiale du second degré à coefficients complexes possède exactement deux solutions[4] complexes.

Soient a, b, c trois complexes (avec a non nul). On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{A.12}$$

Excepté le fait qu'on ne peut parler de la racine du discriminant, les formules sont formellement identiques au cas réel : on pose

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

et on appelle δ l'une des racines carrées de Δ (obtenue grâce aux résultats de la section A.1.2.1). Les deux racines de (A.12) sont données par :

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}. \tag{A.13}$$

Elles sont distinctes si $\Delta \neq 0$ et confondues sinon.

Le lecteur vérifiera que si a, b et c sont réels, la formule (A.13) redonne les formules déjà connues dans $\mathbb{R}$.

A.1.3. Calcul de racines n-ièmes

Selon la note 4 du bas de la page 123, pour tout entier n non nul, tout nombre complexe admet exactement n racines n-ièmes. Plus précisément, si z appartient à $\mathbb{C}$ (non nul) , il existe n nombres complexes distincts deux à deux et notés $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ tels que

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad z_k^n = z. \tag{A.14}$$

Contrairement au cas $n = 2$ (vu en section A.1.2.1), on utilise la notation exponentielle : on détermine ρ et ϕ tels que

$$z = \rho e^{i\phi}.$$

On cherche $Z = Re^{i\Phi}$ tel que

$$Z^n = \left(Re^{i\Phi}\right)^n = R^n e^{in\Phi} = \rho e^{i\phi}.$$

Par identification, on en déduit donc que

$$\begin{cases} R^n = \rho, \\ n\Phi = \phi + 2k\pi, \end{cases} \tag{A.15}$$

3. Mieux vaut savoir les refaire que de se rappeler les formules (A.11) !

4. C'est aussi une des spécificité de $\mathbb{C}$ par rapport à $\mathbb{R}$. De façon plus générale, pour tout entier n non nuls, toute équation polynômiale de degré n à coefficients complexes possède exactement n solutions complexes

où k est un entier relatif. On montre alors, puisque R et ρ sont deux réels strictement positifs que (A.15) est équivalent à

$$\begin{cases} R = \sqrt[n]{\rho}, \\ \Phi = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } k \in \{0, ..., n-1\}. \end{cases}$$

Ainsi les n racines n-ièmes de $z = \rho e^{i\phi}$ sont données par

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}. \tag{A.16}$$

Exemple A.3. Le lecteur pourra montrer que

- les 2 racines carrées de 1 sont 1 et -1 ;
- les 3 racines cubiques de 1 sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$;
- les 4 racines quatrièmes de 1 sont 1, i, -1 et i.

On pourra aussi tracer ces différentes racines sur le cercle unité.

Le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$ est noté j. Le lecteur pourra vérifier que

$$1 + j + j^2 = 0,$$

et essayer de généraliser cette propriété pour les racines n-ièmes de l'unité. Ainsi, les racines troisièmes de 1 sont aussi 1, j et j^2.

Exemple A.4. Déterminer les racines troisièmes de $z = 2 + 2i$.

A.1.4. Applications à la géométrie

Selon la formule (A.5), un nombre complexe z multiplié par $Z = \rho e^{i\phi}$ donne un complexe dont le module est multiplié par ρ et dont l'argument est augmenté de ϕ.

Géométriquement, cela signifie que la similitude de centre l'origine, de rapport ρ et d'angle ϕ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe $\rho e^{i\phi} Z$ (voir figure A.1).

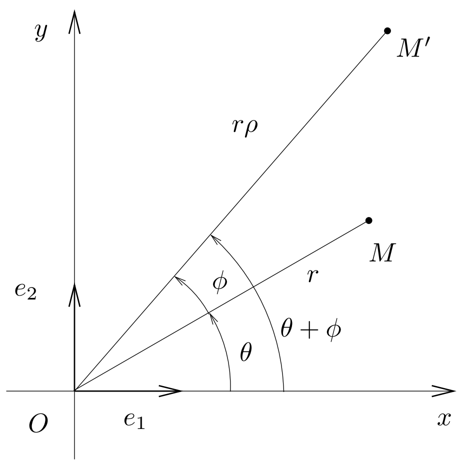


Figure A.1. La similitude de centre l'origine, de rapport ρ et d'angle ϕ.

Si $\rho = 1$, la similitude est une rotation d'angle ϕ.

On en déduit ainsi que la similitude de centre Ω, d'affixe ω, de rapport ρ et d'angle ϕ envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe z' avec :

$$z' - \omega = \rho e^{i\phi} (z - \omega). \tag{A.17}$$

On peut aussi déduire de (A.5) que si A, B et M sont trois points du plan d'affixe a, b et z, alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}}\right) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right). \tag{A.18}$$

On consultera les exercices et problèmes corrigés des sections A.2.5 et A.3.

A.1.5. Applications à la trigonométrie

Rappelons les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right), \tag{A.19}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right). \tag{A.20}$$

et de Moivre : pour tout entier n, pour tout réel θ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{A.21}$$

Rappelons que (A.5) permet de retrouver de façon mnémotechnique les deux formules

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta', \tag{A.22}$$

$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta. \tag{A.23}$$

En effet, on remplace dans

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'},$$

- $e^{i(\theta+\theta')}$ par $\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$,
- $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$
- et $e^{i\theta'}$ par $\cos\theta' + i\sin\theta'$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)\big(\cos\theta' + i\sin\theta'\big),\\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right).\end{aligned}$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient donc (A.22) et (A.23).

Avec un peu d'astuce et de métier, on peut retrouver à partir des deux formules (A.22) et (A.23) la plupart des formules de la trigonométrie, sans formulaire ! On pourra aussi, pour des preuves purement géométriques de ces résultats, consulter [Bas22, Annexe "Trigonométrie"].

Les formules (A.19), (A.20) et (A.21) permettent d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, ainsi que l'opération inverse, qui est appelée linéarisation.

Étudions les deux exemples suivants :

Exemple A.5. On a la formule de linéarisation suivante :

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\big(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\big).$$

En effet, on écrit successivement, grâce à (A.19) et en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \frac{1}{2^4}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4,\\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{4i\theta}+4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right),\\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right),\\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+4e^{2i\theta}+4e^{-2i\theta}+6\right),\\
&= \frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}+4\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+3\right),\\
&= \frac{1}{8}\big(\cos(4\theta)+4\cos(2\theta)+3\big)
\end{aligned}$$

Exemple A.6. Réciproquement, calculons $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ ou de $\cos\theta$ seul. On a

$$\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta, \tag{A.24a}$$

$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1. \tag{A.24b}$$

En effet, d'après la formule de Moivre (A.21) et du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta)+i\sin(4\theta) &= (\cos\theta+i\sin\theta)^4,\\
&= \cos^4\theta + 4i\cos^3\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta.
\end{aligned}$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on en déduit en particulier que

$$\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta,$$

ce qui montre (A.24a). On poursuit le calcul en remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$:

$$\begin{aligned}
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + \left(1-\cos^2\theta\right)^2,\\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 6\cos^4\theta + 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta,
\end{aligned}$$

ce qui montre (A.24b).

A.1.6. Applications à l'électricité

Voir exercice A.25 page 129.

A.2. Quelques exercices

A.2.1. Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice A.7. Calculer (sous la forme qui vous paraît le plus adaptée)

a) $\overline{5-4i}$ b) $\overline{(1-3i)(10+i)}$ c) $i(34+i)(2i-10)$ d) $(2+3i)^2$

e) $(2+3i)^3$ f) $(2+3i)^6$ g) $\dfrac{1}{3+5i}$ h) $\dfrac{1+i}{7+4i}$

Exercice A.8. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

a) $1+\sqrt{3}i$ b) $-1-i$ c) $-1+i$ d) $-3i$

e) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$ f) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}i}$ g) $\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}$

Exercice A.9. Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

a) $e^{i\pi}$ b) $2e^{\frac{i\pi}{4}}$ c) $\sqrt{7}e^{-2001i\pi}$ d) $5e^{\frac{7i\pi}{2}}$

EXERCICE A.10. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

EXERCICE A.11. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π. Calculer le module et l'argument de

$$z = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}.$$

A.2.2. Résolution d'équations du second degré

EXERCICE A.12. Déterminer des racines carrées (dans $\mathbb{C}$) des nombres suivants : 16, -16, $16i$, $9-40i$, $2i$, $7+6\sqrt{2}i$.

EXERCICE A.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{a) } 4x^2+4x+1=0,\\
&\text{b) } x^2-3x+2=0,\\
&\text{c) } x^2+4=0,\\
&\text{d) } x^2-x+5=0.
\end{aligned}$$

EXERCICE A.14. Dans le cas où les équations de l'exercice A.13 n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$, les calculer dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE A.15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{a) } z^2+4z-21=0,\\
&\text{b) } z^2-(6-4i)z+29-2i=0,\\
&\text{c) } z^2-4(1+i)z+8i=0,\\
&\text{d) } z^2-(9+2i)z+18i=0.
\end{aligned}$$

A.2.3. Racines n-ièmes

EXERCICE A.16. Calculer les racines 5-ièmes de l'unité.

EXERCICE A.17. Calculer les racines 3-ièmes de i et de $1+i$.

EXERCICE A.18. Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation

$$z^5 = 1+i.$$

EXERCICE A.19. Soit n un entier non nul. Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 0.$$

A.2.4. Application à la géométrie

EXERCICE A.20. Tracer dans complexe le plan l'image du point A d'affixe $3+i$ par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$ puis par la rotation de centre Ω d'affixe $5+2i$ et d'angle $\pi/3$.
Calculer les affixes de ces points.

Voir aussi le problème de la section A.3.2 page 131.

A.2.5. Exercices sur les similitudes

EXERCICE A.21. Caractériser les similitudes du plan (grâce aux complexes).

Corrigé

(1) Grâce à (A.17), on peut écrire que la similitude de centre Ω, d'affixe ω, de rapport $\rho > 0$ et d'angle ϕ envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe z' avec :

$$z' = az + b, \tag{A.25a}$$

avec

$$a = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}^*, \tag{A.25b}$$

$$b = \omega\left(1 - \rho e^{i\phi}\right), \tag{A.25c}$$

Si $a = 1$ (ce qui est équivalent à $\rho = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$), alors $b = 0$ et cette similitude est l'identité.

(2) Réciproquement, on se donne une application du plan dans lui-même définie par (A.25a) avec $a \in Ce^*$ et $b \in \mathbb{C}$. L'éventuel point fixe d'affixe ω vérifie

$$\omega = a\omega + b,$$

soit encore

$$\omega(1 - a) = b. \tag{A.26}$$

Si $a = 1$, alors $b = 0$ et la similitude est l'identité. On retrouve le cas évoqué ci-dessus. Tout point est invariant. Si $a \neq 1$, alors la similitude admet un point fixe unique défini par

$$\omega = \frac{b}{1-a}, \tag{A.27}$$

et on retrouve le cas évoqué ci-dessus.

Bref, une similitude est définie par (A.25) avec $a \neq 0$ et si $a = 1$ alors $b = 0$.

REMARQUE A.22. Le cas $a = 1$ et $b \neq 0$ correspond en fait à une translation de vecteur d'affixe b non nul et donc différent de l'identité. En fait, géométriquement, une similitude peut être aussi réduite à une translation. Plus de détails par exemple dans [LH90, Dixième leçon] ou la page 2 de `http://bruno.lpbayard.free.fr/MATHS/ESPACESVECTORIELS/MaGeo1-Ch6NbresComplexesEtGeometrie.pdf`.

Correction complète en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

EXERCICE A.23. Que donne le produit de deux similitudes ?

Corrigé

Le produit de deux (voire de plusieurs) similitude est encore une similitude ou une translation.

Voir aussi la remarque A.22 qui permet d'unifier cela.

Plus de détails par exemple dans [LH90, Dixième leçon] ou les page 2 et 3 de `http://bruno.lpbayard.free.fr/MATHS/ESPACESVECTORIELS/MaGeo1-Ch6NbresComplexesEtGeometrie.pdf`.

Correction complète en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

EXERCICE A.24. Une similitude est le produit d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Qu'en est-il si les centres ne sont pas identiques ?

Corrigé

Grâce aux résultats des exercices (A.21) et (A.23) on peut très bien supposer que les centres ne sont pas les mêmes.

Plus de détails par exemple dans [LH90, Dixième leçon].

Correction complète en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

A.2.6. Application à l'électricité

EXERCICE A.25. *Attention, dans cet exercice*, conformément à l'usage adopté en électricité, j désigne ici le complexe tel que $j^2 = -1$ et non l'une des racines troisièmes de l'unité, comme le veut l'usage en mathématique. On pourra donc noter l'intensité par i. Si X désigne une grandeur, $\underline{X}$ désignera la grandeur complexe associée.

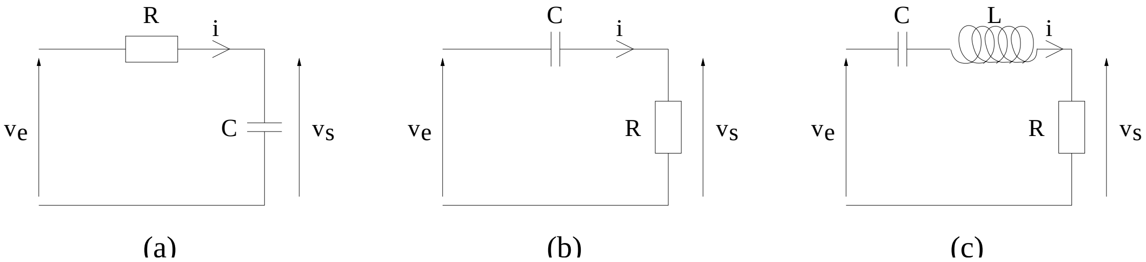


FIGURE A.2. Étude de quelques circuits électriques

(1) On étudie le circuit électrique représenté en figure (A.2)a. v_e désigne la tension d'entrée et v_s la tension de sortie. On suppose que

$$v_e = V_e \cos(\omega t).$$

Soit, en notation complexe,

$$\underline{v}_e = \underline{V}_e e^{j\omega t}.$$

On cherche à calculer $\underline{v}_s$.

Pourquoi l'impédance de la résistance R est égale à R ? Pourquoi l'impédance du condensateur C est égale à $1/(jC\omega)$?

(2) En déduire la fonction de transfert du circuit électrique en tension (c'est à dire le rapport $\underline{v}_s/\underline{v}_e$). On exprimera la réponse en fonction de ω et de $\omega_0 = 1/(RC)$.

(3) Identifiez la nature du filtre selon le domaine fréquentiel.

(4) Faites la même étude pour les circuits des figures (A.2)b et (A.2)c. Pour le deuxième montage, on notera $\omega_0 = 1/(RC)$ et pour le troisième

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{L\omega_0}{R}.$$

A.3. Plusieurs problèmes de géométrie

A.3.1. Caractérisation d'un triangle équilatéral direct

Énoncé.

Montrer que ABC est équilatéral (direct, dans cet ordre), si et seulement si les affixes respectives a, b et c des points A, B et C vérifient $a + jb + j^2c = 0$.

Corrigé.

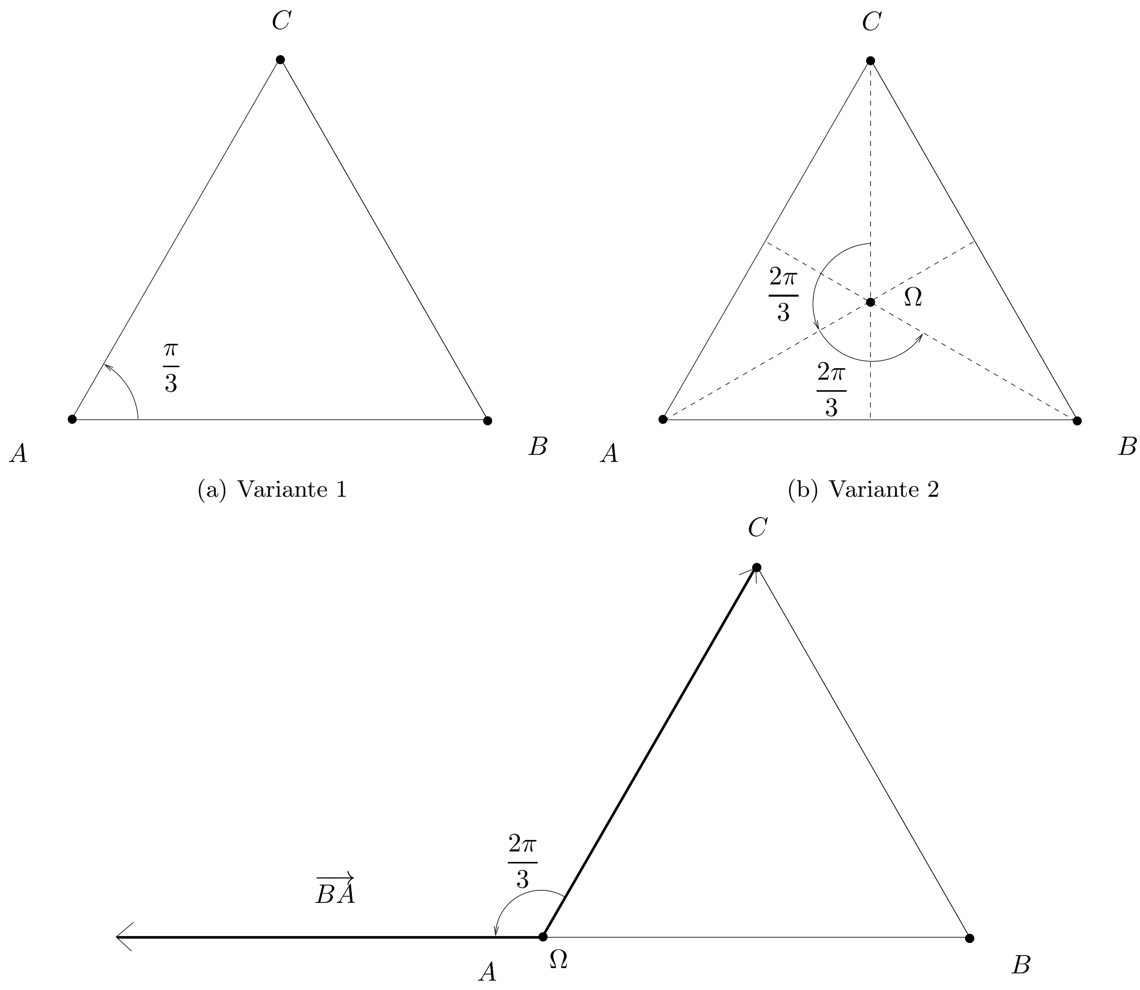
Ce résultat, très classique, est issu de l'exercice 19 de Christophe Jan dans `http://833duparc.free.fr/Nouveaux_Exercices_MPSI/Nombres_Complexes.pdf`

Donnons trois façons de procéder.

(1)

Remarquons simplement que ABC est équilateral (direct, dans cet ordre), si et seulement si, par exemple on passe du point B au point C par une rotation de centre A et d'angle $\pi/3$ (voir figure 3(a) page suivante), c'est-à-dire :

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a). \tag{A.28}$$



(a) Variante 1

(b) Variante 2

(c) Variante 3

FIGURE A.3. Le triangle équilatéral direct ABC dans les trois variantes de preuves.

Or

$$e^{i\pi/3} = -\overline{j}. \tag{A.29}$$

Ainsi (A.28) est équivalent à

$$c - a = -\overline{j}(b - a),$$

et puisque $j\overline{j} = 1$, c'est donc équivalent à

$$j(c - a) = a - b. \tag{A.30}$$

Enfin, on écrit que (A.30) est successivement équivalent à (car $1 + j + j^2 = 0$)

$$\begin{aligned} j(c-a) = a - b &\Longleftrightarrow j^2(c-a) = j(a-b), \\ &\Longleftrightarrow j^2c + jb = (j + j^2)a, \\ &\Longleftrightarrow j^2c + jb + a = 0, \end{aligned}$$

et on a donc bien

$$a + jb + j^2c = 0. \tag{A.31}$$

(2)

De façon plus fondamentale, pour faire apparaître plus explicitement le rôle de j, on écrit que ABC est équilateral (direct, dans cet ordre), si et seulement si il existe une rotation de centre Ω, d'affixe ω (qui s'avère être en fait le centre de gravité du triangle ABC), d'angle $2\pi/3$ (voir figure 3(b) page précédente), qui envoie C sur A et A sur B c'est-à-dire si et seulement si

$$a - \omega = e^{2i\pi/3}(c - \omega),$$
$$b - \omega = e^{2i\pi/3}(a - \omega),$$

Puisque $j = e^{2i\pi/3}$, c'est donc équivalent à

$$a - \omega = j(c - \omega),$$
$$b - \omega = j(a - \omega),$$

soit encore à

$$a - jc = \omega(-j + 1),$$
$$b - ja = \omega(-j + 1),$$

soit encore à

$$a - jc = b - ja,$$

ou

$$a - b = j(c - a).$$

On retrouve donc (A.30) et on finit le calcul comme dans la méthode 1.

(3)

Enfin, plus rapidement encore il suffit de remarquer que ABC est équilateral (direct, dans cet ordre), si et seulement si on passe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ au vecteur $\overrightarrow{BA}$ par une rotation d'angle $2\pi/3$ (voir figure 3(c) page précédente), c'est-à-dire si et seulement si

$$(c - a)e^{2i\pi/3} = a - b,$$

soit encore

$$(c - a)j = a - b.$$

On retrouve donc (A.30) et on finit le calcul comme dans la méthode 1.

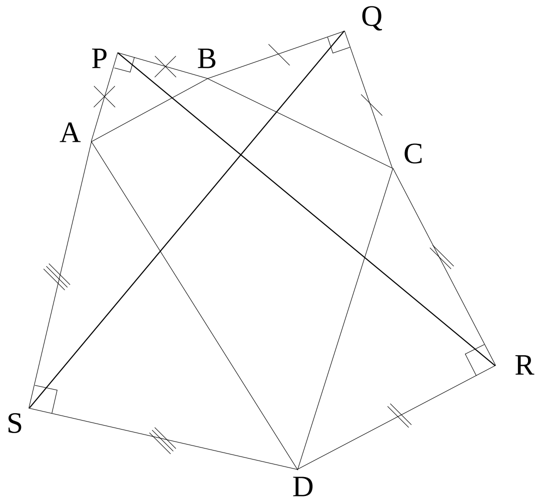
A.3.2. Problème sur un quadrilatère et deux segments orthognaux et de même longueurs

Énoncé.

On considère un quadrilatère $ABCD$ quelconque (cf. figure ci-dessus). On construit à l'extérieur de ce quadrilatère, quatre triangles rectangles isocèles ABP, BCQ, CDR et DAS. On note a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et p, q, r et s les affixes respectives des points P, Q, R et S.

(1) Traduire analytiquement, qu'il existe une rotation de centre P, d'angle $\pi/2$ qui envoie A sur B. En déduire l'expression de p :

$$p = \frac{ia - b}{i - 1}.$$



On admettra les expressions des autres affixes par permutation circulaire :

$$q = \frac{ib - c}{i - 1},$$
$$r = \frac{ic - d}{i - 1},$$
$$s = \frac{id - a}{i - 1}.$$

(2) En déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{SQ}$.

(3) Montrer que les distances PR et SQ sont égales et que les droites (PR) et (SQ) sont perpendiculaires.

Corrigé.

(1) On note a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et p, q, r et s les affixes respectives des points P, Q, R et S.

(2) On utilise analytiquement le fait qu'il existe une rotation de centre P, d'angle $\pi/2$ qui envoie A sur B. On utilise donc l'équation (A.17) avec

$$\omega = p,$$
$$\rho = 1,$$
$$\phi = \frac{\pi}{2},$$
$$z' = b,$$
$$z = a,$$

ce qui se traduit par

$$b - p = e^{\frac{i\pi}{2}}(a - p). \tag{A.32}$$

L'équation (A.32) est équivalente à :

$$b - p = i(a - p) = ia - ip,$$

et donc

$$p - ip = b - ia,$$

soit

$$p(i - 1) = ia - b,$$

et donc, on déduit l'expression de p :

$$p = \frac{ia - b}{i - 1}.$$

On admettra les expressions des autres affixes par permutation circulaire :

$$q = \frac{ib - c}{i - 1},$$
$$r = \frac{ic - d}{i - 1},$$
$$s = \frac{id - a}{i - 1}.$$

(3) On calcule alors

$$\begin{aligned} i(q - s) &= \frac{i}{i - 1}(ib - c - id + a), \\ &= \frac{1}{i - 1}(-b - ic + d + ia), \\ &= \frac{1}{i - 1}(ia - b - (ic - d)), \\ &= p - r, \end{aligned}$$

et donc

$$p - r = i(q - s),$$

ce qui traduit que l'on passe du vecteur $\overrightarrow{SQ}$ au vecteur $\overrightarrow{RP}$ par une rotation d'angle $\pi/2$ et donc que les distances PR et SQ sont égales et que les droites (PR) et (SQ) sont perpendiculaires.

A.3.3. Problème sur un triangle et deux segments orthognaux et de même longueurs

Donnons un exercice proche de celui de la section A.3.2.

Énoncé.

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle, trois triangles rectangles isocèles ABQ, BCR et ACS rectangles respectivement en Q, R et S.

(1) Montrer que les distances AR et QS sont égales et que les droites (AR) et (QS) sont perpendiculaires.

(2) Pouvez-vous en proposer une preuve purement géométrique (sans les complexes) ?

Corrigé.

(1) On note a, b et c les affixes respectives des points A, B et C et$q$, r et s les affixes respectives des points Q, R et S.

On utilise analytiquement le fait qu'il existe une rotation de centre Q, d'angle $\pi/2$ qui envoie A sur B. On utilise donc l'équation (A.32) déjà démontrée qui donne ici

$$b - q = i(a - q) = ia - iq,$$

et donc l'expression de q

$$q = \frac{ia - b}{i - 1}.$$

On admettra les expressions des autres affixes par permutation circulaire :

$$r = \frac{ib - c}{i - 1},$$
$$s = \frac{ic - a}{i - 1}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} i(q-s) &= \frac{i}{i-1}(ia-b-ic+a), \\ &= \frac{1}{i-1}(-a-ib+c+ia), \\ &= a-\frac{ib-c}{i-1}, \\ &= a-r, \end{aligned}$$

et donc

$$a-r=i(q-s)$$

ce qui traduit que l'on passe du vecteur $\overrightarrow{SQ}$ au vecteur $\overrightarrow{RA}$ par une rotation d'angle $\pi/2$ et donc que les distances SQ et RA sont égales et que les droites (SQ) et (RA) sont perpendiculaires.

(2) En cours de rédaction.

A.3.4. Problème sur un triangle et deux segments orthognaux et de même longueurs

Donnons un exercice proche de celui de la section A.3.2.

Énoncé.

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle, trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC' et α, β et γ les centres respectifs des cercles circonscrits de ces triangles.

(1) Montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral.

(2) Pouvez-vous en proposer une preuve purement géométrique (sans les complexes) ?

Corrigé.

Correction en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

A.3.5. Problème sur le calcul de $\cos(2\pi/5)$ et de la construction du pentagone régulier

Énoncé.

Ce problème traite du calcul de $\cos(2\pi/5)$ et de la construction du pentagone régulier.

Pour tout ce problème, on considère le complexe z défini par

$$z=e^{\frac{2i\pi}{5}}, \tag{A.33}$$

et on pose

$$c=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),\quad s=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right). \tag{A.34}$$

(1) (a) Montrer que

$$z^5=1, \tag{A.35}$$

puis que

$$z^3=\overline{z}^2. \tag{A.36}$$

(b) En déduire deux équations en c et s puis en déduire que

$$4c^2+2c-1=0. \tag{A.37}$$

(c) En déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}. \tag{A.38}$$

(d) Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/5)$?

(2) On cherche dans cette question à tracer le pentagone à la règle et au compas, c'est-à-dire uniquement à partir d'une règle non graduée, d'un compas et d'un segment de référence qui représente la longueur unité.

(a) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer qu'à partir d'un segment de longueur 1 et d'un segment de longueur 1/2, on peut construire la longueur $\sqrt{5}/2$.

(b) En déduire que la construction suivante (on se reportera à la figure A.4) permet de construire l'angle $2\pi/5$: on montrera que l'angle $\widehat{IOM_1}$ est égal à $2\pi/5$.

- tracer (OIJ) un repère orthonormé et I' le symétrique de I par rapport à O ;
- soit A le milieu de $[I'O]$ et $\mathcal{L}$ le cercle de centre A et passant par J ;
- le cercle $\mathcal{L}$ coupe la demi droite $[OI)$ en B ;
- C est le milieu de $[OB]$;
- la droite perpendiculaire à (OI) passant par C coupe le cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1) en M_1, point d'ordonnée positive.

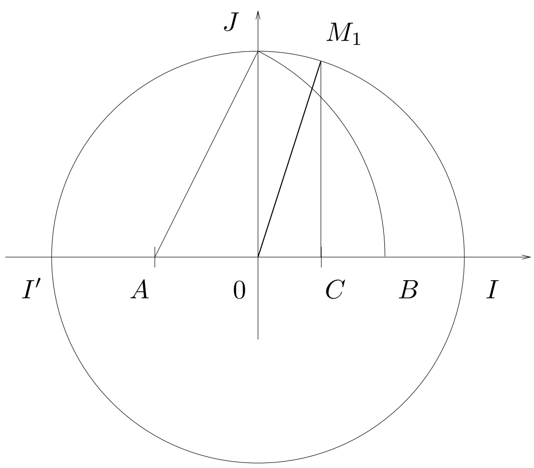


FIGURE A.4. La construction de $2\pi/5$.

(c) En déduire la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle de coté un et tracer la construction sur votre copie.

Corrigé.

(1) (a) Il est immédiat que

$$z^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = 1.$$

On pouvait aussi remarquer que z est une racine 5-ième de l'unité. Puisque $z^5 = 1$ et que z est non nul, on a

$$z^3 = \frac{1}{z^2}. \tag{A.39}$$

D'autre part, $|z| = 1$, ce qui s'écrit aussi

$$z = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Selon (A.39), on a donc

$$\boxed{z^3 = \overline{z}^2.} \tag{A.40}$$

(b) En remplaçant z par $c+is$ dans (A.40) et en développant, on obtient

$$c^3+3ic^2s-3cs^2-is^3=c^2-2ics-s^2.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on a donc

$$\boxed{c^3-3cs^2=c^2-s^2,} \tag{A.41}$$

et

$$\boxed{3c^2s-s^3=-2cs.} \tag{A.42}$$

Dans l'équation (A.42), on peut factoriser s et le simplifier, puisque $2\pi/5$ n'est pas un multiple de π. On obtient donc

$$3c^2-s^2+2c=0,$$

et en utilisant

$$s^2=1-c^2, \tag{A.43}$$

on obtient donc

$$\boxed{4c^2+2c-1=0.} \tag{A.44}$$

Remarque A.26. On pouvait aussi partir de l'équation (A.41) pour obtenir le même résultat, avec un petit plus de calculs.

(c) On résout l'équation du second degré (A.44) : ainsi

$$c=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}. \tag{A.45}$$

Puisque $2\pi/5$ appartient à $[0,\pi/2]$, son cosinus est strictement positif et dans (A.45), on choisit l'unique racine positive. On a donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.} \tag{A.46}$$

(d) De même, le sinus de $2\pi/5$ est strictement positif et de (A.43), on déduit

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.} \tag{A.47}$$

(2) (a) Remarquons tout d'abord qu'il est immédiat de tracer le milieu d'un segment déjà construit ainsi qu'un angle droit, uniquement à la règle et au compas (en traçant une médiatrice par exemple). L'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés égaux à 1 et 1/2 est égale à $\sqrt{1+1/4}=\sqrt{5}/2$.

(b) Analysons les différents points de la construction proposée :

- premier point : rien à dire !
- d'après la question précédente, on a $AJ=\sqrt{5}/2$;
- par construction du cercle $\mathcal{L}$, on a donc

$$AB=\frac{\sqrt{5}}{2}\ ;$$

- ainsi,

$$x_C=OC=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}(AB-AO)=\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\ ;$$

- d'après (A.46), l'abscisse de M_1 est égale à $\cos(2\pi/5)$ et donc $\widehat{IOM_1}=2\pi/5$.

(c) On reporte alors à l'aide du compas la corde IM_1 et on obtient les autres sommets M_2, M_3 et M_4 du pentagone régulier, inscrit dans le cercle trigonométrique.

Voir figure A.5.

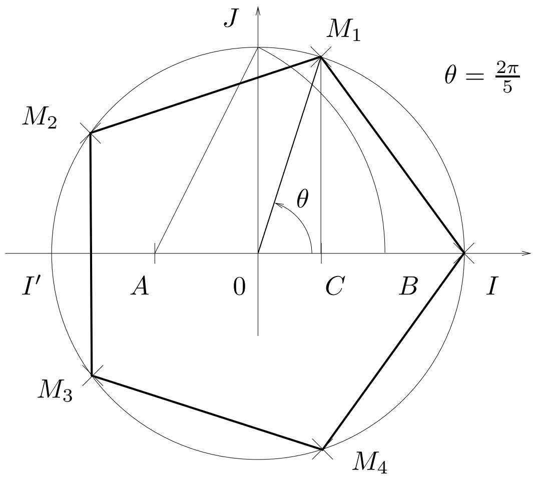


FIGURE A.5. La construction du pentagone.

Pour plus de détails sur les constructions à la règle et au compas (par exemple la construction d'un polygone régulier à 17 côtés !), sur la quadrature du cercle ou sur de nombreux problèmes de géométrie (par exemple la détermination du centre d'un cercle de rayon inconnu, uniquement au compas), on pourra consulter le très bon ouvrage [Car84] ou les deux références [Bod12b ; Bod12a].

Compléments.

Le nombre $\cos(2\pi/5)$ est aussi lié au "nombre d'or", égal à $(1+\sqrt{5})/2$ qui a des tas de propriétés géométriques et algébriques. Les curieux pourront consulter par exemple sur le web le site `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or` ou plus généralement chercher à "nombre d'or" sur google, par exemple.

A.3.6. Problème sur un triangle et deux segments orthogonaux et de même longueurs

En cours de frappe

Énoncé.

Corrigé.

A.3.7. Problème sur un triangle équilatéral et un cercle coupé en trois parties égales

Énoncé.

(1) Soit ABC un triangle équilatéral. On construit le demi-cercle de diamètre $[AC]$ extérieurement au triangle. On partage le diamètre $[AC]$ en trois portions de mêmes longueurs $[AF]$, $[FG]$ et $[GC]$. Les deux droites (BF) et (BG) découpent le demi-cercle en trois portions de cercles. Ces trois portions sont-elles de mêmes longueurs ?

(2) Proposer une preuve purement géométrique. On "renversera" le problème : On construit le demi-cercle de diamètre $[AC]$ extérieurement au triangle et on partage ce demi-cercle en trois portions égales de cercles, en définissant les points F' et G'. Les deux droites (BF') et (BG') découpent le segment $[AC]$ en trois portions de segment. Les trois portions sont-elles de mêmes longueurs ?

Corrigé.

Exercice issu de la feuille d'exercice (exercice 27) de Christophe Jan dans `http://833duparc.free.fr/Nouveaux_Exercices_MPSI/Nombres_Complexes.pdf`

(1)

Montrons que les trois portions du demi-cercle sont de mêmes longueurs.

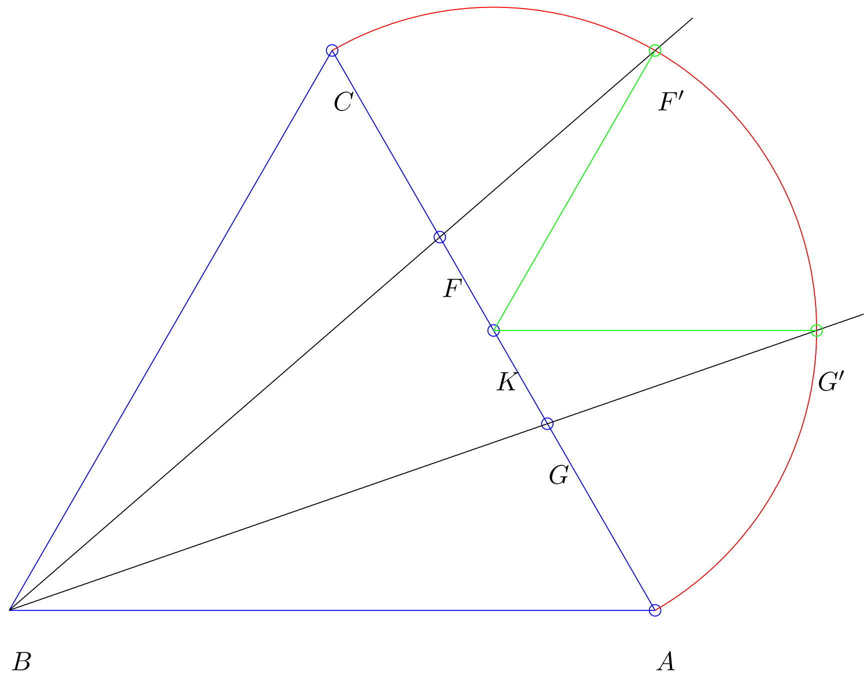


FIGURE A.6. Le triangle équilatéral ABC et les points G, K, F et F' et G'.

Voir la figure A.6, faite sous matlab, grâce aux calculs proposés plus bas.

On choisit un repère de centre $O = B$ tel que $OA = 1$ avec les affixes des points A et B respectivement définies par

$$a = 1,$$
$$b = 0,$$

et donc, puisque ABC est un triangle équilatéral, l'affixe de C est définie par

$$c = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

On préfère utiliser le nombre j, égal à la première racine cubique de l'unité non égale à 1, donnée par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a donc $c = -j^2$ et, puisque $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$c = 1 + j.$$

On en déduit l'affixe de F en écrivant

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

et donc

$$f = 1 + \frac{2}{3}(c - 1),$$

soit

$$f = 1 + \frac{2}{3}j. \tag{A.48a}$$

On en déduit de même les affixes respectives de G et de K données par

$$g = 1 + \frac{1}{3}j, \tag{A.48b}$$

$$k = 1 + \frac{1}{2}j. \tag{A.48c}$$

À partir de là, deux méthodes sont possibles. La première est numérique, plus facile, mais qui ne constitue pas à proprement parler une preuve.

(a) Un point M appartient au cercle de diamètre $[AC]$ à l'extérieur de ABC ssi son affixe z vérifie

$$z - k = \frac{1}{2}e^{i\theta} \text{ où } \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]. \tag{A.49}$$

Un point M appartient à la droite (BG) ssi son affixe z vérifie

$$z = Re^{i\alpha}, \tag{A.50}$$

où $R > 0$ et

$$\alpha = \arg(g) = \arg\left(1 + \frac{1}{3}j\right). \tag{A.51}$$

D'après (A.49) et (A.50) Il faut donc déterminer $R > 0$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ tels que

$$z = k + \frac{1}{2}e^{i\theta} = Re^{i\alpha}. \tag{A.52}$$

Ce z étant calculé, on obtient donc l'affixe g' de G' donnée par

$$g' = z. \tag{A.53}$$

On définit numériquement α grâce à (A.51), avec matlab par exemple. Pour résoudre numériquement (A.52), on remarque qu'elle implique

$$\left|Re^{i\alpha} - k\right| = \left|\frac{1}{2}e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2},$$

et il nous faut résoudre l'équation en R :

$$\left|Re^{i\alpha} - k\right| - \frac{1}{2} = 0, \tag{A.54}$$

ce que l'on peut faire avec matlab (de façon numérique, comportant un inévitable arrondi de calculs). On obtient deux solutions et on choisit la plus grande (la plus petite correspondant à un point dans le demi-cercle à l'intérieur de ABC). R étant calculé, on détermine alors z grâce à (A.52) et g' grâce à (A.53). On fait de même pour f', l'affixe de F'. On vérifie ensuite numériquement, grâce à matlab par exemple que

$$\arg\left(\frac{c-k}{f'-k}\right) = \arg\left(\frac{f'-k}{g'-k}\right) = \arg\left(\frac{g'-k}{a-k}\right) = \frac{\pi}{3}, \tag{A.55}$$

ce qui permet de montrer que les deux droites $[BF)$ et $[BG)$ découpent le demi-cercle en trois portions de cercles de mêmes longueurs (aux points F' et G'). Cette preuve, faite à partir de calculs numérique de matlab, n'est pas une preuve à proprement parler, à cause des inévitables arrondis de calculs

(b) Donnons maintenant la seconde preuve, rigoureuse. Cette façon de faire nous permettra d'expliciter f' et g' les affixes de F' et de G', sans avoir à déterminer explicitement leurs arguments, ce qui n'est pas possible algébriquement. On sait que l'équation de la demi-droite $[BG)$ est

$$y = Ax, \text{ où } A \in \mathbb{R},$$

soit en complexe

$$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = A\frac{1}{2}(z + \overline{z}), \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$

ce qui est équivalent à

$$z - \overline{z} = iAz + iA\overline{z},$$

et donc

$$z(1 - iA) = \overline{z}(1 + iA)$$

et donc

$$\overline{z} = Bz, \tag{A.56}$$

où B est un complexe connu. Puisque la demi-droite $[BG)$ par G, d'affixe définie par (A.48b), on a donc

$$\overline{g} = Bg, \tag{A.57}$$

et d'après (A.57) et (A.56), on a donc

$$\overline{z} = Bz \text{ où } B = \frac{\overline{g}}{g}. \tag{A.58}$$

Enfin, l'équation du cercle de diamètre $[AC]$ et donc de centre K et de rayon 1/2 est

$$KM^2 = \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire, si M est d'affixe z :

$$(z - k)\left(\overline{z} - \overline{k}\right) = \frac{1}{4}. \tag{A.59}$$

L'affixe z de l'intersection de la demi-droite $[BG)$ et du cercle de diamètre $[AC]$ vérifie donc à la fois (A.58) et (A.59). Il faut donc résoudre ce système de deux équations à deux inconnues z et $\overline{z}$. Pour cela, on écrit, d'après (A.58), $\overline{z} = Bz$ que l'on réinjecte dans (A.59), ce qui donne

$$(z - k)\left(Bz - \overline{k}\right) = \frac{1}{4}, \tag{A.60}$$

ce qui fournit une équation du second degré en z. On confie ce calcul à matlab symbolique qui trouve

$$5\,z^2 - iz^2\sqrt{3} - 9\,z + 5/2 + 1/2\,i\sqrt{3} = 0. \tag{A.61}$$

On résoud cette équation en utilisant la section A.1.2 page 122. qui peut être simplifiée par l'utilisation de matlab symbolique ! On obtient la solution de plus grande partie réelle (correspondant à celle qui est dans le demi-cercle extérieur à $[AC]$) :

$$g' = -7\left(-5 + i\sqrt{3}\right)^{-1}. \tag{A.62}$$

On fait de même pour le point F'. L'équation du second degré obtenue est donnée par

$$2\,z^2 - iz^2\sqrt{3} - 9/2\,z + 1 + 1/2\,i\sqrt{3} = 0. \tag{A.63}$$

et on en déduit

$$f' = -7/2\left(-2 + i\sqrt{3}\right)^{-1}. \tag{A.64}$$

On utilise le résultat classique de la section A.3.1 page 129. On calcule alors les trois nombres complexes donnés par

$$\zeta_1 = k + jf' + j^2c,$$
$$\zeta_2 = k + jg' + j^2f',$$
$$\zeta_3 = k + ja + j^2g'.$$

Ce calcul est confié à matlab symbolique qui trouve que ces trois nombres complexes sont nuls, ce qui prouve que les trois triangles $KF'C$, $KG'F'$ et KAG' sont équilatéraux, ce qui permet de conclure. Puisque tout le calcul a été confié à matlab symbolique, qui calcule algébriquement les expressions, cette preuve est donc tout à fait rigoureuse !

(2)

Montrons que les trois portions de $[AC]$ sont de mêmes longueurs, ce qui sera équivalent à démontrer que dans le problème initial les trois portions du demi-cercle sont de mêmes longueurs.

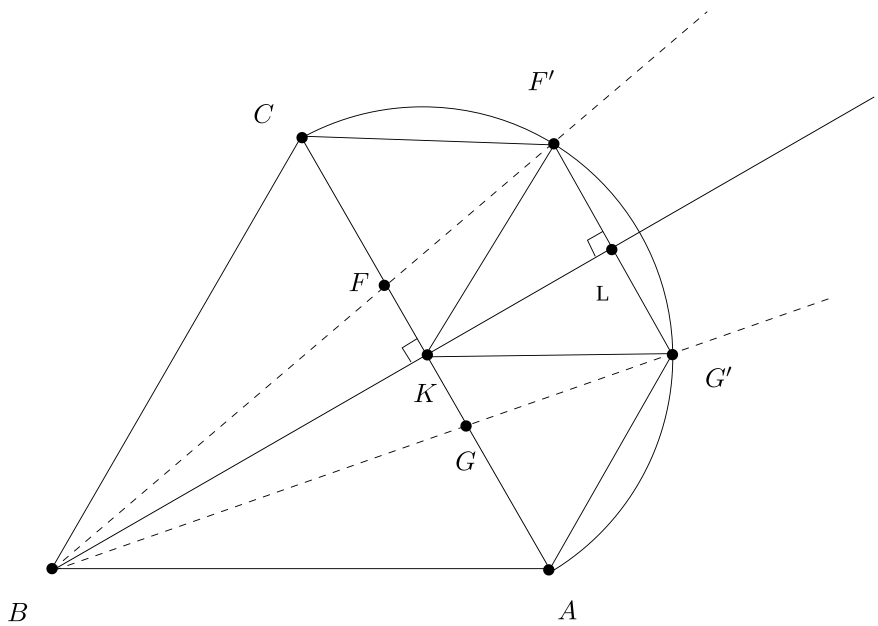


FIGURE A.7. Le triangle équilatéral ABC et les points G, K, F et F' et G'.

Voir la figure A.7.

On trace donc F' et G' qui partagent le demi-cercle de diamètre $[AC]$ en trois portions de mêmes longueurs et on définit les points F et G comme intersections des droites (BF') et (BG') avec $[AC]$ (on peut montrer que ces intersection existent bien !). Notons que

$$\widehat{CKF'} = \widehat{F'KG'} = \widehat{G'KA} = \frac{\pi}{3}.$$

Les trois triangles CKF', $F'KG'$ et $G'KA$, *a priori* isocèles sont donc équilatéraux. Par ailleurs, F' et G' sont symétriques par rapport à la droite (BK). D'où $(F'G')$ est perpendiculaire à (BK). Puisque (BK) est une hauteur du triangle équilatéral ABC, elle est perpendiculaire à (AC) et donc (AC) et $(F'G')$ sont parallèles. On note L, l'intersection de (BK) et de $(F'G')$. Ainsi, dans le triangle $F'LB$, d'après le théoèreme de Thalès, on a

$$\frac{FK}{F'L} = \frac{BK}{BL}. \tag{A.65}$$

Dans le triangle équilatéral ABC, de coté, choisi, sans perte de généralité égal à 1, $[BK]$ est la médiatrice de (AC), donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$BK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}},$$

et donc

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{A.66}$$

Le triangle équilatéral $F'KG'$ est deux fois plus petit que le triangle équilatéral ABC (puisque de coté $1/2$). Par symétrie, L est le milieu de $[F'G']$ et on a donc

$$F'L = \frac{1}{4}. \tag{A.67}$$

Le triangle $F'KG'$ a aussi une hauteur $[KL]$ deux fois plus petite que $[BK]$ et, d'après (A.66), il vient donc

$$KL = \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{A.68}$$

On a donc, grâce à (A.65), (A.66), (A.67) et (A.68)

$$\begin{aligned}
FK &= F'L\frac{BK}{BL}, \\
&= F'L\frac{BK}{BK+KL}, \\
&= \frac{1}{4}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}, \\
&= \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, \\
&= \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}},
\end{aligned}$$

et donc

$$FK = \frac{1}{6}. \tag{A.69}$$

Par symétrie, on en déduit que

$$KG = \frac{1}{6}. \tag{A.70}$$

Par symétrie, on a aussi

$$CF = GA. \tag{A.71}$$

On a donc, selon (A.69), (A.70) et (A.71)

$$1 = CA = CF + FK + KG + GA = 2CF + \frac{1}{3},$$

et donc

$$CF = \frac{1}{3}, \tag{A.72}$$

et donc, en utilisant (A.71)

$$GA = \frac{1}{3}, \tag{A.73}$$

et, enfin, grâce à (A.69) et (A.70), on a

$$FG = FK + KG = \frac{2}{6},$$

et donc

$$FG = \frac{1}{3}, \tag{A.74}$$

Finalement, grâce à (A.72), (A.73) et (A.74), on a montré que le segment $[AC]$ est partagé en trois portions de segment de mêmes longueurs.

Cette preuve géométrique, fondée sur des triangles équilatéraux, les théorèmes de Thalès et de Pythagotre, est donc plus simple que son homologue complexe !

Annexe B

L'argument d'un nombre complexe et la fonction atan_2

B.1. L'argument d'un nombre complexe

Montrons que l'on a les quatre formules (B.2) (qui correspondent aux quatre cas de la figure B.2 page 146) : Si $z = x + iy$ appartient à $\mathbb{C}$ et que l'on considère θ son argument [1], ou, ce qui revient au même, si on considère les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point du point et ses coordonnées polaires (r, θ) liées [2] par

$$x = r\cos\theta, \tag{B.1a}$$

$$y = r\sin\theta, \tag{B.1b}$$

alors

$$\text{Si } x, y > 0 \text{ (cas 1)}, \quad \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]0, \pi/2[, \tag{B.2a}$$

$$\text{Si } x < 0 \text{ et } y > 0 \text{ (cas 2)}, \quad \theta = \pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]\pi/2, \pi[, \tag{B.2b}$$

$$\text{Si } x, y < 0 \text{ (cas 3)}, \quad \theta = -\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in] - \pi/2, -\pi[, \tag{B.2c}$$

$$\text{Si } x > 0 \text{ et } y < 0 \text{ (cas 4)}, \quad \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in] - \pi/2, 0[. \tag{B.2d}$$

Attention à ne pas écrire que pour tout (x, y),

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

ce qui n'est pas toujours vrai puisque θ appartient à $]-\pi, \pi]$ alors que $\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$.

- Le cas 1 est immédiat.
- Dans le cas 2 (voir figure 2(b)), on a

$$\phi + \theta = \pi, \tag{B.3}$$

où $\phi \in]0, \pi/2[$ et $\theta \in]\pi/2, \pi[$. Dans le triangle rectangle de la figure B.1, on a, de façon géométrique

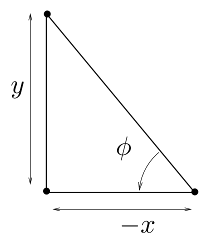


FIGURE B.1. Le triangle rectangle.

$$\tan(\phi) = \frac{|y|}{|x|},$$

1. En faisant l'hypothèse habituelle qu'il appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
2. En faisant l'hypothèse habituelle que θ appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

et donc puisque $y > 0$ et $x < 0$:

$$\tan(\phi) = -\frac{y}{x},$$

et donc

$$\phi = \frac{y}{-x} = \text{atan}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

et de (B.3), on déduit

$$\theta = \pi - \phi = \pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

dont on déduit (B.2b).

- Dans le cas 3 (voir figure 2(c)), on a

$$\phi + \theta = -\pi, \tag{B.4}$$

où $\phi \in]-\pi/2, 0[$ et $\theta \in]-\pi, -\pi/2[$. Comme précédemment, on a

$$\tan(\phi) = -\frac{-y}{-x} = -\frac{y}{x},$$

et donc

$$\phi = -\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

et donc, d'après (B.4),

$$\theta = -\pi - \phi = -\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

dont on déduit (B.2c).

- Dans le cas 4 (voir figure 2(d)), on est dans le même cas que le cas 1.

Si on fait la convention habituelle suivante :

$$\text{atan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{B.5}$$

les équations (B.2) sont encore valables si x ou y peuvent s'annuler, sans être simulténement nuls et deviennent : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\text{Si } x, y \geq 0 \text{ (cas 1)}, \quad \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, \pi/2[, \tag{B.6a}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ (cas 2)}, \quad \theta = \pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [\pi/2, \pi], \tag{B.6b}$$

$$\text{Si } x, y \leq 0 \text{ (cas 3)}, \quad \theta = -\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [-\pi/2, -\pi[, \tag{B.6c}$$

$$\text{Si } x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \text{ (cas 4)}, \quad \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [-\pi/2, 0]. \tag{B.6d}$$

Vérifions par exemple (B.6a). Si $x > 0$ et $y = 0$, on a $\phi = 0$ et $\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{atan}(0) = 0$. Si $x = 0$ et $y > 0$, on a $\phi = \pi/2$ et $\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{atan}(+\infty) = \pi/2$.

B.2. La fonction atan_2

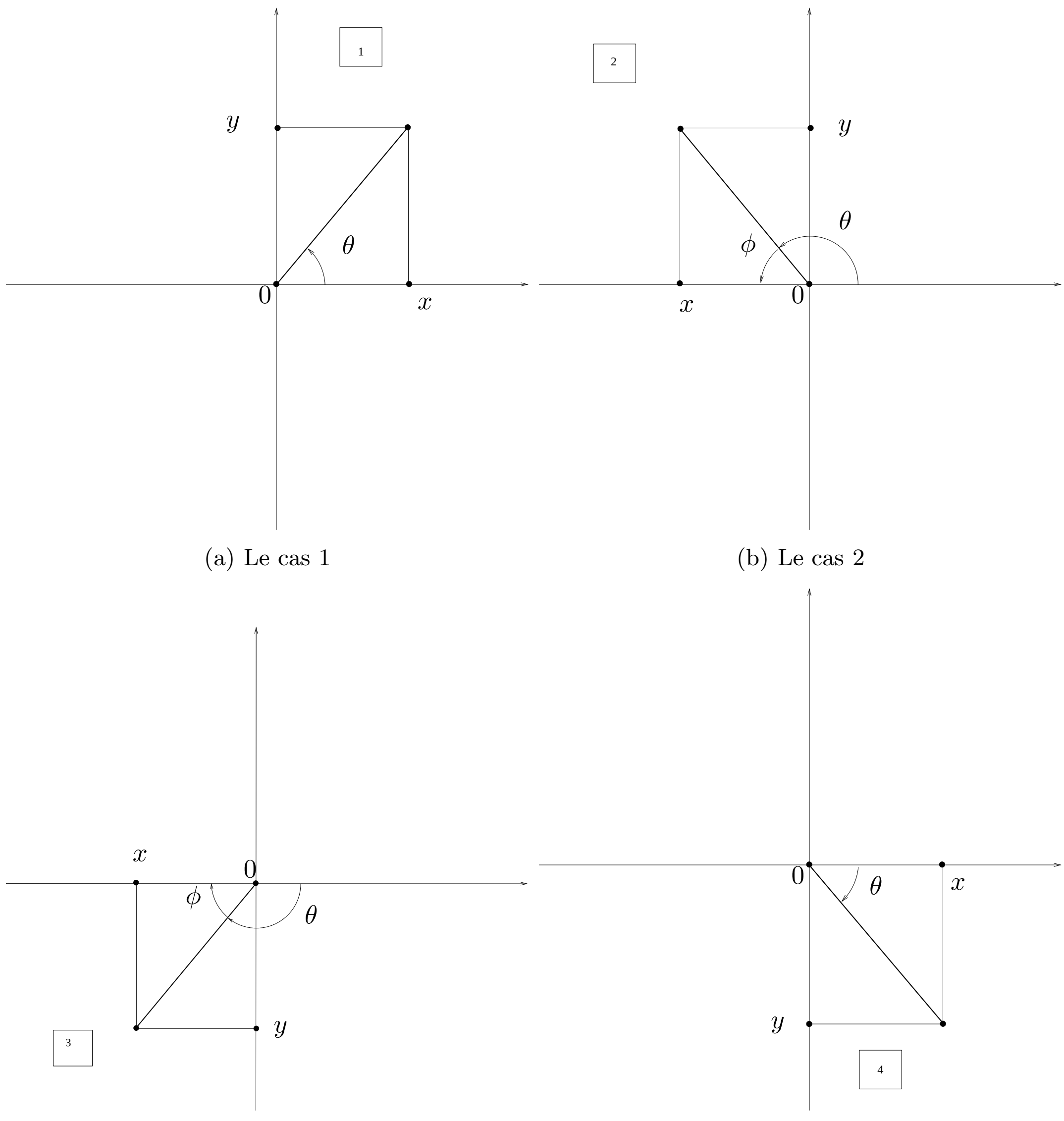
On définit alors la fonction bien connue des informaticiens atan_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- Si $y \neq 0$, on pose

$$\phi = \text{atan}\left|\frac{y}{x}\right|, \tag{B.7}$$

puis

$$\text{atan}_2(y, x) = \begin{cases} \phi\, \text{signe}(y) & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2}\, \text{signe}(y) & \text{si } x = 0, \\ (\pi - \phi)\, \text{signe}(y) & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{B.8}$$



(a) Le cas 1 (b) Le cas 2

(c) Le cas 3 (d) Le cas 4

FIGURE B.2. Les quatre cas possibles.

- Si $y = 0$,

$$\operatorname{atan}_2(y, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0, \\ \pi & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{B.9}$$

- On peut aussi rajouter, pour être cohérent avec les conventions de Matlab :

$$\operatorname{atan}_2(0, 0) = 0. \tag{B.10}$$

On pourra consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/Atan2`.
Cette définition correspond à la définition de la fonction `atan2` de Matlab.

Avec ce qui précède, il est aisé de constater que l'argument θ d'un nombre complexe $z = x + i$ est donné par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \quad \theta = \operatorname{atan}_2(y, x), \tag{B.11}$$

voire même parfois (ce qui est le choix de Matlab)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta = \operatorname{atan}_2(y, x). \tag{B.12}$$

(1) En effet, supposons que x et y sont tous les deux non nuls. Étudions chacun des quatre cas de la section B.1.
   - Le cas 1 est immédiat.
   - Dans le cas 2, on a d'après (B.2b),

$$\begin{aligned}\theta &= \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{y}{-x}\right),\\ &= \pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{-x}\right|,\\ &= \pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|,\\ &= \left(\pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|\right)\operatorname{signe}(y),\\ &= (\pi - \phi)\operatorname{signe}(y).\end{aligned}$$

   - Dans le cas 3, on a d'après (B.2c),

$$\begin{aligned}\theta &= -\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{-y}{-x}\right),\\ &= -\pi + \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|,\\ &= \left(\pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|\right)\operatorname{signe}(y),\\ &= (\pi - \phi)\operatorname{signe}(y).\end{aligned}$$

   - Dans le cas 4, on conclut de la même façon.

(2) Si x et y peuvent s'annuler, sans l'être simultanément, on utilise alors la convention (B.5) et le calcul est immédiat.

(3) Si x et y sont tous les deux nuls, on peut adopter la convention (B.10).

B.3. Exemples

Donnons huit calculs différents.

- Pour $z = 1$, on a $x = 1$ et $y = 0$ et, d'après (B.6a),

$$\theta = \operatorname{atan}(0) = 0\,;$$

- Pour $z = 1 + i$, on a $x = 1$ et $y = 1$ et, d'après (B.6b),

$$\theta = \operatorname{atan}(1) = \frac{pi}{4}\,;$$

- Pour $z = i$, on a $x = 0$ et $y = 1$ et, d'après (B.6b),

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}\,;$$

- Pour $z = -1 + i$, on a $x = -1$ et $y = 1$ et, d'après (B.6b),

$$\theta = \pi + \operatorname{atan}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,;$$

- Pour $z = -1$, on a $x = -1$ et $y = 0$ et, d'après (B.6b),
$$\theta = \pi + \operatorname{atan}(0) = \pi\,;$$
- Pour $z = -1 - i$, on a $x = -1$ et $y = -1$ et, d'après (B.6c),
$$\theta = -\pi - \operatorname{atan}(-1) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\,;$$
- Pour $z = -i$, on a $x = 0$ et $y = -1$ et, d'après (B.6d),
$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}\,;$$
- Pour $z = -i + 1$, on a $x = 1$ et $y = -1$ et, d'après (B.6d),
$$\theta = \operatorname{atan}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Annexe C

Une formule de trigonométrie amusante

Pour a, b et c réels, on a,

$$a+b+c=\pi \Longrightarrow \sin^3 a\cos(b-c)+\sin^3 b\cos(c-a)+\sin^3 c\cos(a-b)=3\sin a\sin b\sin c. \tag{C.1}$$

Plusieurs preuves sont proposées. Les deux premières sont purement informatiques (sous matlab), tandis que les deux dernières sont manuelles. Notons aussi que les variantes 2 et 3 peuvent être utilisées pour montrer toute expression trigonométrique, puisqu'elles ramènent celles-ci à une égalité de polynôme (mais qu'elles ne permettent pas d'en trouver la forme !).

Preuve avec matlab symbolique (version 1).
Il suffit de taper sous matlab

```
syms a b c;
c=pi-a-b;
S=(sin(a))^3*cos(b-c)+(sin(b))^3*cos(c-a)+(sin(c))^3*cos(a-b)-3*sin(a)*sin(b)*sin(c);
disp(simplify(expand(S)));
```

ou (voir) et lancer le script `preuve_formule_rigolote1.m`, disponible à l'adresse ouaib du cours. On obtiendra donc bien $S=0$. □

Preuve avec matlab symbolique (version 2). On pose

$$c=\pi-a-b$$

et on utilise les formules d'Euler (2.29). En posant

$$A=e^{ia},$$
$$B=e^{ib},$$

il vient donc

$$\sin a=\frac{1}{2i}\left(e^{ia}-e^{-ia}\right)$$

et donc

$$\sin a=\frac{1}{2i}\left(A-\frac{1}{A}\right). \tag{C.2}$$

De même

$$\sin b=\frac{1}{2i}\left(B-\frac{1}{B}\right). \tag{C.3}$$

De même, on a, en ne conservant que a et b et donc A et B :

$$\begin{aligned}\cos(b-c)&=\cos(b+a+b-\pi),\\&=-\cos(2b+a),\\&=-\frac{1}{2}\left(e^{i(a+2b)}+e^{-i(a+2b)}\right),\end{aligned}$$

et donc

$$\cos(b-c)=-\frac{1}{2}\left(AB^2+\frac{1}{AB^2}\right). \tag{C.4}$$

On a aussi

$$\cos(a-c)=\cos(a+a+b-\pi)=-\cos(2a+b),$$

et donc

$$\cos(a-c)=-\frac{1}{2}\left(A^2B+\frac{1}{A^2B}\right). \tag{C.5}$$

On a aussi

$$\sin c=\sin(\pi-a-b)=-\sin(-a-b)=\sin(a+b)$$

et donc

$$\sin c=\frac{1}{2i}\left(AB-\frac{1}{AB}\right). \tag{C.6}$$

Enfin, on a

$$\cos(a-b)=\frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}\right).$$

et donc

$$\cos(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right). \tag{C.7}$$

Compte tenu de (C.2), (C.3), (C.4), (C.5), (C.6) et (C.7), on peut donc exprimer le terme de gauche de (C.1) uniquement en fonction d'une fraction rationnelle en A et B. On montre donc que la différence entre les deux termes de (C.1) vaut

$$\begin{aligned}P=(1/(2i)^3/2)\big[-(A-1/A)^3(B^2A+1/(B^2A))-(B-1/B)^3(A^2B+1/(A^2B))+\\ (AB-1/(AB))^3(A/B+B/A)-3\times 2(A-1/A)(B-1/B)(AB-1/(AB))\big].\end{aligned} \tag{C.8}$$

On peut utiliser matlab en tapant :

```
syms A B;
P=( -(A-1/A)^3*(B^2*A+1/(B^2*A))-(B-1/B)^3*(A^2*B+1/(A^2*B))+...
   (A*B-1/(A*B))^3*(A/B+B/A)-3*2*(A-1/A)*(B-1/B)*(A*B-1/(A*B)));
disp(simplify(expand(P)));
```

ou (voir) et lancer le script `preuve_formule_rigolote2.m`, disponible à l'adresse ouaib du cours. On obtiendra donc bien $P=0$. □

Preuve manuelle (version 3). Cette preuve reprend la précédente (version 2), sans s'appuyer sur matlab symbolique. L'égalité (C.1) est encore équivalente à

$$\begin{aligned}a+b+c=\pi\Longrightarrow (2i)^3\sin^3(a)\big(2\cos(b-c)\big)+(2i)^3\sin^3(b)\big(2\cos(c-a)\big)+(2i)^3\sin^3(c)\big(2\cos(a-b)\big)\\ =6\big(2i\sin(a)\big)\big(2i\sin(b)\big)\big(2i\sin(c)\big).\end{aligned} \tag{C.9}$$

Reprenons les différentes étapes de la version 2.

On pose toujours

$$c=\pi-a-b,$$

et

$$\begin{aligned}A&=e^{ia},\\ B&=e^{ib},\end{aligned}$$

D'après (C.2), on a donc

$$(2i)\sin a=A-\frac{1}{A}. \tag{C.10}$$

De même, on obtient

$$(2i)\sin b=B-\frac{1}{B}, \tag{C.11}$$

et (C.6) donne

$$(2i)\sin c = AB - \frac{1}{AB}. \tag{C.12}$$

On en déduit, après réduction au même dénominateur que le membre de droite de (C.9) est donné par

$$6\big(2i\sin(a)\big)\big(2i\sin(b)\big)\big(2i\sin(c)\big) = \frac{N}{D}, \tag{C.13a}$$

où

$$N = 6\,B^4A^4 - 6\,A^4B^2 + 6\,A^2 - 6\,B^4A^2 + 6\,B^2 - 6, \tag{C.13b}$$

$$D = B^2A^2. \tag{C.13c}$$

On fait maintenant de même pour les trois termes de gauche de (C.9). Les équations (C.4) et (C.10) nous donnent

$$(2i)^3\sin^3(a)\big(2\cos(b-c)\big) = \left(A - \frac{1}{A}\right)^3\left(AB^2 + \frac{1}{AB^2}\right), \tag{C.14}$$

et donc, après simplification,

$$(2i)^3\sin^3(a)\big(2\cos(b-c)\big) = \frac{N_1}{D_1}, \tag{C.15a}$$

où

$$N_1 = -A^8B^4 - A^6 + 3\,A^6B^4 + 3\,A^4 - 3\,B^4A^4 - 3\,A^2 + B^4A^2 + 1, \tag{C.15b}$$

$$D_1 = A^4B^2. \tag{C.15c}$$

De même, les équations (C.11) et (C.5) fournissent,

$$(2i)^3\sin^3(b)\big(2\cos(a-c)\big) = \left(B - \frac{1}{B}\right)^3\left(A^2B + \frac{1}{A^2B}\right) \tag{C.16}$$

et donc, après simplification,

$$(2i)^3\sin^3(b)\big(2\cos(a-c)\big) = \frac{N_2}{D_2}, \tag{C.17a}$$

où

$$N_2 = -B^8A^4 - B^6 + 3\,B^6A^4 + 3\,B^4 - 3\,B^4A^4 - 3\,B^2 + A^4B^2 + 1, \tag{C.17b}$$

$$D_2 = B^4A^2. \tag{C.17c}$$

Enfin, on obtient de même, après simplification,

$$(2i)^3\sin^3(c)\big(2\cos(a-b)\big) = \frac{N_3}{D_3}, \tag{C.18a}$$

où

$$N_3 = B^6A^8 + B^8A^6 - 3\,A^6B^4 - 3\,B^6A^4 + 3\,A^4B^2 + 3\,B^4A^2 - A^2 - B^2, \tag{C.18b}$$

$$D_3 = B^4A^4. \tag{C.18c}$$

Bref, compte tenu de (C.13), (C.15), (C.17) et (C.18), on obtient

$$\begin{multline}-(2i)^3\sin^3(a)\big(2\cos(b-c)\big) - (2i)^3\sin^3(b)\big(2\cos(c-a)\big) - (2i)^3\sin^3(c)\big(2\cos(a-b)\big)\\ + 6\big(2i\sin(a)\big)\big(2i\sin(b)\big)\big(2i\sin(c)\big) = \frac{N_0}{D_0},\end{multline}$$

où

$$N_0 = NB^2A^2 - N_1B^2 - N_2A^2 - N_3,$$

et après simplification, on obtient donc bien

$$N_0 = 0.$$

□

Preuve purement manuelle (version 4).

Merci à Dominique Sandri pour la rédaction de cette preuve !

On suppose que

$$a + b + c = \pi \tag{C.19}$$

Montrons que

$$\sin^3 a \cos(b-c) + \sin^3 b \cos(c-a) + \sin^3 c \cos(a-b) = 3 \sin a \sin b \sin c. \tag{C.20}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x,$$

cela revient à montrer que

$$\begin{aligned} 3 \sin a \sin b \sin c = \frac{3}{4}[&\sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b)] \\ &- \frac{1}{4}[\sin 3a \cos(b-c) + \sin 3b \cos(c-a) + \sin 3c \cos(a-b)]. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en montrant les deux relations suivantes :

$$\sin 3a \cos(b-c) + \sin 3b \cos(c-a) + \sin 3c \cos(a-b) = 0, \tag{C.21}$$

$$\sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b) = 4 \sin a \sin b \sin c. \tag{C.22}$$

Montrons ces deux relations.

Démonstration de (C.21). On a

$$\begin{aligned} \sin 3a \cos(b-c) + \sin 3b \cos(c-a) + \sin 3c \cos(a-b) &= \sin(3\pi - 3b - 3c) \cos(b-c) + \sin(3\pi - 3c - 3a) \cos(c-a), \\ &\quad + \sin(3\pi - 3a - 3b) \cos(a-b), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sin 3a \cos(b-c) + \sin 3b \cos(c-a) + \sin 3c \cos(a-b) &= \sin(3b+3c) \cos(b-c) + \sin(3c+3a) \cos(c-a) \\ &\quad + \sin(3a+3b) \cos(a-b). \end{aligned} \tag{C.23}$$

On pose :

$$\frac{p+q}{2} = 3b + 3c, \quad \frac{p-q}{2} = b - c,$$

et donc

$$p = 4b + 2c, q = 2b + 4c.$$

On obtient

$$\begin{aligned} 2 \sin(3b+3c) \cos(b-c) &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ &= \sin p + \sin q = \sin(4b+2c) + \sin(2b+4c). \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} 2 \sin(3c+3a) \cos(c-a) &= \sin(4c+2a) + \sin(2c+4a), \\ 2 \sin(3a+3b) \cos(a-b) &= \sin(4a+2b) + \sin(2a+4b). \end{aligned}$$

D'où, (C.23) devient :

$$\sin 3a\cos(b-c)+\sin 3b\cos(c-a)+\sin 3c\cos(a-b)=\frac{1}{2}\big[\sin(4b+2c)+\sin(2c+4a)+\sin(4a+2b)+\\ \sin(2b+4c)+\sin(4c+2a)+\sin(2a+4b)\big].$$

Posons

$$p=4b+2c,\quad q=2c+4a,$$

et donc

$$\frac{p+q}{2}=2b+2c+2a=2\pi,\quad \frac{p-q}{2}=2b-2a.$$

On obtient alors

$$\sin(4b+2c)+\sin(2c+4a)=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}=2\sin 2\pi\cos(2b-2a)=0.$$

On obtient de même :

$$\sin(4a+2b)+\sin(2b+4c)=0,\quad \sin(4c+2a)+\sin(2a+4b)=0.$$

On obtient finalement la relation (C.21) :

$$\sin 3a\cos(b-c)+\sin 3b\cos(c-a)+\sin 3c\cos(a-b)=0$$

□

Démonstration de (C.22). On a

$$\sin a\cos(b-c)+\sin b\cos(c-a)+\sin c\cos(a-b)=\sin(\pi-(b+c))\cos(b-c)+\\ \sin(\pi-(a+c))\cos(c-a)+\sin(\pi-(a+b))\cos(a-b)$$

et donc

$$\sin a\cos(b-c)+\sin b\cos(c-a)+\sin c\cos(a-b)=\sin(b+c)\cos(b-c)+\\ \sin(a+c)\cos(c-a)+\sin(a+b)\cos(a-b)$$

Posons :

$$\frac{p+q}{2}=b+c,\quad \frac{p-q}{2}=b-c,$$

et donc

$$p=2b,\quad q=2c.$$

On obtient

$$2\sin(b+c)\cos(b-c)=\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}=\sin p+\sin q=\sin 2b+\sin 2c.$$

De même, on obtient :

$$2\sin(a+c)\cos(c-a)=\sin 2a+\sin 2c,\quad 2\sin(a+b)\cos(a-b)=\sin 2b+\sin 2a.$$

Donc (C.22) devient :

$$\begin{aligned}
&\sin a\cos(b-c)+\sin b\cos(c-a)+\sin c\cos(a-b)\\
&=\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c,\\
&=2\sin a\cos a+2\sin b\cos b+2\sin c\cos c,\\
&=2\sin a\cos(\pi-(b+c))+2\sin b\cos(\pi-(a+c))+2\sin c\cos(\pi-(a+b)),\\
&=-2\sin a\cos(b+c)-2\sin b\cos(a+c)-2\sin c\cos(a+b),\\
&=-2\sin a\cos b\cos c+2\sin a\sin b\sin c-2\sin b\cos a\cos c+2\sin b\sin a\sin c\\
&-2\sin c\cos a\cos b+2\sin c\sin a\sin b,
\end{aligned}$$

et donc

$$\sin a\cos(b-c)+\sin b\cos(c-a)+\sin c\cos(a-b)=-2\sin a\cos b\cos c-\\ 2\sin b\cos a\cos c-2\sin c\cos a\cos b+6\sin a\sin b\sin c. \quad (C.24)$$

Montrons que

$$\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c+\sin c\cos a\cos b=\sin a\sin b\sin c. \quad (C.25)$$

On a

$$\begin{aligned}
0=\sin\pi&=\sin(a+b+c),\\
&=\sin((a+b)+c),\\
&=\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c,\\
&=(\sin a\cos b+\sin b\cos a)\cos c+(\cos a\cos b-\sin a\sin b)\sin c,\\
&=\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c+\sin c\cos a\cos b-\sin a\sin b\sin c,\\
&=0.
\end{aligned}$$

Ce qui donne (C.25) puis avec (C.24) , la relation (C.22) :

$$\sin a\cos(b-c)+\sin b\cos(c-a)+\sin c\cos(a-b)=4\sin a\sin b\sin c,$$

Ceci montre le résultat. □

On consultera les URL suivantes :
— Pour (C.21) : `http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?2,19194,19194,quote=1`
— Pour (C.25) : `http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20101023042615AACnyth`

□

Preuve « naturelle » ?

En remarquant que a, b et c sont les trois angles d'un triangle, essayer de mettre la quantité de gauche de (C.1) sous la forme d'un produit vectoriel ? Un cadeau à celui qui trouve ! ! □

Annexe D

Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence

Cette annexe est en partie issue et adaptée de [RDO88, Chapitre 3], enrichi d'extraits de `http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf` et `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/DN.pdf`

D.1. Rappels sur le rayon de convergence

LEMME D.1 (Lemme d'Abel). *Soient $\sum_n an_z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe tel que la suite $a_n z_0^n$ soit bornée. Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z_0^n| \leq M. \tag{D.1}$$

Si $z = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on écrit pour tout z tel que $|z| < |z_0|$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| = \left| a_n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n z_0^n \right|$$

et donc, de (D.1) déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| \leq M r^n \text{ où } r = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

La série géométrique de terme général r^n est convergent et d'après ce qui précède, la série de terme général $a_n z^n$ est donc absolument convergente. □

THÉORÈME D.2 (Définition et propriété du rayon de convergence).
À toute série entière $\sum_n an_z^n$, on peut associer un unique réel $R \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ qui possède les propriétés suivantes :

(1) Pour tout z tel que $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

(2) Pour tout z tel que $|z| > R$, la série de terme général $a_n z^n$ est grossièrement divergenge (avec $|a_n z^n|$ non bornée).

DÉMONSTRATION.

(1) Montrons l'existence de R.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres positifs r tel que la suite $a_n r^n$ est bornée. Cet ensemble est non vide, car il contient zéro et il possède donc une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, notée R.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$.

(a) Supposons que $|z| < R$. Par définition de R, il existe R tel $|z| \leq r < R$ et donc la suite $a_n r^n$ est bornée. D'après le lemme d'Abel D.1, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

(b) Supposons que que $|z| > R$. La série de terme général $a_n z^n$ est divergente, sans quoi $a_n |z|^n$ serait bornée et on aurait $|z| \in \mathcal{A}$ en contradiction avec $|z| > R$. Dans ce cas, la suite $a_n |z|^n$ n'est donc pas bornée. Il y a divergence grossière.

(2) L'unicité de R est évidente.

□

Pour déterminer en pratique R, on utilise les formules d'Hadamard ou de d'Alembert (voir les lemmes 2.4 page 13 et 2.5 page 13).

D.2. Rappels sur le comportement d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence

THÉORÈME D.3. *Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et un nombre $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < R$. Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur $D_f(0, r)$.*

DÉMONSTRATION. En effet,

$$\sup_{|z| \leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n,$$

et comme $r < R$, la série de terme général $|a_n| r^n$ est convergente.

Cela prouve aussi le lemme 2.3 page 13. □

On déduit de la convergence uniforme que

THÉORÈME D.4. *La somme d'une série entière est continue en tout point de son disque de convergence.*

D.3. Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence

Le bord du disque de convergence est le cercle de centre O et de rayon R, appelé cercle de convergence.

Sur ce cercle de convergence, nous allons voir que tout peut arriver (voir exemple D.8 page 158).

Commençons par donner les clés de cette section : la transformation d'Abel (qui correspondrait à une "intégration par partie discrète") et les règles d'Abel, issues par exemple de [RDO87, section 1.3.2], rappelées ci dessous dans les lemmes D.5, D.6 et D.7.

LEMME D.5 (Transformation d'Abel).

Soient trois suites d'éléments de $\mathbb{C}$, notées $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = \alpha_n b_n$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k. \tag{D.2}$$

Alors, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}. \tag{D.3}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire par définition :

$$\forall k \in \{1, ..., p\}, \quad b_{n+k} = B_{n+k} - B_{n+k-1}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} &= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} b_{n+k}, \\
&= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \left(B_{n+k} - B_{n+k-1}\right), \\
&= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} B_{n+k-1},
\end{aligned}$$

on pose $k' = k - 1$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k'=0}^{p-1} \alpha_{n+k'+1} B_{n+k'},\\
&= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{n+k+1} B_{n+k},\\
&= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k+1} B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p},\\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\alpha_{n+k} B_{n+k} - \alpha_{n+k+1} B_{n+k}\right) - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p},\\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}\right) B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}.
\end{aligned}$$

□

De la transformation d'Abel (D.3), on déduit les deux règles d'Abel D.6 et D.7.

LEMME D.6 (Règle d'Abel I).

Pour que la série de terme général $a_n = \alpha_n b_n$ converge, il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

(1) La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (D.2) est bornée ;

(2) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite ;

(3) La série de terme général $|\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ est convergente.

De plus, dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k - \alpha_{k+1}\right) B_k. \tag{D.4}$$

DÉMONSTRATION. La version de la preuve faite dans [RDO87, section 1.3.2] utilise le critère de Cauchy. Présentons une preuve légèrement alternative, sans ce critère, désormais hors programme !

Appliquons la transformation d'Abel (D.2) aux trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = \alpha_n b_n$. Avec (D.2), on a donc pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} \left(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}\right) B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}.$$

Cette égalité est en fait valable aussi pour $n = -1$ (par convention $B_{-1} = 0$), ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{p} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{p} \left(\alpha_{k-1} - \alpha_k\right) B_{k-1} + \alpha_p B_{p-1}.$$

ce qui donne en posant $k' = k - 1$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p-1} a_k = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\alpha_k - \alpha_{k+1}\right) B_k + \alpha_p B_{p-1}. \tag{D.5}$$

La série de terme général $(\alpha_n - \alpha_{n+1}) B_n$ est absolument convergente puisque, d'après l'hypothèse 1, il existe M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\left(\alpha_n - \alpha_{n+1}\right) B_n\right| \leq M \left|\alpha_n - \alpha_{n+1}\right|,$$

et l'hypothèse 3 assure la converge de la série de terme général $|\alpha_n - \alpha_{n+1}|$. De plus, les hypothèses 1 et 2 impliquent que la limite de $\alpha_p B_{p-1}$ est nulle. D'après (D.5), on peut donc passer à la limite quand p tend vers l'infini et obtenir la convergence de la série de terme général a_n et (D.4).

□

LEMME D.7 (Règle d'Abel II).
Le lemme D.6 est vrai si on remplace la condition 3 par

$$\text{la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est réelle et décroissante.} \tag{D.6}$$

DÉMONSTRATION. En effet, si (D.6) est satisfaite, on a, pour tout k :

$$|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \alpha_k - \alpha_{k+1}$$

et pour tout n :

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \alpha_0 - \alpha_{n+1}.$$

La série de terme général $|\alpha_k - \alpha_{k+1}|$ est donc convergente, de somme α_0. □

EXEMPLE D.8. Soit un réel α. Considérons la série entière $\sum_n a_n z^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{n^\alpha}. \tag{D.7}$$

On a, pour tout n :

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Le rayon de convergence est donc égal à $R = 1$.

On se place maintenant au bord du disque de convergence, où $|z| = 1$. On a donc

$$\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha},$$

et les cas suivants :

(1) Si $\alpha \leq 0$, il y a divergence grossière car $1/n^\alpha$ ne tend pas vers zéro. Il y a donc divergence sur tout le cercle de convergence.
(2) Si $0 < \alpha \leq 1$, elle converge en tout point du cercle de convergence distinct de 1. Voir en effet l'exemple D.9.
(3) Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue en tout point du cercle de convergence (critère de Riemann) et donc en tout point du disque $D_{\mathrm{f}}(O, 1)$.

Ce ne sont d'ailleurs pas les seuls types de comportements possibles.

EXEMPLE D.9. Étudions la série entière définie par $\sum_n a_n z^n$ avec a_n défini par (D.7) sur le cercle de convergence dans le cas où $0 < \alpha \leq 1$. Il suffit donc de considérer un réel t et d'étudier la série de terme général $\widetilde{a}_n$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{a}_n = \frac{e^{int}}{n^\alpha}. \tag{D.8}$$

Remarquons tout d'abord que si α_n est une suite de réels positifs, décroissante et admetant 0 comme limite, alors la série de terme général $\alpha_n e^{int}$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Il suffit en effet d'appliquer le lemme D.6 page précédente. En effet, on a, en posant $b_k = e^{ikt}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{it}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

et donc

$$\begin{aligned}|B_n| &= \left|\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right|,\\ &\leq \frac{2}{|e^{it}-1|},\\ &= \frac{2}{\left|e^{it/2}\right|\left|e^{it/2}-e^{-it/2}\right|},\\ &= \frac{1}{|\sin(t/2)|}.\end{aligned}$$

On déduit donc de cela la convergence de la série de terme général $\widetilde{a}_n$ en choisissant $\alpha_n = 1/n^\alpha$.

On peut aussi déduire de tout cela, le comportement des séries réelles de terme général $\cos(nt)/n^\alpha$ et $\sin(nt)/n^\alpha$. Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, la première série diverge et la seconde est nulle. Si $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, les deux séries sont convergentes. Plus de détails dans [RDO87, section 1.3.2 p.18].

Exemple D.10. On retrouve ainsi le cas classique des séries réelles alternées. Plus de détails dans [RDO87, section 1.3.3]

Exemple D.11. En particulier, si on considère la série entière $\sum_{n\geq 1} z^n/n$, on constate que son rayon vaut 1. Si $z=1$, elle diverge. Si $z=-1$, elle converge (série alternée) et sinon, elle converge (voir exemple D.8 page précédente avec $\alpha = 1$).

Donnons maintenant un résultat fondamental, le Théorème d'Abel (à ne pas confondre avec le lemme d'Abel D.1 page 155 ni avec les deux régles d'Abel D.6 page 157 et D.7).

Théorème D.12 (Théorème d'Abel).
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et z_0 un nombre complexe de module R tel que la série $\sum_n a_n z_0^n$ converge. Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$, c'est-à-dire, l'ensemble des nombres complexes de la forme tz_0 avec $t \in [0,1]$.

Remarque D.13. Remarquons que cela implique le résultat suivant (puisque la convergence uniforme entraîne la continuité sur $[0, z_0]$ et donc en particulier la continuité en z_0 si t s'approche de z_0 en restant sur $[0, z_0]$) : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et z_0 un nombre complexe de module R tel que la série $\sum_n a_n z_0^n$ converge. Alors

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t\in[0,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n. \tag{D.9}$$

Démonstration directe de (D.9). Remarquons que par changement de variable

$$Z = \frac{z}{z_0}, \tag{D.10}$$

on peut supposer sans perte de généralité que

$$z_0 = 1. \tag{D.11}$$

Notons

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{D.12}$$

Soit donc $t \in [0,1]$. Appliquons de nouveau la transformation d'Abel (D.2) appliquée au couple de suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha_n = t^n$ et $b_n = a_n$ et raisonnons comme dans les premières pages concernant la preuve du Théorème 2.2 de de `http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf`. En notant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} a_n,$$

on a

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}t^{n+k} = \sum_{k=1}^{p}\left(t^{n+k}-t^{n+k+1}\right)B_{n+k} - t^{n+1}B_n + t^{n+p+1}B_{n+p}.$$

et donc

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}t^{n+k} = (1-t)\sum_{k=1}^{p} t^{n+k}B_{n+k} - t^{n+1}B_n + t^{n+p+1}B_{n+p} \tag{D.13}$$

Cette égalité est en fait valable aussi pour $n=-1$ (par convention $B_{-1}=0$), ce qui donne :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=1}^{p} a_{k-1}t^{k-1} = (1-t)\sum_{k=1}^{p} t^{k-1}B_{k-1} - t^0B_{-1} + t^pB_{p-1},$$

ce qui donne en posant $k'=k-1$

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{p-1} a_{k}t^{k} = (1-t)\sum_{k=0}^{p-1} t^{k}B_{k} + t^pB_{p-1}. \tag{D.14}$$

Supposons maintenant que $t\in[0,1[$. On sait que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k t^k$ tend vers $f(t)$ si p tend vers l'infini. De plus, la somme B_{p-1} est bornée (car elle a pour limite $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$) et donc t^pB_{p-1} tend vers zéro quand p tend vers l'infini. De cela et de (D.14) on déduit donc que la série de terme général t^kB_k converge et à la limite $p\to\infty$, on obtient donc

$$\forall t\in[0,1[,\quad f(t) = (1-t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^kB_k. \tag{D.15}$$

On écrit l'égalité classique

$$\forall t\in[0,1[,\quad \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}. \tag{D.16}$$

On déduit donc de (D.15) et (D.16)

$$\forall\in[0,1[,\quad f(t)-S = (1-t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^kB_k - (1-t)S\sum_{k=0}^{+\infty} t^k,$$

et donc

$$\forall\in[0,1[,\quad f(t)-S = (1-t)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(B_k-S)t^k\right), \tag{D.17}$$

avec la convergence de la série de terme général $(B_k-S)t^k$. Une fois que l'on a obtenu l'égalité (D.17), on conclut rapidement. Soit $\varepsilon>0$ fixé En effet, puisque par définition

$$\lim_{n\to+\infty} B_n - S = 0,$$

il existe un rang N tel que

$$\forall n\geq N,\quad |B_n-B|\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

et, d'après (D.17)

$$\begin{aligned}
\forall\in[0,1[,\quad |f(t)-S| &\leq (1-t)\sum_{k=0}^{+\infty}|B_k-B|\,t^k,\\
&\leq (1-t)\sum_{k=N}^{+\infty}|B_k-B|\,t^k + (1-t)\sum_{k=0}^{N}|B_k-B|\,t^k,\\
&\leq (1-t)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N}^{+\infty} t^k + (1-t)\sum_{k=0}^{N}|B_k-B|\,t^k,
\end{aligned}$$

On a aussi, grâce à (D.16)

$$\forall \in [0,1[, \quad (1-t)\sum_{k=N}^{+\infty} t^k \leq (1-t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = 1,$$

et finalement (puisque c'est aussi vrai pour $t=1$)

$$\forall \in [0,1], \quad |f(t)-S| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-t)\sum_{k=0}^{N} |B_k - B|\, t^k, \tag{D.18}$$

L'entier N étant désormais fixé, l'application $t \mapsto (1-t)\sum_{k=0}^{N} |B_k - B|\, t^k$ tendant vers zéro quand t tend vers 1, on a donc

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [1-\eta, 1], \quad (1-t)\sum_{k=0}^{N} |B_k - B|\, t^k \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et de (D.18) on tire finalement

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [1-\eta, 1], \quad |f(t)-S| \leq \varepsilon.$$

Remarque D.14. La convergence de la série de terme $t^k B_k$ et le résultat (D.15) peuvent être en fait obtenus directement via l'équation (D.4) qui donne en effet ici

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1[, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(t^k - t^{k+1}\right) B_k,\\ &= (1-t)\sum_{k=0}^{\infty} t^k B_k,\end{aligned}$$

et la convergence de la série de terme général $t^k B_k$.

□

Démonstration du Théorème D.12. Comme précédemment, on peut supposer sans perte de généralité que (D.11) a lieu.

Il existe deux types de preuves légèrement différentes. La première utilise le critère de Cauchy uniforme et la transformation d'Abel (D.3). On renvoie à la preuve de [RDO88, section 3.1.3.2].

La seconde preuve, n'utilise pas directement le critère de Cauchy uniforme. Elle consiste à montrer que le reste R_N de la somme $\sum_n a_n z^n$ tend uniformément vers zéro quand z appartient à $[0,1]$ quand N tend vers l'infini (une convergence ayant lieu indépendamment de z). C'est la preuve faite dans les premières pages concernant la preuve du Théorème 1 de de `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/DN.pdf` et que nous allons présenter

On considère, pour tout $t \in [0,1]$, $R_n(t)$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k t^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k, \tag{D.19}$$

qui est défini pour $t<1$ comme pour $t=1$, compte tenu des hypothèses faites, et R_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k. \tag{D.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0. \tag{D.21}$$

(1) Remarquons que si la série $\sum_n a_n z_0^n = \sum_n a_n$ converge absolument, le résultat est immédiat. En effet, on a pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout n et Q

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{Q} a_k t^k\right| &\leq \sum_{k=n}^{Q} \left|a_k t^k\right|, \\ &\leq \sum_{k=n}^{Q} |a_k| \left|t^k\right|, \\ &\leq \sum_{k=n}^{Q} |a_k|,\end{aligned}$$

on peut faire ensuite faire tendre Q vers l'infini puisque la série de $\sum_n a_n$ converge absolument, on obtient

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_n t^n\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_n|,$$

ce qui donne donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad |R_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|, \tag{D.22}$$

qui tend uniformément vers zéro quand t appartient à $[0,1]$ quand N tend vers l'infini (une convergence ayant lieu indépendamment de t).

Plus rapidement encore, il suffit d'écrire que la série de fonction de terme général $a_n t^n$ converge normalement sur $[0,1]$ (puisque $|a_n t^n| \leq |a_n|$) et donc uniformément.

(2) Remarquons que si la série $\sum_n a_n$ est une série alternée, la preuve est, dans ce cas, simplifiée. Dans ce cas, la convergence n'est plus normale mais uniforme. On procède en effet comme on avait déjà fait dans la section V.2 page 270 et le résultat (V.1). On remarque que, pour tout $t \in [0,1]$, la série de terme général $a_n t^n$ est aussi alternée puisque (il suffit de faire l'étude pour $t \neq 0$)

$$\frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} t,$$

et donc $a_n t^n$ est bien de la forme $\pm |a_n t^n| (-1)^n$. On a aussi

$$\left|\frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} t\right| \leq 1,$$

et donc la suite $|a_n t^n|$ est décroissante. Comme la suite a_n tend vers zéro, il en est de même pour la suite $a_n t^n$. On peut donc majorer le reste de la série de terme général $a_n x^t$ par le premier terme négligé :

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \left||R_N(t)| = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n\right| \leq \left|a_{N+1} t^{N+1}\right| \leq |a_{N+1}|.$$

La série de terme général $a_n t^n$ converge donc uniformément sur $[0,1]$.

(3) On se place maintenant dans le cas où la série $\sum_n a_n z_0^n = \sum_n a_n$ converge sans hypothèse supplémentaire. Il va falloir utiliser la transformation d'Abel (D.3). Donnons ici une preuve un peu plus simple où on utilise directement une transformation adaptée. On écrit directement d'après (D.19) pour tout

$t \in [0,1[$ et pour tout $(q,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $q \leq p$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=q}^{p} a_k t^k &= \sum_{k=q}^{p} \left(R_k - R_{k+1}\right) t^k,\\ &= \sum_{k=q}^{p} R_k t^k - \sum_{k=q}^{p} R_{k+1} t^k,\end{aligned}$$

puis on pose dans la seconde somme $k' = k+1$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=q}^{p} R_k t^k - \sum_{k'=q+1}^{p+1} R_{k'} t^{k'-1},\\ &= \sum_{k=q}^{p} R_k t^k - \sum_{k=q+1}^{p+1} R_k t^{k-1},\\ &= \sum_{k=q}^{p} R_k t^k - \sum_{k=q}^{p} R_k t^{k-1} + R_q t^{q-1} - R_{p+1} t^p,\end{aligned}$$

et donc

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \text{ tel que } q \leq p, \quad \forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k = \sum_{k=q}^{p} R_k t^{k-1}(1-t) + R_q t^{q-1} - R_{p+1} t^p,$$

et donc

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \text{ tel que } q \leq p, \quad \forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k = (1-t)\sum_{k=q}^{p} R_k t^{k-1} + R_q t^{q-1} - R_{p+1} t^p. \tag{D.23}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après (D.21), il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{D.24}$$

Il vient donc (puisque $t \leq 1$) selon (D.23) :

$$\forall p \geq q, \quad \forall q \geq N, \quad \forall t \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\left((1-t)\sum_{k=q}^{p} t^{k-1} + 2\right). \tag{D.25}$$

Enfin, on écrit pour tout $t < 1$:

$$\begin{aligned}(1-t)\sum_{k=q}^{p} t^{k-1} &\leq (1-t)\sum_{k=0}^{\infty} t^k,\\ &= 1\end{aligned}$$

Puisque cela est aussi valable pour $t = 1$ (tout est nul), on a donc d'après (D.25)

$$\forall p \geq q, \quad \forall q \geq N, \quad \forall t \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k\right| \leq \varepsilon \tag{D.26}$$

On peut faire tendre p vers l'infini et on obtient

$$\forall q \geq N, \quad \forall t \in [0,1], \quad |R_q(t)| \leq \varepsilon$$

soit encore la convergence uniforme.

□

L'égalité (D.9) est utile en pratique, quand il est plus facile de voir la limite de f que la somme de la série. Voir les exemples qui suivent.

EXEMPLE D.15. On peut déduire de l'égalité (D.9) le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2), \tag{D.27}$$

résultat qui avait été démontré dans la section V.2 page 270 et le résultat (V.1). Il suffit de remarquer que la série entière de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ a un rayon égal à 1 et est égale à $\ln(1+x)$ sur $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ ou égale à $\mathrm{Ln}(1+z)$ sur le disque de convergence en enlevant l'axe $\mathbb{R}_-$. Voir la proposition 2.38 page 24. Par ailleurs, on sait que la série de terme général $(-1)^{n-1}/n$ converge (série alternée ou voir l'exemple D.8 page 158). De (D.9) et $a_n = (-1)^{n-1}/n$ avec $n \geq 1$, on déduit donc

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

dont découle (D.27) par continuité du logarithme en 2.

EXEMPLE D.16. On peut déduire de l'égalité (D.9) le résultat suivant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{D.28}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente (série alternée). Pour cela, on considère la fonction arctan dont le développement en série entière est

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

ce qui peut se vérifier par exemple en utilisant la dérivée de arctan qui est $1/(1+x^2)$. On raisonne exactement comme dans l'exemple D.15 et en utilisant $\arctan(1) = \pi/4$.

EXEMPLE D.17. On peut déduire de l'égalité (D.9) les résultats suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \cup]-1,+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} = 2^\alpha, \tag{D.29a}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \cup \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} = 0. \tag{D.29b}$$

(1) Remarquons que si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors à partir de $n = \alpha + 1$, tous les termes de la somme de (D.29a) sont nuls et il faut donc montrer que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} = 2^\alpha. \tag{D.30}$$

Cela vient tout simplement de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \tag{D.31}$$

Le développement de la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \end{aligned}$$

et on trouve le résultat en prenant $x = 1$. On fait de même pour montrer (D.29b) mais en choisissant $x = -1$.

(2) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, aucun des coefficients des sommes (D.29) n'est nul. On considère de nouveau la fonction f dont on sait que le développement en série entière est donné par

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \tag{D.32}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Or, on a, pour tout n :

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!} \times \left(\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!}\right)^{-1}, \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)} \frac{n!}{(n+1)!},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1}, \tag{D.33}$$

et en particulier

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

La formule de d'Alembert donne donc un rayon de convergence égal à $R = 1$.

(a) Étudions tout d'abord la convergence de la série de terme général a_n. D'après (D.33) pour tout n assez grand (tel que $n > \alpha$), on a $\alpha - n < 0$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \alpha \Longrightarrow a_{n+1}a_n < 0. \tag{D.34}$$

Enfin, d'après (D.33), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \alpha \Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1}, \tag{D.35}$$

et donc, pour n tendant vers l'infini, on a successivement

$$\begin{aligned}\frac{n-\alpha}{n+1} &= \frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}}, \\ &= \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}, \\ &= \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \\ &= 1-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1-\frac{1+\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{D.36}$$

De (D.36), on peut déduire [RDO87, Proposition du cas "douteux" p. 14 de la section 1.2.3] qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|a_n| \sim \frac{A}{n^{1+\alpha}}. \tag{D.37}$$

On peut aussi déduire de (D.35)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > -1 \text{ et } n > \alpha \Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1. \tag{D.38}$$

Ainsi, on en déduit :

(i) si $\alpha > -1$, alors la suite de terme $|a_n|$ tend vers zéro. De plus, d'après (D.38), elle est décroissante. Enfin, d'après (D.34), le signe de a_n (pour $n > \alpha$) est $\pm(-1)^n$ La série de terme général a_n est donc une série alternée et donc convergente (voir par exemple [RDO87, section 1.3.3]).

(ii) Au contraire, si $\alpha \leq -1$, alors la suite a_n ne tend par vers zéro et la série de terme général ne saurait converger.

Bref, la série de terme général a_n converge ssi $\alpha > -1$. Dans ce cas, on applique (D.9) avec $x = 1$ et on obtient (D.29a).

(b) Étudions maintenant la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$. Dans ce cas, (D.33) est remplacé par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{(-1)^n a_n} = \frac{n-\alpha}{n+1},$$

et donc

$$\text{Pour tout } \; n \geq \alpha, \; (-1)^n a_n \text{ est signe constant.} \tag{D.39}$$

L'équation (D.37) est toujours valable. Dans ce cas, la série de terme général $(-1)^n a_n$, de signe constant, est donc convergente ssi $\alpha > 0$. Dans ce cas, si on choisit $x = -1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} = (1-1)^{\alpha}$$

et donc (D.29b).

Exemple D.18. On peut déduire de l'égalité (D.9) les résultats suivant :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{D.40a}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \tag{D.40b}$$

Or, on connaît les valeurs connues des deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},, \tag{D.41a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \tag{D.41b}$$

Voir par exemple (V.46) et (V.47) et l'établissement ces formules par exemple la section V.3 page 273 par les série de Fourier ou plus subtilement dans la section V.4 ou encore plus élégant dans la section V.5 page 288. On a donc explicité les valeurs des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \frac{\pi^2}{6}, \tag{D.42a}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \frac{\pi^2}{12}. \tag{D.42b}$$

Pour montrer (D.40), on considère la série entière définie par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \tag{D.43}$$

dont le rayon de convergence vaut $R=1$, ce que l'on détermine en utilisant la formule de d'Alembert. On a

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n^2},$$

et donc

$$\forall x\in]-1,1[\backslash\{0\},\quad f'(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}. \tag{D.44}$$

On sait aussi que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x). \tag{D.45}$$

Ainsi, d'après (D.44) et (D.45)

$$\forall x\in]-1,1[\backslash\{0\},\quad f('x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x),$$

et donc pour tout $c\in]-1,1[$ tel que l'intervalle $[c,1]$ ne contienne pas zéro :

$$\forall x\in]-1,1[\backslash\{0\},\quad f(x)=f(c)-\int_c^x\frac{\ln(1-u)}{u}du.$$

la fonction $\frac{\ln(1-u)}{u}$ est en fait prolongeable par continuité en zéro et on peut donc écrire en prenant $c=0$:

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)=f(0)-\int_0^x\frac{\ln(1-u)}{u}du. \tag{D.46}$$

et donc puisque $f(0)=0$

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-u)}{u}du. \tag{D.47}$$

Les séries de terme général $\frac{1}{n^2}$ et $(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ sont convergente et on peut déduire de l'égalité (D.9) par passage à la limite quand $x\to 1$ dans (D.47) l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=f(1)=-\int_0^x\frac{\ln(1-u)}{u}du$$

et en faisant $x\to -1$ dans (D.47), on obtient l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=-f(1)=\int_0^{-1}\frac{\ln(1-u)}{u}du,$$

et on transforme la dernière intégrale en posant $v=-u$.

Remarque D.19. La fonction définie par (D.47) est appelée le dilogarithme. Voir par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Dilogarithme`.

Nous reprendrons les exemples D.15, D.16 et D.18 plus rapidement plus tard, sans avoir à montrer la convergence de la série de terme général a_n.

Voici maintenant une version un peu plus forte du théorème D.12 page 159 et de (D.13), le théorème d'Abel non-tangentiel, qui est présenté dans le cas $z_0=1$ et $R=1$ mais qui se généralise pour z_0 et R fini quelconque en faisant le changement de variable (D.10).

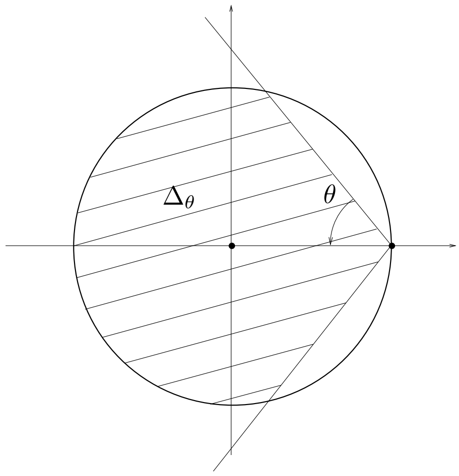


FIGURE D.1. Δ_θ.

THÉORÈME D.20 (Théorème d'Abel non-tangentiel).

Soit une série entière $\sum_a a_n z^n$ de rayon 1 et de somme f sur le disque de convergence, $D(0,1)$ Soient $\theta \in [0, \pi/2[$ et Δ_θ (voir figure D.1) défini par

$$\Delta_\theta = \left\{1 - \rho e^{i\phi}, \quad \rho > 0, \quad \phi \in [-\theta, \theta].\right\} \cap D(0,1) \tag{D.48}$$

Si la série de terme général a_n converge, alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{D.49}$$

DÉMONSTRATION. On renvoie aux pages 3 et 4 de `http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf`, elle-même inspirées de [Gou20] et [ZQ13]. □

REMARQUE D.21. On parle aussi parfois du théorème de continuité en "bec de canard" en élargissant Δ_θ

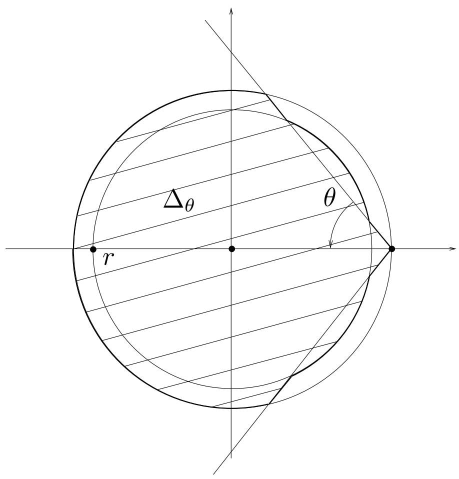


FIGURE D.2. Δ_θ^r.

en le remplaçant par Δ_θ^r pour tout $r \in [0,1[$ défini par

$$\Delta_\theta^r = \Delta_\theta \cup D(0,r),$$

comme le montre la figure D.2.

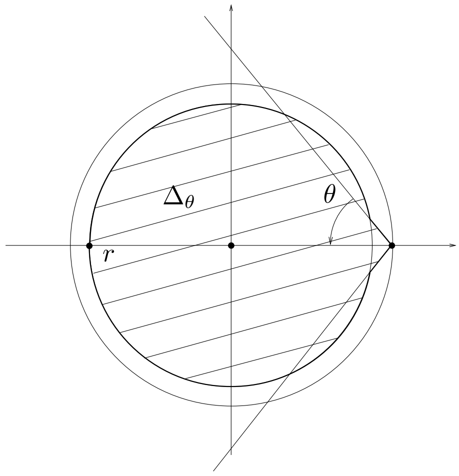


FIGURE D.3. $\widetilde{\Delta}_\theta^r$.

De plus, dans ce cas, la fonction f est uniformément continue sur

$$\widetilde{\Delta}_\theta^r = (\Delta_\theta \setminus \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| > r\}) \cup D_{\mathrm{f}}(0,r).$$

représenté sur la figure D.3.

Venons-en maintenant au problème beaucoup plus délicat, la réciproque. En se plaçant sans perte de généralité en $z_0 = 1$ et en prenant $R = 1$, on suppose que la série entière $\sum_n a_n z^n$ de somme f a un rayon égal à R et que la limite de $f(t)$ quand t tend vers 1 en restant sur $[0,1[$ existe et vaut l. On se demande alors d'une part si la série de terme général converge et d'autre part si sa somme vaut l. Si la série converge, sa somme est nécessairement l, d'après tout ce qui précède.

On donne la définition suivante :

DÉFINITION D.22 (Série Abel-sommable).

Soit une série de terme général a_n. Elle est dite Abel-sommable si la série entière $\sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à un 1 et si la fonction f de la variable réelle $t \in [0,1[$ définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{D.50}$$

admet une limite finie quand t tend vers un par valeurs strictement inférieures.

On pourra supposer $R = 1$, car le cas $R > 1$ est immédiat, par convergence uniforme.

On a déjà vu précédemment que l'existence de la série de terme général a_n entraîne son aspect Abel-sommable avec

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Maintenant, on se demande si l'Abel-sommabilité entraîne la convergence de la série de terme général a_n.

EXEMPLE D.23. Les séries des exemples D.15, D.16 et D.17, sont Abel-sommables et correspondent à des cas où la série de terme général a_n converge.

Cependant, assurément, sans hypothèses supplémentaires sur les a_n, cette réciproque est fausse, c'est-à-dire que la série de terme général a_n ne converge pas.

EXEMPLE D.24. Les exemples de la section D.4 le prouvent. Les séries entières $\sum_n a_n t^n$, $\sum_n b_n t^n$ et $\sum_n c_n t^n$ (qui peuvent aussi être définies sur $\mathbb{C}$) données

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n, \tag{D.51a}$$

$$b_n = (-1)^{n+1} n, \tag{D.51b}$$

$$c_n = n. \tag{D.51c}$$

ont un rayon de convergence égal à 1. Les sommes $A(t) = \sum_n a_n t^n$, $B(t) = \sum_n b_n t^n$ et $C(t) = \sum_n b_n t^n$ sont données par

$$\forall t \in]-1,1[, \quad A(t) = \frac{1}{1+t}, \tag{D.52a}$$

$$B(t) = \frac{t}{(1+t)^2}, \tag{D.52b}$$

$$C(t) = \frac{t}{(t-1)^2}. \tag{D.52c}$$

Les deux premières séries sont Abel-sommables mais pas la dernière puisque l'on a

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} A(t) = \frac{1}{2}, \tag{D.53a}$$

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} B(t) = \frac{1}{4}, \tag{D.53b}$$

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} C(t) = +\infty. \tag{D.53c}$$

Il est clair que les séries de terme général respectivement égal à a_n, b_n et c_n ne convergent pas puisque a_n est bornée mais ne tend pas vers zéro, b_n et c_n ne sont pas bornées.

Tout d'abord, remarquons que la série de terme général c_n est en fait gérée par le théorème suivant, qui est un cas trivial de série non Abel-sommable :

THÉORÈME D.25.
Soit $\sum_n a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose que la série de terme général a_n diverge et que, pour tout n, $a_n \geq 0$. On a alors

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = +\infty. \tag{D.54}$$

DÉMONSTRATION. Voir Théorème 2 p. 2 de `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/DN.pdf`

Notons

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

et

$$\forall t \in]-1,1[, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k.$$

Soit $A > 0$. Puisque la série de terme général a_n diverge, il existe un entier N tel que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k = g_N(1) \geq A + 1.$$

Pour ce N fixé, comme la fonction g_N est continue en 1 et croissante sur $\mathbb{R}$ (car les a_n sont positifs) , il existe η tel que

$$\forall t \in [1-\eta, 1], \quad 0 \leq g_N(1) - g_N(t) < 1,$$

et donc

$$\forall t \in [1-\eta, 1], \quad g(t) \geq g_N(t) = g_N(1) - (g_N(1) - g_N(t)) \geq A + 1 - 1 = A,$$

ce qui montre (D.54). □

Donnons maintenant enfin un théorème permettant d'assurer que l'Abel-sommabilité entraîne la convergence de la série :

THÉORÈME D.26 (Tauber, 1897, Théorème "faible").
Si la série de terme général a_n est Abel-sommable et vérifie

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{D.55}$$

alors la série de terme général a_n converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n. \tag{D.56}$$

DÉMONSTRATION. On renvoie à la démonstration du théorème 3.1 de `http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf` elle-même issue de [Gou20]. □

Finissons enfin un théorème beaucoup plus fort où on affaiblit (D.55) :

THÉORÈME D.27 (Théorème "fort" de Tauber, dit Théorème O de Hardy-Littlewood (1911)).
Si la série de terme général a_n est Abel-sommable et vérifie

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{D.57}$$

alors la série de terme général a_n converge et (D.56) *a lieu.*

DÉMONSTRATION. On renvoie à la démonstration beauoup plus technique du théorème 3.2 de `http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf` elle-même issue de [Gou20] et surtout de [Tos]. □

EXEMPLE D.28. Grâce au théorème D.27, on peut reprendre les exemples D.15, D.16 et D.18. sans avoir à vérifier *a priori* la convergence de la série de terme général a_n qui est assurée ! Pour l'exemple D.17, on laisse au lecteur vérifier le soin que l'hypothèse (D.57) n'est vraie que pour $\alpha > 0$ donc que pour la preuve de (D.29b). Le cas $\alpha > -1$ et la preuve de (D.29a) n'est plus couvert par ce théorème D.27 et il faut raisonner en montrant à la main la preuve de la série de terme général a_n, comme montré dans l'exemple D.17.

D.4. Des faux paradoxes fondés sur l'Abel-sommabilité

Nous donnons un exercice et son corrigé, illustrant les notions vues précédemment.

Énoncé

(1) On tient le raisonnement suivant.

(a) Posons

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

On écrit

$$-A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

et en ajoutant 1

$$1-A=1-1+1-1+1-1+...=A.$$

Ainsi, $1-A=A$ et donc

$$A=\frac{1}{2}.$$

(b) Posons

$$B=1-2+3-4+5-6+....$$

On a d'après la définition de A

$$\begin{aligned}B-A&=(1-1)+(-2+1)+(3-1)+(-4+1)+(5-1)+(-6+1)+...,\\&=0-1+2-3+4-5+...,\\&=-B.\end{aligned}$$

Ainsi $B-A=-B$ et $B=A/2$ et donc, d'après ce qui précède

$$B=\frac{1}{4}.$$

(c) Enfin, posons

$$C=1+2+3+4+5+6+....$$

On a

$$\begin{aligned}C-B&=(1-1)+(2+2)+(3-3)+(4+4)+(5-5)+(6+6)+...,\\&=4\left(1+2+3+....\right),\\&=4C.\end{aligned}$$

Ainsi, $C-B=4C$ et $C=-B/3$ et donc, d'après ce qui précède

$$C=1+2+3+4+5+6+....=-\frac{1}{12}.$$

Montrer pourquoi ce raisonnement n'est pas correct.

Attention, hormis la propriété (D.58)*, les techniques de cet exercice, utilisées pour expliquer un paradoxe, ne doivent pas être utilisées dans un contexte "académique".*

(2) (a) En adaptant le calcul présenté *et sans calculer explicitement les série entières suivantes*, déterminez-les :

$$\begin{aligned}\text{on pose pour tout } x\in]-1,1[,\ A(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\\B(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n,\\C(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n,\end{aligned}$$

et donner un sens aux sommes définies ci-dessus.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série absolument convergente. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n. \tag{D.58a}$$

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $(a_n x^n)$ est supérieur à 1, que f est définie et continue sur $[-1, 1]$ et en particulier que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \leq 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{D.58b}$$

Cela revient à adopter la définition D.22 page 169.

(c) On suppose maintenant que la série de terme général a_n n'est plus nécessairement convergente, mais que la fonction f définie par (D.58a) sur tout l'intervalle $[-1, 1]$ est définie et continue.

La méthode de sommation d'Abel consiste a écrire que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *est alors formellement définie grâce à l'égalité* (D.58b).

Conclure sur les valeurs de sommes A, B et C données dans le raisonnement problématique de la question (1).

Corrigé

On pourra consulter
`https://www.youtube.com/watch?v=xqTWRtNDO3U`

(1) On manipule des sommes infinies qui n'existent pas.

En effet, les "petits points" désigne des sommes qui sont nécessairement à nombre de termes infinis.

En effet, si elles désignent des sommes à nombre fini de termes, les termes finaux ne disparaissent pas et les simplifications annoncées ne se font pas. On pourrait expliciter ces sommes et constater qu'elles ne valent pas les valeurs données. Par exemple, A vaut 0 ou 1 suivant la parité du nombres de termes que l'on prend.

Ainsi, ce sont des sommes à nombre de termes infinis et elles correspondent alors à des sommes de séries qui divergent donc désignent des quantités qui n'existent pas (au sens habituel[1] du terme.). En anticipant sur la suite, A, B et C seraient la somme des séries de termes généraux respectivement égaux à $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}n$ et n, qui ne convergent pas, puisque ces trois suites ne tendent pas vers 0, la dernière tendant même vers l'infini !

(2) (a) On vérifie que les trois rayons de convergence des séries entières introduites sont égaux à 1 et on peut donc faire tous les calculs souhaités si x appartient à $]-1, 1[$, en remarquant que les sommes sont absolument convergentes, à x fixé. Reprenons les calculs présentés en introduisant la variable x, appartenant donc à $]-1, 1[$ et qui sont donc, cette fois-ci, tout à fait valables !

(i) Posons

$$A(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

1. mais on verra plus bas qu'en étendant la notion de série, on retrouve du vrai dans les valeurs données.

On écrit

$$\begin{aligned}
-A(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n,\\
&= -1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n,\\
&= -1+x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1},\\
&= -1+x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\\
&= -1+xA(x),
\end{aligned}$$

et en ajoutant 1

$$1-A(x)=xA(x)$$

Ainsi, $1=A(x)+xA(x)$ et donc

$$A(x)=\frac{1}{1+x}. \tag{D.59}$$

Formellement, si on remplace x par 1, ce qu'on n'a pas le droit de faire en toute rigueur, puisque la somme n'existe pas, on retrouve donc le $1/2$ annoncé.

Remarque D.29. On peut aussi se passer du raisonnement incorrect et calculer directement A en écrivant, pour x dans $]-1,1[$,

$$A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x},$$

mais ce n'était pas le but de cet exercice !

(ii) Posons

$$B(x)=x-2x^2+3x^3-4x^4+5x^5-6x^6+....=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^n.$$

On a d'après la définition de $A(x)$

$$-A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n,$$

et donc, pour x non nul,

$$\begin{aligned}
B(x) - A(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n (n+1), \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1} (n+1), \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} x^{n} (n), \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} x^{n} (n), \\
&= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n} (n), \\
&= -\frac{1}{x} B(x),
\end{aligned}$$

Ainsi $B(x) - A(x) = -B(x)/x$ et $B(x) = xA(x)/(x+1)$ et donc, d'après ce qui précède

$$B(x) = \frac{x}{(1+x)^2}. \tag{D.60}$$

Cette égalité est encore valable pour $x = 0$. Formellement, si on remplace x par 1, ce qu'on n'a pas le droit de faire en toute rigueur, puisque la somme n'existe pas, on retrouve donc le $1/4$ annoncé.

Remarque D.30. Comme dans la remarque D.29, on peut aussi se passer du raisonnement incorrect et calculer directement B en écrivant, pour x dans $]-1, 1[$

$$\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^n, \\
&= x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}, \\
&= -x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n.
\end{aligned}$$

Posons

$$\widetilde{B}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n$$

Par intégration, à une constante additive près (ce qui est valide pour les séries entières sur l'intervalle de convergence)

$$\begin{aligned}
\int \widetilde{B}(x)dx &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\frac{x^{n+1}}{n+1},\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{n+1},\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^{n+1},\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^{n},\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^{n}-1,\\
&= \frac{1}{1+x}-1,
\end{aligned}$$

et par dérivation

$$\widetilde{B}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

D'après ce qui précède, on retrouve bien (D.60), puisque

$$B(x) = x \times \frac{1}{(1+x)^2},$$

mais ce n'était pas le but de cet exercice !

(iii) Enfin, posons

$$C(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n. \tag{D.61}$$

On a

$$\begin{aligned}
C(x) - B(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n nx^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n\left(1+(-1)^n\right),\\
&= \sum_{\substack{n=0,\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} 2nx^n,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 4nx^{2n},\\
&= 4\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{2n},\\
&= 4C\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $C(x) - B(x) = 4C(x^2)$ et

$$C(x) - 4C(x^2) = B(x) \tag{D.62}$$

Formellement, si on remplace x par 1, ce qu'on n'a pas le droit de faire en toute rigueur, puisque la somme n'existe pas, on aurait donc $-3C(1) = C(1) - 4C(1) = B(1)$ et donc, puisqu'on a montré formellement que $B(1) = 1/4$, on aurait donc $C(1) = -B(1)/3 = -1/12$.

Remarque D.31. Comme dans la remarque D.29 et D.30, on pourrait aussi se passer du raisonnement incorrect et calculer directement C en dérivant et en intégrant pour x dans $]-1,1[$ et obtenir l'expression explicite de C. Posons en effet

$$C(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

et donc

$$C(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1},$$

et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{C(x)}{x}dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \int x^{n-1}dx,\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n,\\ &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\\ &= -1 - \frac{1}{x-1},\end{aligned}$$

et par dérivation,

$$C(x) = \frac{x}{(x-1)^2}. \tag{D.63}$$

On peut aussi écrire, de façon alternative, d'après (D.60) :

$$\begin{aligned}C(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(-x)^n,\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n+1}x^n,\\ &= -B(x),\\ &= -\frac{x}{(x+1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$C(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

et on retrouve donc bien (D.63). Ici, on ne peut plus passer à la limite quand x tend vers 1, car

$$\lim_{x\to 1} C(x) = +\infty. \tag{D.64}$$

(iv) Reprenons les calculs pour faire apparaître le $-1/12$. Il suffit de considérer l'expression de C donnée par (D.62) qui donne

$$C(x) - 4C(x^2) = B(x),$$

et "en trichant", en oubliant (D.64), on fait tendre x vers 1 ce qui donne si la limite de $C(x)$ en 1 existait, d'après (D.60) :

$$-3\lim_{x\to 1} C(x) = \lim_{x\to 1} B(x) = \frac{1}{4},$$

ce qui donnerait

$$\lim_{x\to 1} C(x) = -\frac{1}{12}. \tag{D.65}$$

D'autres auteurs, pour faire apparaître la valeur donnée par (D.65), suggérent de poser $x = e^{-t}$, de considérer $t > 0$ et de faire tendre t vers zéro par valeurs strictement positives. D'après (D.63), on a donc pour tout $t > 0$:

$$G(x) = C(e^{-t}) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2}. \tag{D.66}$$

On vérifie aisément que l'on a le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\frac{t^2e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2} = 1 - \frac{1}{12}t^2 + o\left(t^2\right),$$

et donc

$$\frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{t^2} + o\left(1\right), \tag{D.67}$$

On retrouve donc en faisant tendre t vers zéro que l'on a a (D.64). De plus, d'après (D.66) et (D.67), on retrouve en "oubliant" le terme $\frac{1}{t^2}$ la valeur donnée par (D.65).

(b) Puisque la série (a_n) est absolument convergente, $|a_n|$ est bornée et pour tout $x \in [-1,1]$, on a $|a_nx^n| \leq |a_n|$. D'après le lemme d'Abel du cours, le rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1. Ainsi, la fonction f, comme somme de la série entière, est C^∞ sur $]-1,1[$. En revanche, on ne peut rien dire sur f en 1 et -1, *a priori.* Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Puisque, la série (a_n) est absolument convergente, $f(\varepsilon)$ existe. De plus, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $|a_nx^n| \leq |a_n|$. La série (a_nx^n) est donc normalement convergente et sa somme est donc continue sur $[-1,1]$. En particulier, f est définie et continue sur $[-1,1]$ et en particulier $f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} f(x)$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n. \tag{D.68}$$

Remarque D.32. Cette propriété est aussi vraie si la série (a_n) est une série alternée, voire même une série convergente. Voir théorème D.12 page 159

(c) (i) D'après (D.59), on a

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

et donc, on peut poser, au sens d'Abel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2},$$

et on retrouve donc le 1/2 annoncé.

(ii) De même, d'aprèss (D.60), on peut poser, comme dans l'énoncé, $B = 1/4$.

(iii) Voir le point 2(a)iv page précédente et notamment (D.65).

REMARQUE D.33. Dans https://www.youtube.com/watch?v=xqTWRtNDO3U, il est annoncé, en fin de vidéo, que l'on peut montrer que l'on a aussi, au sens de ce que l'on vient de voir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 = 0. \tag{D.69}$$

On fait comme précédemment : on considère la série entière définie par

$$D(x) = 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \tag{D.70}$$

dont on vérifie que le rayon de convergence vaut 1. On peut calculer D de la façon suivante : On a, pour tout $x \in]-1,1[$, grâce à (D.61)

$$C'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1},$$

et donc

$$xC'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n.$$

et donc

$$D(x) = xC'(x).$$

D'après (D.63), on a donc

$$D(x) = x\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)'$$

et après calculs

$$D(x) = -\frac{x\,(x+1)}{(x-1)^3}.$$

On fait comme précédemment : on remplace x par e^{-t} :

$$D(x) = -\frac{e^{-t}\,(e^{-t}+1)}{(e^{-t}-1)^3}$$

et, après calculs, on obtient le dl suivant en 0

$$D(x) = \frac{2}{t^3} + 0 - \frac{1}{120}t + o(t),$$

et comme précédemment, en "négligeant" le terme $\frac{2}{t^3}$, il ne subsiste que 0 et on a donc montré (D.69) !

REMARQUE D.34. Quelques citations extraites de l'Internet sur ces paraxodes.

(1) On pourra consulter une note de Jérôme Germoni, disponible sur http://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=pmi:sommes_infinies_paradoxales.pdf, pour mieux comprendre ce qui est relatif au calcul de C.

"Le vrai miracle, ce n'est pas tant de pouvoir donner une valeur à une somme infinie qui diverge : c'est que plusieurs méthodes donnent la même valeur. L'expliquer et trouver des méthodes systématiques, c'est un chapitre amusant de l'analyse –que je ne connais pas d'ailleurs. On parle de procédés de resommation : ils consistent à trouver des valeurs finies cachées sous des infnis que l'on met sous le tapis. Fantaisie de mathématicien ? Pas du tout ! La théorie de la renormalisation en physique quantique consiste à appliquer des procédés de ce genre et conduit à la meilleure coïncidence de toute la physique entre une prédiction théorique et une valeur expérimentale pour la constante de structure fine $\alpha \approx 1/137$.

Voir
https://fr.wikipedia.org/wiki/Renormalisation
https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_structure_fine

Sur les somme de séries divergentes, voir aussi
https://fr.wikipedia.org/wiki/Série_divergente#Méthodes_de_sommation_d'Abel
https://fr.wikipedia.org/wiki/Sommation_de_Cesàro"

(2) Donnons, pour conclure, un extrait de http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?5,983951,986057,quote=1

"Jean Lismonde : Le résultat que tu exhibes 1/12 et qui faisait "la une" du New-York Times en début d'année 2014 provient de la relation fonctionnelle qui existe entre la série de Riemann définie pour $x > 1$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

et celle des entiers naturels alternés à savoir

$$\zeta_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

soit

$$\zeta(x) = \frac{\zeta_a(x)}{1 - 2^{1-x}}.$$

Il s'agit d'une relation qui permet de prolonger pour $x < 1$ la fonction ζ sachant que ζ_a est elle définie sur $\mathbb{R}$. On sait que $\zeta_a(-1) = 1/4$ que l'on obtient directement ou par le théorème de Cesàro. On en déduit immédiatement le prolongement de ζ pour $x = 1$ soit 1/12."

(3) Extrait de
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?5,983951,986057,quote=1

"Pour ma part, je l'ai croisée pour la première fois lors d'une étude sur l'effet Casimir. Cet effet (qui n'a rien à voir avec l'île aux Enfants) a été prédit par le physicien hollandais Hendrik Casimir, et prévoit que deux plaques parallèles conductrices placées dans le vide vont s'attirer à cause des fluctuations de l'énergie du vide (énergie dont je parlais dans ce billet).

Et pour calculer la force subie par les plaques, on utilise l'égalité $1 + 2 + 3 + 4 + ... = -1/12$! Et ça marche, car cette force a été mesurée expérimentalement !

Mais il existe une autre branche de la physique où cette égalité joue un rôle essentiel, il s'agit de la fameuse théorie des cordes. Comme vous le savez peut-être, cette théorie affirme nous vivons dans un monde à 26 dimensions (ou 10 ou 11, c'est selon). Les cordistes aiment dire que c'est ce que "prédit" la théorie, mais la réalité est un peu différente : ce nombre de dimensions n'est pas une prédiction de la théorie, mais plutôt un prérequis pour que la théorie ait mathématiquement un sens.

J'ai déjà eu l'occasion d'évoquer cette histoire (dans ce billet), mais en gros ce qu'il faut savoir, c'est que si vous essayez de construire une théorie des cordes en dimension $D = 4$, ça ne marche pas, car on trouve plein d'infinis partout. On pourrait être tentés d'abandonner l'idée, sauf qu'un jour quelqu'un a remarqué que les infinis disparaissaient si on choisissait $D = 26$. Et c'est comme ça que les théoriciens des cordes, pour sauver leur belle théorie, ont décidé de se placer en dimension $D = 26$ et de continuer l'aventure comme si de rien n'était.

Mais au fait, pourquoi $D = 26$ est-elle la dimension magique dans laquelle la théorie marche sans que les infinis apparaissent ? Si on fait le détail du calcul, on trouve que le terme infini qui fout le bazar est en fait proportionnel à

$$\left[1 + \frac{D-2}{2}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ...)\right]$$

Or si vous observez cette équation deux minutes, et que vous admettez que $1+2+3+4+... = -1/12$, vous remarquez que tout ce terme devient nul pour $D = 26$, et les infinis disparaissent de la théorie ! Voilà d'où vient le nombre magique, appelé "dimension critique"."

Annexe E

Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$ (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe la redéfinition des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$, sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (Automne 2019) :

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2.

(1) On rappelle que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \tag{E.1a}$$

et que formellement

$$i = \sqrt{-1}. \tag{E.1b}$$

On écrit donc successivement

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i \times i = i^2 = -1$$

et donc

$$\boxed{1 = -1.}$$

Où est la faute commise ?

(2) (a) Montrer que l'application $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de la partie Q de $\mathbb{C}$ définie par

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right[\right\} \tag{E.2}$$

sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(b) Montrer que si l'on pose

$$\widetilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right] \right\}, \tag{E.3}$$

alors f_n est une bijection de $\widetilde{Q}$ sur $\mathbb{C}$.

(c) En déduire qu'il est légitime de noter $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et que l'on a

$$\forall z \in Q, \quad \forall \zeta \in U, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}} \tag{E.4}$$

et

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \tag{E.5}$$

(d) Retrouver la définition de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(3) (a) (i) Dans le cas où $n = 2$, écrire, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions z de l'équation

$$z^2 = \zeta \tag{E.6}$$

en fonction de $\sqrt[2]{\zeta}$, noté comme dans le cas réel, $\sqrt{\zeta}$, et commenter.

(ii) Calculer, de deux façons différentes, $\sqrt{1+i}$.

(b) Généraliser au cas $n \geq 2$ quelconque les résultats de la question (3(a)i) et commenter.

(4) Montrer que $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, avec la définition de la question 2c coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, à condition d'étendre le logarithme complexe à $\mathbb{R}_-^*$ (voir remarque 2.34 page 22 et 2.43 page 25.)

(5) Lever alors le paradoxe de la question 1

Corrigé

On pourra aussi consulter l'exercice de TD 5.18, où on utilise aussi la fonction $\sqrt{}$. Attention, dans cet exercice 5.18, la coupure du logarithme, utilisée, n'est pas $\mathbb{R}_-$. Une autre convention, aussi utilisée dans [AF03], y est utilisée.

On pourra aussi consulter le TP 1.4, en lien avec ces calculs.

(1) La faute commise est l'utilisation de la formule

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \tag{E.7}$$

qui n'est valable que dans le cas où a et b sont des réels positifs. On verra plus bas qu'il est légitime de parler de la racine d'un complexe, moyennant certaines précaution. Ainsi, l'équation

$$i = \sqrt{-1}. \tag{E.8}$$

est correcte. Cependant, nous expliquerons aussi pourquoi le fait d'écrire

$$\sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}, \tag{E.9}$$

n'est en revanche pas correct. Nous expliquerons aussi comment rendre ce calcul correct.

(2) (a) Par définition, pour tout $z \in \mathcal{Q}$, on a

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[. \tag{E.10}$$

On a donc

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta},$$

qui appartient bien au plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, puisque θ est dans $]-\pi, \pi[$.

Réciproquement, si $z \in U$, on a

$$z = Re^{i\phi}, \quad R > 0, \quad \phi \in \left]-\pi, \pi\right[. \tag{E.11}$$

Montrons qu'il existe un unique $\zeta \in Q$ tel que

$$\zeta^n = z. \tag{E.12}$$

On a

$$\zeta = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[. \tag{E.13}$$

Ainsi, (E.12) est équivalent à

$$r^n = R,$$
$$n\theta \equiv \phi\,[2\pi].$$

Puisque $n\theta$ et ϕ appartiennent tous les deux à $]-\pi, \pi[$, ils sont égaux et on a donc

$$r = \sqrt[n]{R}, \tag{E.14a}$$

$$\theta = \frac{\phi}{n}, \tag{E.14b}$$

ce qui définit bien unique $\zeta \in Q$ vérifiant (E.12) Ainsi l'application $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de la partie Q de $\mathbb{C}$ définie par

$$Q = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[\right\} \tag{E.15}$$

sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(b) L'ensemble $\widetilde{Q}$ de l'énoncé est aussi définit par

$$\widetilde{Q} = Q \cup \mathcal{Q} \tag{E.16}$$

où

$$\mathcal{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta = \frac{\pi}{n}. \right\} \tag{E.17}$$

On remarque que l'ensemble $\mathcal{Q}$ est envoyé par la fonction f_n sur $\mathbb{R}_-$, complémentaire de U dans $\mathbb{C}$. Ainsi

$$f_n \text{ est une bijection de } \widetilde{Q} \text{ sur } \mathbb{C}. \tag{E.18}$$

Notons que

$$0^n = 0. \tag{E.19}$$

(c) Il est légitime de noter $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et par définition de f_n^{-1}, notée comme dans le cas réel $z^{1/n}$, on a donc

$$\forall z \in Q, \quad \forall \zeta \in U, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}} \tag{E.20}$$

et

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \tag{E.21}$$

Remarque E.1. On peut vérifier que matlab utilise bien la même définition des fonctions $z^{1/n}$ en traçant l'image d'un ensemble de points appartenant à D, défini par

$$z \in D \Longleftrightarrow \operatorname{Re}(z) \in [-1,1] \text{ et } \operatorname{Im}(z) \in [-1,1].$$

Voir les figures E.1 et E.2. On consultera le TP 1.4 pour retrouver ces figures.

(d) On retrouve alors une extension à $\mathbb{C}$ des fonctions x^n et $x^{1/n}$ qui sont définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x = y^n \Longleftrightarrow y = x^{\frac{1}{n}}. \tag{E.22}$$

Remarque E.2. Montrons que

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad (z^n)^{\frac{1}{n}} = z, \tag{E.23}$$

et que

$$\forall \in \mathbb{C}, \quad z = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n, \tag{E.24}$$

mais que on n'a pas nécessairement :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z^n)^{\frac{1}{n}} = z. \tag{E.25}$$

Les équations (E.23) et (E.24), proviennent tout simplement de la définition de f_n et de f_n^{-1}, comme bijection respectives de $\widetilde{Q}$ sur $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{C}$ sur $\widetilde{Q}$.

Démontrons (E.25) en explicitant $(z^n)^{\frac{1}{n}}$.

On utilise la définition

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(z^n)}, \tag{E.26}$$

et la difficulté est que l'on n'a pas comme dans le cas réel :

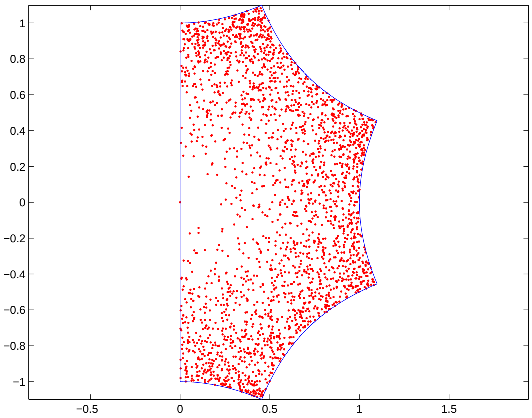
$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln}(z), \tag{E.27}$$

puisqu'on peut montrer, comme dans le cas de l'équation (2.61) du cours, que

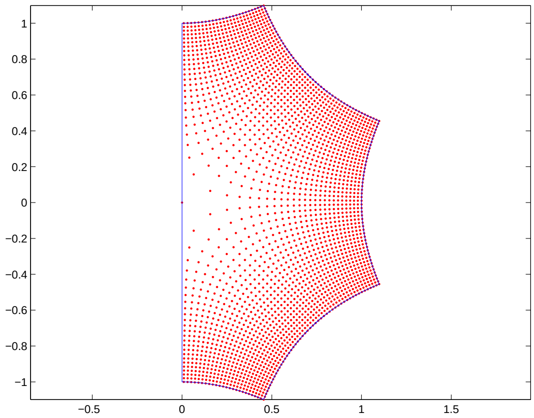
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi, \tag{E.28}$$

où $k \in \{-n, ..., n\}$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, on a

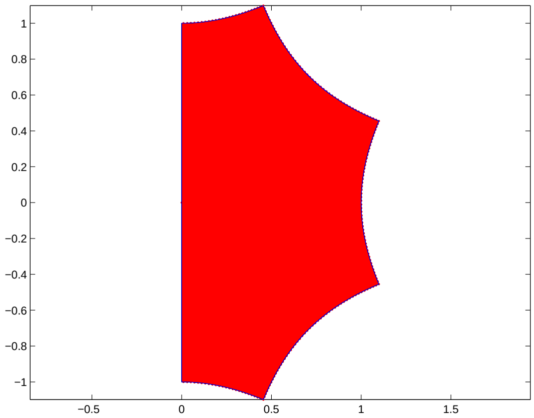
$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = 0 = z.$$



(a) Image d'une partie de D (choix aléatoire)



(b) Image d'une partie de D (choix équiréparti)



(c) Image de D

FIGURE E.1. Image d'une partie ou de la totalité de D par $z^{1/2}$.

On a donc z non nul et on peut supposer que

$$z = \rho e^{i\theta}, \tag{E.29}$$

où $\theta \in]-\pi, \pi]$. On a donc, d'après (E.26)

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}\left(\left(\rho e^{i\theta}\right)^n\right)} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(\rho^n e^{in\theta})},$$

et donc

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i\frac{1}{n}\arg\left(e^{in\theta}\right)} \tag{E.30}$$

On peut découper $\mathbb{C}^*$ de telle sorte que, pour z donné par (E.29), on ait

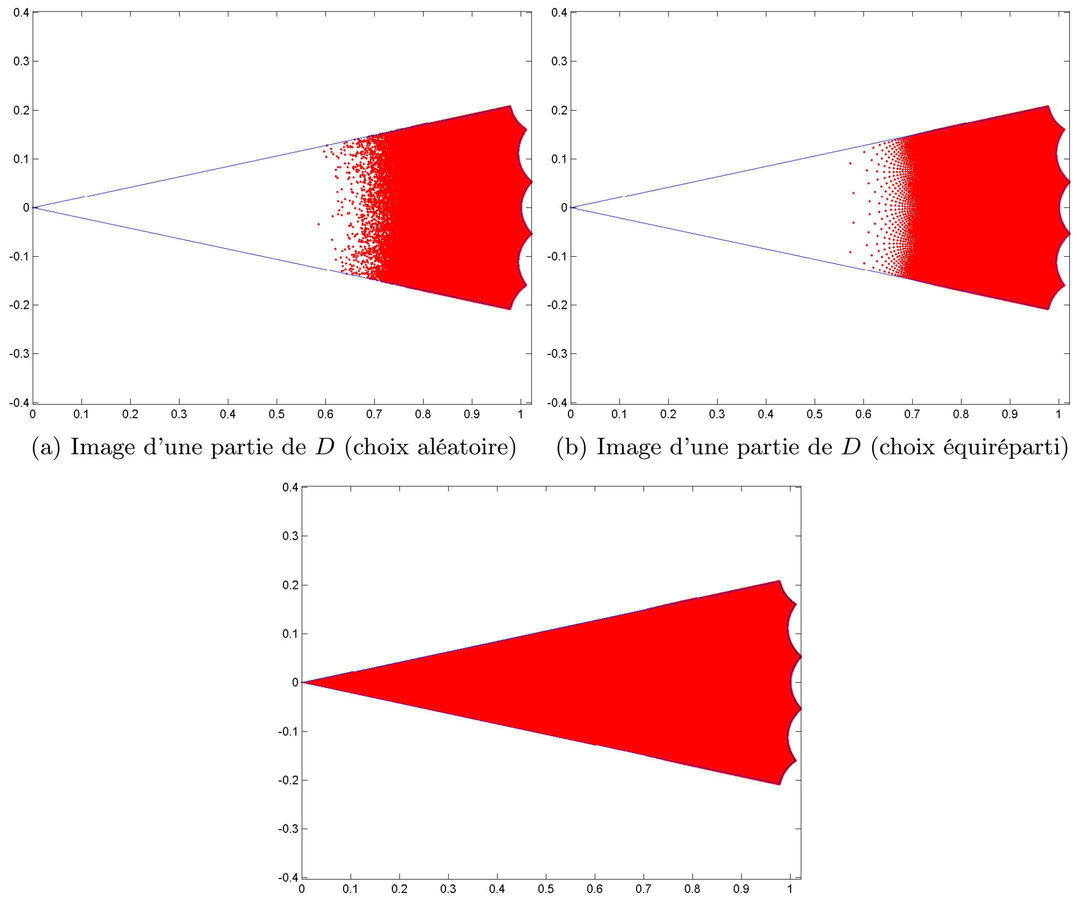
$$-\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \theta \leq \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \tag{E.31}$$

où k est compris entre deux valeurs entières. Attention, au voisine de $\mathbb{R}_-$, il faut affiner cette définition en prenant deux-sous cas, non décrits ici. On a donc

$$e^{in\theta} = e^{i\phi}$$

où $\phi = n\theta$ et donc

$$-\pi < n\theta - 2k\pi \leq \pi,$$



(a) Image d'une partie de D (choix aléatoire) (b) Image d'une partie de D (choix équiréparti)

(c) Image de D

FIGURE E.2. Image d'une partie ou de la totalité de D par $z^{1/15}$.

de sorte que

$$\arg\left(e^{in\theta}\right) = n\theta - 2k\pi,$$

et donc grâce à (E.30),

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

et donc

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = ze^{-\frac{2ki\pi}{n}}. \tag{E.32}$$

Par exemple, on peut montrer, pour $n = 2$, que si $Z \in \widetilde{Q}$,

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = z,$$

et sinon

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = -z,$$

autrement dit, on retrouve le cas réel :

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm z,$$

à ne pas écrire ici sous la forme

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = |z|\,!$$

(3) (a) (i) D'après (E.21) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z_0 \in \widetilde{Q}$ tel que $\zeta = z_0^2$, noté $\sqrt{\zeta}$. Ainsi

$$z^2 = \zeta \tag{E.33}$$

est équivalent à

$$z^2 = z_0^2. \tag{E.34}$$

Si ζ est nul, il en est de même de z_0 et de z. Sinon z_0 est non nul, on peut diviser par z_0 et obtenir

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1. \tag{E.35}$$

Les deux nombres complexes τ vérifiant

$$\tau^2 = 1, \tag{E.36}$$

sont ± 1 de sorte que (E.33) est équivalent à

$$z = \pm\sqrt{\zeta}, \tag{E.37}$$

ce qui est vrai, que ζ soit nul ou non et ce qui est identique au cas réel.

(ii) Pour calculer, de deux façons différentes, $\sqrt{1+i}$, on procède ainsi :
On donne deux méthodes différentes.

(A) On utilise le calcul habituel de calcul de racine carré d'un nombre complexe. Rappelons à ce propos les formules habituelles, par exemple issues de l'annexe A : soit un nombre complexe z (non nul). Il existe une unique paire $\{z_1, z_2\}$ de complexes telle que

$$z_1 = -z_2 \text{ et } z_1^2 = z_2^2 = z. \tag{E.38}$$

On pose $z = a + ib$ et on cherche les nombres z_1 et z_2 sous la forme

$$Z = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$z = a + ib = Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha\beta = b/2. \end{cases} \tag{E.39}$$

Puisque $|Z|^2 = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ est connu, on déduit donc de (E.39) ue

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases} \tag{E.40}$$

Par somme et différence, on en déduit α^2 et β^2 :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right). \end{cases} \tag{E.41}$$

On vérifie que les deux quantités $a+\sqrt{a^2+b^2}$ et $-a+\sqrt{a^2+b^2}$ sont nécessairement positives. On en déduit donc alors α (aux signe près, deux solutions) et β (aux signe près, deux solutions), ce qui fait quatre solutions pour Z. On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par la seconde équation de (E.39) on obtient donc bien deux solutions opposées pour Z. Si on prend $a = 1$ et $b = 1$, on obtient donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right). \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)},\\ \beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}.\end{cases}$$

Puisque $\alpha\beta > 0$, on a donc les deux racine sous la forme

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right).$$

On ne garde que le complexe à partie réelle strictement positive (c'est-à-dire celui qui est dans $\widetilde{Q}$) :

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}. \tag{E.42}$$

Le carré du module de ce nombre complexe vaut

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2},$$

et on admet que l'argument de ce nombre vaut $\pi/8$, de sorte que (E.42) est équivalent à

$$z = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}}. \tag{E.43}$$

(B) La seconde façon de calculer $\sqrt{1+i}$ est d'anticiper sur la question (4) On a donc, d'après la définition du cours,

$$\sqrt{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+i)} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{i\pi}{4}\right)} = e^{\frac{1}{4}\ln(2)+\frac{i\pi}{8}} = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}},$$

ce qui est bien identique à (E.43)

(b) On reprend les calculs de la question 3(a)i pour un entier n quelconque.
D'après (E.21) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z_0 \in \widetilde{Q}$ tel que $\zeta = z_0^n$, noté $\sqrt[n]{\zeta}$. Ainsi

$$z^n = \zeta \tag{E.44}$$

est équivalent à

$$z^n = z_0^n. \tag{E.45}$$

Si ζ est nul, il en est de même de z_0 et de z. Sinon z_0 est non nul, on peut diviser par z_0 et obtenir

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1. \tag{E.46}$$

Les n complexes τ vérifiant

$$\tau^n = 1, \tag{E.47}$$

sont les n racines n-ième de l'unité définie par $\tau = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $0 \leq k \leq n-1$, de sorte que (E.44) est équivalent à

$$z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \sqrt[n]{\zeta}, \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1. \tag{E.48}$$

ce qui est vrai, que ζ soit nul ou non.

(4) Reprenons les calculs de la question 2a On y a montré que l'unique $\zeta \in Q$ vérifiant (E.12) est donné par (E.13) avec r et θ définis par (E.14). On a donc

$$\zeta = re^{i\theta} = \sqrt[n]{R} e^{\frac{i\phi}{n}},$$

soit encore en utilisant les propriétés du logarithme réel et de l'exponentielle complexe :

$$\zeta = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\phi}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(R)} e^{\frac{i\phi}{n}},$$

et donc

$$\zeta = e^{\frac{1}{n}(\ln(R)+i\phi)}. \tag{E.49}$$

D'après la définition (E.11) de z, R et ϕ et la définition du logarithme complexe 2.31 page 22 du cours, on a

$$\ln(R) + i\phi = \operatorname{Ln}(z),$$

Ainsi, d'après (E.49), n a

$$\forall z \in U, \quad z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(z)}, \tag{E.50}$$

ce qui est exactement la définition de $z^{1/n}$ correspondant à la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, donnée par (2.65). *Attention*, dans cette définition, z ne peut appartenir à $\mathbb{R}_-$. Si c'est le cas, d'après ce qui précède, f_n envoie $\mathcal{Q}$ sur $\mathbb{R}_-$ et donc f_n^{-1} envoie $\mathbb{R}_-$ sur $\mathcal{Q}$. Ainsi, si z est un réel négatif, on a en reprenant les calculs précédents

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|)+i\pi)}. \tag{E.51}$$

Si on adopte les conventions des remarques remarque 2.34 page 22 et 2.43 page 25, on a $\arg(z) = \pi$ et $\operatorname{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\pi$ et donc d'après (E.51),

$$\forall z \in \mathbb{R}_-, \quad z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|)+i\arg(z))} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(z)}. \tag{E.52}$$

D'après l'équation (2.69) du cours, cette équation a aussi un sens pour $z = 0$ et est cohérente avec (E.19).

D'après (E.50) et (E.52), on a donc montré que $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, avec la définition de la question 2c, coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, à condition d'étendre le logarithme complexe à $\mathbb{R}_-^*$.

(5) Levons alors le paradoxe de la question 1. On peut écrire rigoureusement en utilisant tout ce qui précède :

$$\sqrt{-1} = i. \tag{E.53}$$

Car i est dans $\widetilde{Q}$ (avec $n = 2$) et $i^2 = -1$. On a donc rigoureusement

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)},$$

et donc

$$1 = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}((-1)\times(-1))} \tag{E.54}$$

On aussi

$$-1 = i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$

soit encore

$$-1 = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)} e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)},$$

et donc

$$-1 = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}(-1)+\operatorname{Ln}(-1))}. \tag{E.55}$$

Dire que "$-1 = 1$", d'après (E.54) et (E.55), revient à donc écrire que

$$\operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln}((-1) \times (-1)), \tag{E.56}$$

ce qui est tout à fait aussi faux que d'utiliser (E.7) avec a et b non réels positifs. D'après l'équation (2.61) page 23 du cours, on a

$$\operatorname{Ln}((-1) \times (-1)) = \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(-1) + 2ik\pi, \tag{E.57}$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$. dans la mesure où le logarithme complexe est étendu à $\mathbb{C}$ tout entier. Ainsi, dire que (E.56) est faux revient à montrer que $k \neq 0$.

Montrons-le : Si on reprend la preuve de l'équation (2.61) du cours avec $z_1 = -1$ et $z_2 = -1$, on a : Pour $l \in \{1, 2\}$, on écrit $z_l = \rho_l e^{i\theta_l}$ où $\theta_l \in]-\pi, \pi]$ (et non dans $]-\pi, \pi[$) On a donc

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln}\left(\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right),$$

et puisque $\theta_1 + \theta_2$ n'est pas nécessairement dans $]-\pi, \pi]$, d'après les points 5 et 6 page 23 du cours

$$\begin{aligned}
&= \ln(\rho_1\rho_2) + i(\theta_1+\theta_2) + 2ik\pi,\\
&= \ln(\rho_1) + i\theta_1 + ln(\rho_2) + i\theta_2 + 2ik\pi,\\
&= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2ik\pi.
\end{aligned}$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned}
&-\pi < \theta_1 \leq \pi,\\
&-\pi < \theta_2 \leq \pi,
\end{aligned}$$

et donc

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi.$$

On a vu dans la preuve du cours que si

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 < -\pi,$$

alors $k = 1$. De même, si

$$\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi,$$

on a $k = -1$. Enfin, si

$$-\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi,$$

on a $k = 0$. Ici, on a $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ et donc

$$k = -1, \tag{E.58}$$

et le paradoxe est levé ! ! Plus précisément, on a, de plus, d'après (E.57),

$$\operatorname{Ln}((-1)\times(-1)) = \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(-1) - 2i\pi. \tag{E.59}$$

Si on reprend le faux calcul paradoxal, d'après (E.54) et (E.59), on a donc

$$\begin{aligned}
1 &= e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}((-1)\times(-1))},\\
&= e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}(-1)+\operatorname{Ln}(-1)-2i\pi)},\\
&= e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}(-1)+\operatorname{Ln}(-1))}e^{\frac{1}{2}(-2i\pi)},\\
&= e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)}e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)}e^{-i\pi},\\
&= \sqrt{-1}\sqrt{-1}e^{-i\pi},\\
&= i^2 \times (-1),\\
&= 1.
\end{aligned}$$

la présence du -1 salvateur provient donc de la valeur non nulle de k ! !

Remarque E.3. Montrons aussi :

$$\forall A \in \mathbb{R}_-, \quad \forall B \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{AB} = i\sqrt{-A}\sqrt{B}, \tag{E.60}$$

où à gauche de l'inégalité $\sqrt{}$ est la racine complexe que l'on vient de définir et à droite, c'est la racine réelle usuelle (qui correspondent !). On a en particulier, pour $B = 1$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_-, \quad \sqrt{A} = i\sqrt{-A}. \tag{E.61}$$

Par définition, on a donc successivement grâce aux résultat (E.52),

$$\begin{aligned}
\sqrt{AB} &= e^{\left(\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(AB)\right)}, \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}\left(\ln|AB| + i\arg(AB)\right)\right)},
\end{aligned}$$

et puisque AB est un réel négatif, $\arg(AB) = \pi$

$$\begin{aligned}
&= e^{\left(\frac{1}{2}\left(\ln|AB| + i\pi\right)\right)}, \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}\left(\ln|A| + \ln|B| + i\pi\right)\right)}, \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}\ln|A| + \frac{1}{2}\ln|B| + \frac{i\pi}{2}\right)}, \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}\ln|A|\right)} e^{\left(\frac{1}{2}\ln|B|\right)} e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}, \\
&= i\sqrt{|A|}\sqrt{|B|}, \\
&= i\sqrt{-A}\sqrt{B}
\end{aligned}$$

Remarque E.4. Il est important de se rappeler que le logarithme complexe étendu sur $\mathbb{C}$ n'est pas continu. Cette absence de continuité peut induire des erreurs comme le montre le raisonnement faux suivant : Soit $\varepsilon > 0$.

On a

$$(-1+\varepsilon i)\,(-1-\varepsilon i) = 1+\varepsilon^2. \tag{E.62}$$

On écrit, fort du raisonnement précédent,

$$\operatorname{Ln}((-1+\varepsilon i)\,(1-\varepsilon i)) = \operatorname{Ln}(-1+\varepsilon i) + \operatorname{Ln}(1-\varepsilon i). \tag{E.63}$$

En effet, avec les notations utilisées dans la correction de la question 5, on a

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \arg(-1+\varepsilon i) \in]0,\pi[, \\
\theta_2 &= \arg(-1-\varepsilon i) \in]-\pi,0[,
\end{aligned}$$

et donc

$$\theta_1 + \theta_2 \in]-\pi,\pi[,$$

et donc $k = 0$, ce qui justifie (E.62). D'après (E.62), on a donc

$$\operatorname{Ln}(1+\varepsilon^2) = \operatorname{Ln}(-1+\varepsilon i) + \operatorname{Ln}(-1-\varepsilon i). \tag{E.64}$$

Ainsi, on a successivement

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\varepsilon^2} &= e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(\sqrt{1+\varepsilon^2})}, \\
&= e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}(-1+\varepsilon i))} e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}(-1-\varepsilon i))}, \\
&= \sqrt{-1+\varepsilon i}\sqrt{-1-\varepsilon i}
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} = \sqrt{-1+\varepsilon i}\sqrt{-1-\varepsilon i}. \tag{E.65}$$

On passe à la limite $\varepsilon \to 0$, et on a

$$1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1, \tag{E.66}$$

et de nouveau un problème !

Ce paradoxe vient du fait que le logarithme complexe n'est pas continu au voisinage de $\mathbb{R}_-$! Si $\varepsilon > 0$, le complexe $-1+\varepsilon i$ est au-dessus de cet axe et son argument est dans $]0,\pi[$ et tend vers π quand ε tend vers 0. Avec les conventions des remarques 2.34 et 2.43 cours, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Ln}\,(-1+\varepsilon i) = i\pi. \tag{E.67}$$

En revanche, le complexe $-1-\varepsilon i$ est au-dessous de cet axe et son argument est dans $]-\pi,0[$ et tend vers $-\pi$ quand ε tend vers 0. Avec les conventions des précédentes, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Ln}\,(-1-\varepsilon i) = -i\pi. \tag{E.68}$$

On pourra consulter la correction de l'exercice de TD 2.1. On passe à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (E.65) et on a donc

$$1 = e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2}} = i \times (-i) = 1,$$

et il n'y a plus de paradoxe !

Annexe F

Définitions des fonctions complexes arcsin et arccos (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe la définition et l'étude des des fonctions complexes arcsin et arccos, sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (Automne 2019) :

Énoncé

On donne les résultats suivants, admis pour cet exercice :

Proposition F.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2. Si l'on pose*

$$\widetilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \right\}, \tag{F.1}$$

alors $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de $\widetilde{Q}$ sur $\mathbb{C}$. On note alors $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et on a

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \tag{F.2}$$

Enfin, $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$ (voir équation (2.65)), à condition d'étendre le logarithme complexe à $\mathbb{R}_-^*$ (voir remarque 2.34 page 22 et 2.43 page 25.)

◊

L'énoncé de l'exercice est le suivant :

(1) Rappeler la définition du sinus complexe.

(2) (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, montrer que l'équation (en ξ)

$$\sin \xi = z. \tag{F.3}$$

est équivalente à l'équation du second degré suivante (en Z) :

$$Z^2 - 2izZ - 1 = 0, \tag{F.4}$$

où

$$Z = e^{i\xi}. \tag{F.5}$$

(b) Montrer que les deux racines de l'équation (F.4) ont données par

$$Z = iz \pm \sqrt{1 - z^2}, \tag{F.6}$$

où la racine complexe est définie par la proposition F.1 pour $n = 2$.

(c) En déduire que l'on peut poser

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \tag{F.7}$$

et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\arcsin(z)) = z. \tag{F.8}$$

(3) Calculer

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right) + \left(e - \frac{1}{e}\right)i\right)\right).$$

(4) Montrer que, si pour tout z tel que $1-z^2$ et que $iz+\sqrt{1-z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors arcsin est dérivable (au sens de $\mathbb{C}$) en z et que

$$(\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{F.9}$$

Les questions suivantes sont facultatives

(5) (a) Simplifier l'expression de $\arcsin(z)$ si z est un réel.

(b) Que retrouve-t-on dans le cas de $\arcsin(z)$ si z est un réel dans l'intervalle $[-1,1]$?

(6) (a) Comment définiriez-vous $\arccos(z)$ pour z complexe ?

(b) En admettant que,

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[), \quad (\arccos(z))' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \tag{F.10}$$

montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z)+\arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \tag{F.11}$$

Corrigé

Remarque F.2. Les résultats de la proposition F.1 de l'énoncé sont montrés dans l'annexe E.

Donnons maintenant le corrigé à proprement parler de l'exercice.
On pourra consulter les url suivantes :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_cosinus`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_sinus`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonométrie_complexe`

(1) La fonction sinus complexe étend la fonction réelle à $\mathbb{C}$ tout entier et est donnée par la proposition 2.27 page 19 du cours et est rappelée ici :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{F.12}$$

(2) (a) Pour $z\in\mathbb{C}$ donné, on cherche donc un complexe ξ vérifiant

$$\sin\xi = z. \tag{F.13}$$

Compte tenu de la définition du sinus, cela est équivalent à

$$\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} = z,$$

soit encore à

$$e^{i\xi}-e^{-i\xi} = 2iz,$$

et puisque $e^{i\xi}$ est non nul, c'est équivalent à

$$\left(e^{i\xi}\right)^2 - e^{-i\xi}e^{i\xi} = 2ize^{i\xi},$$

soit encore à

$$\left(e^{i\xi}\right)^2 - 2ize^{i\xi} - 1 = 0.$$

En posant

$$Z = e^{i\xi}. \tag{F.14}$$

on obtient donc l'équation du second degré suivante (en Z) :

$$Z^2 - 2izZ - 1 = 0, \tag{F.15}$$

(b) Pour résoudre (F.15) on calcule le discriminant réduit donné par

$$\delta' = (iz)^2 + 1 = 1 - z^2.$$

On sait que ce nombre complexe admet deux racines carrées. On a vu précedemment (voir proposition rappelée en début d'énoncé avec $n = 2$) que la fonction $\sqrt{.}$ est définie sur $\mathbb{C}$ et est la fonction réciproque de $z \mapsto z^2$. On peut considérer l'une des des racines de $1 - z^2$ définie par $\sqrt{1 - z^2}$. Les deux racines Z de (F.15) sont données par

$$Z = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \tag{F.16}$$

(c) Ces deux racines sont non nulles, car leur produit vaut :

$$\alpha = \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)\left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right) = (iz)^2 - \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2 = -z^2 - \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2,$$

soit encore, d'après la formule (E.24) de l'annexe du cours, avec $n = 2$:

$$\alpha = -z^2 - 1 + z^2 = -1 \neq 0.$$

On choisit arbitrairement l'une des deux racines, donnée par $iz + \sqrt{1 - z^2}$. D'après (F.14), on sait que ξ vérifie donc

$$e^{i\xi} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

et donc, d'après ce qu'on a vu sur le logarithme complexe, défini sur $\mathbb{C}^*$, on peut donc choisir ξ vérifiant

$$i\xi = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

qui est défini puisque

$$iz + \sqrt{1 - z^2} \neq 0. \tag{F.17}$$

On pose donc conventionnellement

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{F.18}$$

Par construction, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\arcsin(z)) = z. \tag{F.19}$$

Remarque F.3. On aurait pu considérer l'autre racine et poser conventionnellement

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \operatorname{Ln}\left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{F.20}$$

(3) Pour calculer

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right) + \left(e - \frac{1}{e}\right)i\right)\right), \tag{F.21}$$

on utilise (F.18). On a successivement, en posant

$$z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right) + \left(e - \frac{1}{e}\right)i\right), \tag{F.22}$$

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{2}{16}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right)^2 - \left(e - \frac{1}{e}\right)^2 + 2i\left(e + \frac{1}{e}\right)\left(e - \frac{1}{e}\right)\right), \\
&= \frac{1}{8}\left(e^2 + \frac{1}{e^2} + 2 - e^2 - \frac{1}{e^2} + 2 + 2i\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(2 + i\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$1 - z^2 = \frac{1}{4}\left(4 - 2 - i\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right),$$

et donc

$$1 - z^2 = \frac{1}{4}\left(2 - i\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right). \tag{F.23}$$

Pour chercher $\zeta = \sqrt{1 - z^2}$, on utilise la méthode de l'annexe de l'annexe A du cours : On pose $u = 1 - z^2 = a + ib$ où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \end{cases}$$

et on cherche le nombre ζ sous la forme

$$\zeta = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right). \end{cases}$$

On a

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\left(e^4 + \frac{1}{e^4} - 2\right) = \frac{1}{16}\left(e^4 + \frac{1}{e^4} + 2\right) = \left(\frac{1}{4}\left(e^2 + \frac{1}{e^2}\right)\right)^2$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^2 + \frac{1}{e^2}\right)\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^2 + \frac{1}{e^2}\right)\right), \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{8}\left(2 + e^2 + \frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2, \\ \beta^2 = \frac{1}{8}\left(-2 + e^2 + \frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)\right)^2. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e + \frac{1}{e}\right), \\ \beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right), \end{cases}$$

On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par

$$\alpha\beta = b/2 < 0$$

et donc on a les deux racines suivantes :

$$\zeta = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right) - i\left(e - \frac{1}{e}\right)\right)$$

Conformément au choix de l'annexe E, on choisit la racine à partie réelle positive :

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right) - i\left(e - \frac{1}{e}\right)\right)$$

Il nous reste donc à calculer

$$\begin{aligned}
\eta &= -i \operatorname{Ln}\left(i\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)i\right)\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)-i\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)\right),\\
&= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)(i+1)+\left(e-\frac{1}{e}\right)(-i-1)\right)\right),\\
&= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e\,(i+1-i-1)+\frac{1}{e}\,(i+1+i+1)\right)\right),\\
&= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{e}\,(2+2i)\right)\right),\\
&= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+i}{e}\right).
\end{aligned}$$

Or on a

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},$$

et donc

$$\eta=-i \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{e}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$

et par définition du logarithme complexe

$$\eta=-i\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)+i\frac{\pi}{4}\right)=-i\left(-\ln(e)+i\frac{\pi}{4}\right),$$

et donc, finalement :

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)i\right)\right)=\frac{\pi}{4}+i. \tag{F.24}$$

(4) On a vu en cours (proposition 2.44 page 25) que la fonction $z^{1/2}$ est dérivable de dérivée $1/2z^{-1/2}$. Cela est vrai sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Compte tenu des résultats précédents sur la racine, on en déduit que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad (\sqrt{z})'=\frac{1}{2\sqrt{z}}. \tag{F.25}$$

De même, le logarithme complexe est dérivable sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ de dérivée $1/z$:

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad (\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z}. \tag{F.26}$$

Grâce à la propostion 1.7 page 4 du cours, on peut donc dériver successivement en utilisant (F.25) et (F.26), si $1-z^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, on a

$$\left(\sqrt{1-z^2}\right)'=-\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}}=-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

et si $1-z^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, on a donc

$$\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)'=i-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{i}{\sqrt{1-z^2}}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).$$

Ainsi, si $1-z^2$ et $iz+\sqrt{1-z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors

$$\left(\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\right)'=\frac{\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)'}{iz+\sqrt{1-z^2}}=\frac{i}{\sqrt{1-z^2}}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\times\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}=\frac{i}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Ainsi, grâce à (F.18), on a si $1-z^2$ et $iz+\sqrt{1-z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors

$$(\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{F.27}$$

On peut montrer que $1-z^2$ n'est pas un réel négatifs ssi z appartient à $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. L'étude des z tels que $iz+\sqrt{1-z^2}$ n'est pas un réel négatif est plus difficile et, en fait, inutile. On admet en utilisant (F.27), que arcsin est dérivable sur $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$ et que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[), \quad (\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{F.28}$$

(5) (a) Supposons z réel. On a alors

$$|z|>1 \Longleftrightarrow 1-z^2<0. \tag{F.29}$$

— Dans le cas

$$|z|>1, \tag{F.30}$$

le réel $1-z^2$ est négatif et d'après le résultat (E.61), on a

$$\sqrt{1-z^2} = i\sqrt{z^2-1}. \tag{F.31}$$

et par définition

$$\arcsin(z) = -i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{z^2-1}\,i\right),$$

et donc

$$\arcsin(z) = -i\operatorname{Ln}\left(\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)i\right). \tag{F.32}$$

On a

$$\forall z>1, \quad z+\sqrt{z^2-1}>0, \tag{F.33a}$$

$$\forall z<-1, \quad z+\sqrt{z^2-1}<0. \tag{F.33b}$$

En effet, si $z>1$, c'est immédiat. Sinon, c'est équivalent à

$$\sqrt{z^2-1}<-z,$$

et donc à

$$z^2-1<z^2,$$

ce qui est vrai. Compte tenu de (F.33), on a donc

$$\begin{aligned}
&\forall z>1, \quad \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)i = \left|z+\sqrt{z^2-1}\right| e^{\frac{i\pi}{2}},\\
&\forall z<-1, \quad \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)i = \left|z+\sqrt{z^2-1}\right| e^{\frac{-i\pi}{2}},
\end{aligned}$$

Dans le premier cas, d'après (F.32), on a donc, d'après la définition du logarithme

$$\arcsin(z) = -i\left(\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right| + \frac{i\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|.$$

Dans le second cas, on a

$$\arcsin(z) = -i\left(\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right| - \frac{i\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|.$$

Bref, on a donc, pour tout z réel dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

$$\forall z>1, \quad \arcsin(z) = \frac{\pi}{2} - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|, \tag{F.34a}$$

$$\forall z<-1, \quad \arcsin(z) = -\frac{\pi}{2} - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right| \tag{F.34b}$$

ce qui peut se condenser en

$$\forall z \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, \quad \arcsin(z) = \text{signe}(z)\frac{\pi}{2} - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|. \tag{F.35}$$

— Dans le cas

$$|z| < 1, \tag{F.36}$$

la nombre $\sqrt{1-z^2}$ est un réel positif sa racine est sa racine réelle habituelle et en posant

$$\eta = iz + \sqrt{1-z^2},$$

on a alors

$$|\eta| = \sqrt{z^2+1-z^2} = 1.$$

De plus, l'argument de η est dans $]-\pi/2,\pi/2[$. On a donc

$$\eta = e^{i\theta}$$

où

$$\theta = \arcsin\left(\frac{z}{|\eta|}\right) = \arcsin(z),$$

où ici arcsin est la fonction réelle (de $[-1,1]$ dans $[\pi/2,\pi/2]$). D'après (F.18), on a donc

$$\arcsin(z) = -i\,(i\theta) = \arcsin(z)$$

On a donc

la fonction arcsin définie sur $\mathbb{C}$ coïncide avec l'arcsin réel habituel sur $]-1,1[$. (F.37)

— Enfin, dans le cas

$$|z| = 1, \tag{F.38}$$

on a $z = \pm 1$ et d'après (F.18),

$$\arcsin(z) = -i\,\mathrm{Ln}\,(\pm i) = -i\left(\pm\frac{i\pi}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{2} = \arcsin(z),$$

où ici arcsin est la fonction réelle (de $[-1,1]$ dans $[\pi/2,\pi/2]$). On peut donc prolonger (F.37), par

la fonction arcsin définie sur $\mathbb{C}$ coïncide avec l'arcsin réel habituel sur $[-1,1]$. (F.39)

Dans ce cas, on remarque que (F.35), peut se prolonger en

$$\forall z \in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[, \quad \arcsin(z) = \text{signe}(z)\frac{\pi}{2} - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|. \tag{F.40}$$

(b) On retrouve l'arcsin réel (voir (F.39)).

(6) (a) On raisonne comme dans les questions 1 et 2a. La fonction cosinus complexe étend la fonction réelle à $\mathbb{C}$ tout entier et est donnée par la proposition 2.27 page 19 du cours et est rappelée ici :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, on cherche donc un complexe ξ vérifiant

$$\cos\xi = z.$$

On procèderait comme précédemment.

(b) On admet que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)\,, \quad (\arccos(z))' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{F.41}$$

Si on compare à (F.28), on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)\,, \quad (\arcsin(z))' + (\arccos(z))' = 0,$$

et il existe donc C telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)\,, \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = C.$$

Pour $z=0$, on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)\,, \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \tag{F.42}$$

Les fonctions arcos et arcsin sont continues au voisinage de $(]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$ par dessus et il vient donc en faisant tendre z vers un point de $(]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \tag{F.43}$$

Remarque F.4. L'équation (F.43) est aussi valable naturellement pour les fonctions réelles (sur $[-1,1]$) et la preuve se fait de la même façon, dans $\mathbb{R}$!

Remarque F.5. L'équation (F.43) nous fournit l'expression suivante

$$\arccos(z) = \frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right). \tag{F.44}$$

Annexe G

Racines multiples d'un polynôme et calcul d'un résidu pour un pôle d'ordre $m \geq 1$ (Preuve du lemme 3.48)

Nous proposons dans cette annexe, deux calculs très proches l'un de l'autre : les racines multiples d'une fonction holomorphe et le calcul d'un résidu pour un pôle d'ordre $m \geq 1$ (Preuve du lemme 3.48).

G.1. Rappels sur les racines multiples d'un polynôme et racines multiples d'une fonction holomorphe

Rappelons tout d'abord les résultat suivants :

Définition G.1 (Ordre de multiplicité, racine simple, racine multiple). Soit P un polynôme, à coefficients réels ou complexes et a un nombre réel ou complexe. Alors,

(1) le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que P soit divisible par $(X-a)^m$ est appelé l'ordre, ou la multiplicité, de la racine a relativement à P ;

(2) cet entier m est caractérisé par l'existence d'un polynôme Q tel que $P=(X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$;

(3) cet entier m est caractérisé par

$$P(a)=P'(a)=...=P^{(m-1)}(a)=0, \tag{G.1a}$$

$$P^{(m)}(a) \neq 0. \tag{G.1b}$$

(4) on dit que a est racine simple de P si $m=1$ et racine multiple si $m>1$.

Lemme G.2. *Le nombre a est racine simple de P ssi $P(a)=0$ et $P'(a) \neq 0$.*

Voir la preuve dans [RDO93, section 6.4.3 2) Théorème II et définition et théorème III] ou [DB22, Annexe intitulée "Racines multiples", section "Racines multiples d'un polynôme"].

Donnons maintenant le résulats suivants qui généralise les notions de racines de polynômes ainsi que le résultats [DB22, Annexe intitulée "Racines multiples", section "Racines multiples d'une fonction quelconque"]

Proposition G.3. *Soient a un complexe, U un ouvert contenant a, ϕ une fonction holomorphe sur U et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe une fonction holomorphe F sur U telle que

$$\forall z \in U, \quad \phi(z)=(z-\alpha)^m F(z), \tag{G.2a}$$

$$F(\alpha) \neq 0. \tag{G.2b}$$

(2) On a

$$\phi(\alpha)=\phi'(\alpha)=...=\phi^{(m-1)}(\alpha)=0, \tag{G.3a}$$

$$\phi^{(m)}(\alpha) \neq 0. \tag{G.3b}$$

Dans ce cas, on dit que α est racine simple de ϕ si $m=1$ et racine multiple si $m>1$.

Démonstration.

(1) Montrons que $1 \Longrightarrow 2$.

On raisonne exactement comme dans le cas réel de [DB22, Annexe "Racines multiples"].

Soit $p \leq m-1$. Pour dériver p fois (G.2a), il suffit d'appliquer la formule de Leibniz pour des fonctions complexes holomorphes :

$$(uv)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^{(k)} v^{(p-k)}. \tag{G.4}$$

Cette formule, tout à fait identique à la formule du binôme de Newton, est démontrée (dans le cas réel, ce qui ne change rien à la preuve) dans le corrigé de l'exercice de TD 6.10. On applique cette formule à (G.2a) avec $u=(z-\alpha)^m$ et $v=F$. Chacune des dérivées k-ième pour $k \leq p \leq m-1$ de u est donc nulle en α et on a donc

$$\phi^{(p)}(\alpha) = 0. \tag{G.5}$$

Si on prend $p=m$, alors toutes les dérivées en α sont nulles sauf la m-ième dérivée (qui corespond à $k=m$ dans (G.4)) qui vaut $m!$. On a donc

$$\phi^{(m)}(\alpha) = m! F(\alpha),$$

qui est non nul puisque $F(\alpha) \neq 0$.

(2) Montrons que $2 \Longrightarrow 1$.

On procède comme pour la démonstration du lemme 3.47 et au début de la démonstration du théorème 3.34 pour m quelconque. On pose

$$\forall k \geq m, \quad a_k = \frac{\phi^{(k)}(\alpha)}{k!}. \tag{G.6}$$

Grâce à l'holomorphie de ϕ au voisinage de α, il vient donc

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k + \sum_{k=m}^{+\infty} a_k (z-\alpha)^k. \tag{G.7}$$

On a donc d'après (G.3a)

$$\phi(z) = (z-\alpha)^m \left(\frac{\phi^{(m)}(\alpha)}{m!} + \sum_{k=m}^{+\infty} a_{k+1}(z-\alpha)^k \right)$$

et donc

$$\phi(z) = (z-\alpha)^m F(z), \tag{G.8}$$

où $F(z) = \frac{\phi^{(m)}(\alpha)}{m!} + \sum_{k=m}^{+\infty} a_{k+1}(z-\alpha)^k$ avec donc, d'après (G.3b),

$$F(\alpha) = \frac{\phi^{(m)}(\alpha)}{m!} \neq 0. \tag{G.9}$$

F est développable en série entière donc dérivable en α. On a aussi $F = \phi(z)/(z-\alpha)^m$, holomorphe sur $U \setminus \{a\}$, comme ϕ. Ainsi F est holomorphe sur U.

□

G.2. Preuve du lemme 3.48 (calcul d'un résidu pour un pôle d'ordre $m \geq 1$)

Nous proposons dans cette section la preuve complète du calcul d'un résidu pour un pôle d'ordre $m \geq 1$.

On utilise le résultat du lemme G.3 appliqué à la fonction ϕ, qui vérifie (3.51). Il existe donc une fonction holomorphe F sur U vérifiant (G.2). Ainsi, par hypothèse

$$(z-\alpha)^m f(z) = (z-\alpha)^m \frac{g(z)}{\phi(z)} = \frac{g(z)}{F(z)}, \tag{G.10}$$

La fonction g/F est holomorphe au voisinage de a (puisque $(g/F)(\alpha) \neq 0$). Ainsi $(z-\alpha)^m f$ l'est aussi. On déduit aussi de (G.10)

$$(z-\alpha)^{m-1} f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)F(z)},$$

avec $g(\alpha)/F(\alpha) \neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{z\to\alpha} \left|(z-\alpha)^{m-1} f(z)\right| = +\infty$$

et donc $(z-\alpha)^{m-1} f$ ne peut être prolongée par continuité en α. Ainsi, d'après le théorème 3.34 (cas 2), α est bien un pôle d'ordre m de f. D'après le cas 2 du théorème 3.34, on a

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$$

(avec $a_{-1} = \text{Rés}(f, \alpha)$) et donc

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \mathcal{G}(z),$$

où $\mathcal{G}$ est holomorphe au voisinage de α. Si, on multiple par $(z-\alpha)^m$, on obtient

$$(z-\alpha)^m f(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{m-k} + (z-\alpha)^m \mathcal{G}(z),$$

soit encore, en posant $k' = m-k$ dans la première somme

$$(z-\alpha)^m f(z) = \mathcal{H}_1(z) + \mathcal{H}_2(z), \tag{G.11a}$$

où

$$\mathcal{H}_1(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k-m}(z-a)^k, \tag{G.11b}$$

$$\mathcal{H}_2(z) = (z-\alpha)^m \mathcal{G}(z). \tag{G.11c}$$

Dans la preuve du lemme 3.47, il suffisait de faire tendre z vers α. Ici, c'est un tout petit plus compliqué. Le terme recherché a_{-1} correspond au dernier terme la somme intervenant dans $\mathcal{H}_1$. Pour le faire apparaître, il faut donc dériver $m-1$ fois. En effet, si on dérivee $m-1$ fois (G.11b), seul subsiste le dernier terme car les autres termes ($(z-a)^k$, pour $k < m-1$) ont des puissances strictement inférieures à $m-1$. La dérivée $m-1$ de ce terme vaut $(m-1)(m-2)...2 \times 1 \times a_{-1}$ et donc

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\mathcal{H}_1(z)\right) = (m-1)!a_{-1}. \tag{G.12}$$

Enfin, pour dériver $m-1$ fois (G.11c), il suffit d'utiliser le lemme G.3 qui donne

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\mathcal{H}_2(\alpha)\right) = 0. \tag{G.13}$$

De (G.11), (G.12) et (G.13), on déduit

$$\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-\alpha)^m f(z)\right)\right]_{z=\alpha} = (m-1)!a_{-1},$$

dont on déduit (3.52a), puis (3.52b), grâce à (G.10).

Annexe H

Calcul d'une intégrale impropre (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul d'intégrale suivante sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (à l'automne 2020) :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx \tag{H.1}$$

Une généralisation de ce calcul sera proposé en annexe I page 210.

Énoncé

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=\frac{z}{1+z^4}. \tag{H.2}$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les dans le plan complexe.

(2) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.5 page 49 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx \quad ? \tag{H.3}$$

(3)

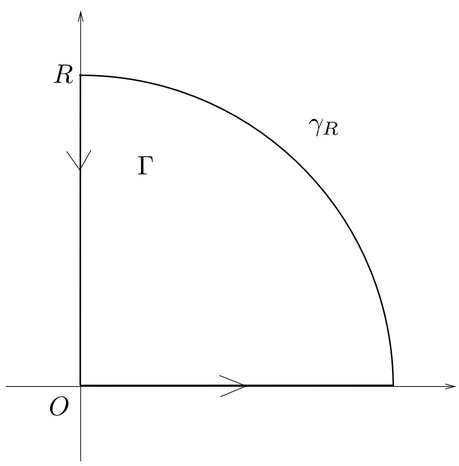


Figure H.1. Le chemin Γ considéré.

Pour $R>0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure H.1.

(a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R>0$ fixé ?

(b) Conclure sur la valeur de l'intégrale donnée par (H.3), en faisant tendre R vers l'infini. On *admettra* que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{H.4}$$

(4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (H.3) à la main ?

Corrigé

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \tag{H.5}$$

Les pôles de f sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les z complexes tels que

$$1 + z^4 = 0. \tag{H.6}$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (H.6), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

puisque

$$z_0^4 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions z de (H.6) sous la forme

$$Z = zz_0,$$

ce qui donne

$$Z^4 = (zz_0)^4 = z^4 z_0^4 = -1,$$

et donc, puisque $z_0^4 = -1$, on a

$$z^4 = 1,$$

ce qui nous montre que z est une racine quatrième de l'unité, donc dans l'ensemble $\{1, i, -1, -i\}$, ce qui nous donne :

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } \{z_0, z_1 = iz_0, z_2 = -z_0, z_3 = -iz_0\} \text{ où } z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \tag{H.7}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } z_k = e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{ik\pi}{2}}, \text{ pour } k \in \{0,1,2,3\}. \tag{H.8}$$

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

sur le cercle trigonométrique, de module $\pi/4$, par l'identité et les trois rotations, d'angles $\pi/2$, π et $3\pi/2$ de centre 0.

Voir la figure H.2.

(2) Si on applique la proposition 5.5 page 49 du cours à la fonction f donnée par (H.5), on aura

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^4}dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés au dessus de l'axe des x. Or, la fonction $\frac{x}{1+x^4}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

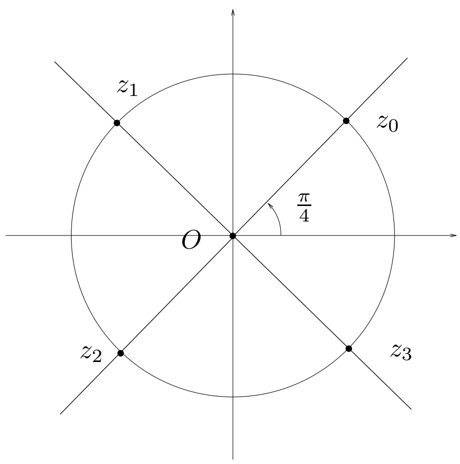


FIGURE H.2. Les pôles z_0, z_1, z_2 et z_3 de f.

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx. \tag{H.9}$$

(3) La technique utilisée ci-dessous est proche de celle de l'annexe J page 217 du cours.

(a)

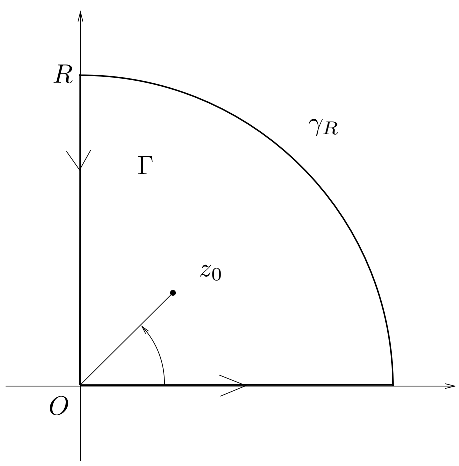


FIGURE H.3. Le chemin Γ considéré et l'unique pôle z_0 de f à l'intérieur de Γ.

Pour $R > 0$ assez grand, le seul pôle de f à l'intérieur de Γ est z_0, comme le montre la figure H.3. Le théorème 3.44 page 38 du cours appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ donne :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, z_k), \tag{H.10}$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ. Ici, le seul pôle est z_0 d'ordre un, car le polynôme z^4+1 est égal à $(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. On a donc, d'après le lemme 3.47 page 41 du cours :

$$
\begin{aligned}
2i\pi \sum_k \text{Rés}(f,\alpha_k) &= 2i\pi\,\text{Rés}(f,z_0),\\
&= 2i\pi \frac{z_0}{[1+z^4]'_{z=z_0}},\\
&= 2i\pi \frac{z_0}{[4z^3]'_{z=z_0}},\\
&= 2i\pi \frac{z_0}{4z_0^3},\\
&= \frac{i\pi}{2}\frac{1}{z_0^2},\\
&= \frac{i\pi}{2} z_0^{-2},\\
&= \frac{i\pi}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{-2},\\
&= \frac{i\pi}{2} e^{\frac{-2i\pi}{4}},\\
&= \frac{i\pi}{2} e^{\frac{-i\pi}{2}},\\
&= \frac{i\pi}{2}\frac{1}{i},
\end{aligned}
$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{\pi}{2}. \tag{H.11}$$

Décomposons maintenant l'intégrale de gauche de (H.11) en deux trois terme, chacun correspondant à à l'arc de cercles de centre l'origine O et de rayon et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure H.3 page précédente. Le premier segment, inclus dans l'axe des x, est paramétré par

$$z = \gamma(t),\ \text{où } \gamma(t) = t \text{ avec } t \in [0, R], \tag{H.12}$$

le second, inclus dans l'axe des y est paramétré par

$$z = \gamma(t),\ \text{où } \gamma(t) = it \text{ avec } t \in [R, 0]. \tag{H.13}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_0^R f(t)dt + \int_R^0 f(it)idt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,\\
&= \int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt - i\int_0^R \frac{it}{(it)^4+1}dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,\\
&= \int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt + \int_0^R \frac{t}{i^4t^4+1}dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,
\end{aligned}
$$

et donc, d'après (H.11),

$$\int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{4}. \tag{H.14}$$

(b) Démontrons la formule suivante, donnée dans l'énoncé :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{H.15}$$

Elle provient du lemme de Jordan 5.6 page 57 de la version longue du cours, appliqué à $z_0 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $z_0 = 0$ et $R_0 = +\infty$. L'égalité (5.13) page 57 de la version longue du cours a lieu, puisque, quand $|z|$ tend vers l'infini :

$$|zf(z)| = \left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \sim \left|\frac{z^2}{z^4}\right| = \frac{1}{|z|^2},$$

tend vers zéro. On en déduit (H.15). De (H.14), on déduit donc en faisant tendre R vers l'infini :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{4}. \tag{H.16}$$

(4) De façon générale, pour intégrer ce type de fonctions, il faut décomposer en éléments simples et appliquer les techniques présentées par exemple dans [Bas22, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"]. Mais, ici, il est très rapide de procéder ainsi : Faisons le changement de variable $u = x^2$ qui donne $du = 2xdx$ et donc

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan(x^2),$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2}\left(\arctan(+\infty) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

ce qui permet de retrouver (H.16).

Annexe I

Calcul d'une intégrale impropre (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul de l'intégrale suivante sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (à l'automne 2020) :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx, \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont définis plus bas.} \tag{I.1}$$

Ce calcul est une généralisation du calcul de l'annexe H page 205.

Énoncé

(1) Soient p et q deux entiers vérifiant

$$p \geq q+2, \tag{I.2a}$$
$$q \geq 0. \tag{I.2b}$$

On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^q}{1+z^p}. \tag{I.3}$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les si possible dans le plan complexe.

(2) Pourquoi, de façon générale, ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.5 page 49 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx \quad ? \tag{I.4}$$

(3)

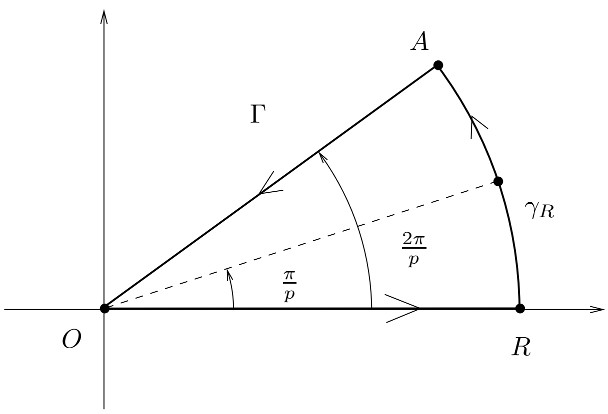


FIGURE I.1. Le chemin Γ considéré.

Pour $R > 0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments, le premier est $[O, R]$, inclus sur l'axe des x, le second est $[AO]$, où A est le point de module R est d'argument $\frac{2\pi}{p}$, comme montre la figure I.1 page précédente.

(a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ fixé ?

(b) Conclure sur la valeur de l'intégrale J donnée par (I.4), en faisant tendre R vers l'infini. On *admettra* que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{I.5}$$

(c) Quelle est la valeur de J pour $q = 0$ et $p = 3$?

(d) Quelle est la valeur de J pour $q = 1$ et $p = 4$?

(4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (I.4) à la main ?

(5) *Question facultative*

(a) Les calculs de cet exercice sont-ils encore valables si on remplace p et q deux entiers vérifiant (I.2), par p entier et q réel vérifiant

$$p > q + 1, \tag{I.6a}$$
$$q \geq 0. \tag{I.6b}$$

(b) Quelle est la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^p} dx \quad ?$$

(6) *Question facultative*

(a) Les calculs de cet exercice sont-ils encore valables si on remplace p et q deux entiers vérifiant (I.2), par p entier et q réel vérifiant

$$p > q + 1, \tag{I.7a}$$
$$q > -1 \quad ? \tag{I.7b}$$

(b) Quelle est la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^p)} dx \quad ?$$

Corrigé

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^q}{1 + z^p}. \tag{I.8}$$

Les pôles de f sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les z complexes tels que

$$1 + z^p = 0. \tag{I.9}$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (I.9), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{p}},$$

puisque

$$z_0^p = \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^p = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions z de (I.9), sous la forme

$$Z = zz_0,$$

ce qui donne

$$Z^p = (zz_0)^p = z^p z_0^p = -1,$$

et donc, puisque $z_0^p = -1$, on a

$$z^p = 1,$$

ce qui nous montre que z est une racine$p$-ième de l'unité, donc dans l'ensemble

$$U_p = \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{p}}, \quad k \in \{0, ..., p-1\} \right\} \tag{I.10}$$

et donc

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } \{z_k\}_{0 \leq k \leq p-1} \text{ où } z_k = e^{\frac{2ki\pi}{p}} e^{\frac{i\pi}{p}}, \tag{I.11}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } z_k = e^{\frac{(1+2k)i\pi}{p}}, \text{ pour } k \in \{0, ..., p-1\}. \tag{I.12}$$

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{p}},$$

sur le cercle trigonométrique, d'argument π/p, par l'identité et les $p-1$ rotations, d'angles $\frac{(1+2k)\pi}{p}$, pour $k \in \{1, ..., p-1\}$.

Voir la figure I.2.

(2) Avant de répondre à la question, déterminons les pôles réels de f, avec deux cas, selon la parité de p.
- Premier cas : p est pair. On a alors, pour tout x réel, $x^p \geq 0$ et donc, $x^p+1 \geq 1 > 0$. Le dénominateur de f n'est donc jamais nul pour x réel et f n'a donc pas de pôle réel.
- Second cas : p est impair. Puisque $p \geq 2$, on a donc $p = 2q+1$ avec $q \geq 1$. Parmi les pôles de f, donnés par (I.12), considérons $k = q$. Il est clair que $k \geq 1$ et que $k \leq p-1$, ce qui est équivalent à $q \leq 2q$, ce qui est vrai. Pour ce $k = q$, on a

$$z_q = e^{\frac{(1+2q)i\pi}{2q+1}} = e^{i\pi} = -1,$$

et donc $z_q = -1$ est un unique pôle réel de f. On vérifie que c'est l'unique pôle réel de f.

Bref,

$$\text{Si } p \text{ est pair, } f \text{ n'a aucun pôle réel.} \tag{I.13a}$$

$$\text{Si } p \text{ est impair, } f \text{ a un unique pôle réel (égal à } -1). \tag{I.13b}$$

(I.13c)

Ainsi, si p est impair, on ne peut appliquer la proposition 5.5 page 49 à la fonction f.

Examinons, ce qui se passe si p est pair. Si q est impair, et si on applique la proposition 5.5 page 49 du cours à la fonction f donnée par (I.8), on aura

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} dx, \frac{x^q}{1+x^p} dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés au dessus de l'axe des x. Or, la fonction $\frac{x^q}{1+x^p}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

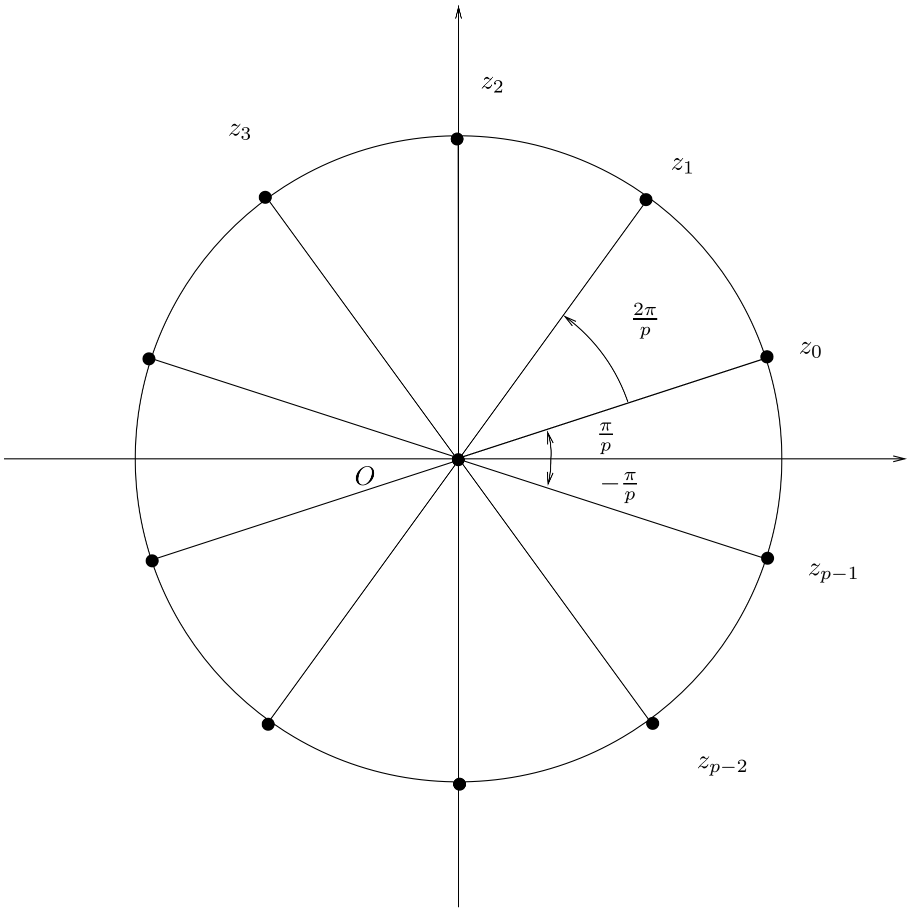


FIGURE I.2. Les pôles $\{z_k\}_{0\leq k\leq p-1}$ de f.

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx. \tag{I.14}$$

Si q est pair, l'application de la proposition 5.5 page 49 à la fonction f est techniquement possible, mais nous verrons ici que la variante présenté sera plus rapide.

La suite de cette correction est partiellement rédigée. Voir rédaction provisoire sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/complementmanuscrits/01.pdf`

(3)

(a) Le choix du chemin est proche de celui utilisé dans l'annexe K.

(b) On obtient

$$J = \frac{\pi}{p\sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}. \tag{I.15}$$

REMARQUE I.1. Cela est confirmé par matlab : si on tape

```
syms p q x;
f=x^q/(1+x^p);
int(f,x)
```

```
simple(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = x^{q+1} hypergeom\left([1, \frac{q}{p}+p^{-1}], [1+\frac{q}{p}+p^{-1}], -x^p\right) p^{-1} \left(\frac{q}{p}+p^{-1}\right)^{-1},$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \pi \left(\sin\left(\frac{\pi\ (q+1)}{p}\right)\right)^{-1} p^{-1}.$$

Attention, cela ne fonctionne que sous Matlab 2007 ! Pour la version 2019, on ne pourra obtenir par exemple que

```
syms x;
f=x^2/(1+x^9);
int(f,x)
simplify(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = 1/9\ \ln\left(1+x^3\right) - 1/18\ \ln\left(x^6-x^3+1\right) + 1/9\,\sqrt{3}\arctan\left(1/3\ \left(2\,x^3-1\right)\sqrt{3}\right),$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{2}{27}\,\pi\,\sqrt{3}.$$

ou bien

```
syms x;
f=sqrt(x)/(1+x^9);
int(f,x)
simplify(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = 2/9\ \arctan\left(x^{3/2}\right) + 1/18\,\sqrt{3}\ln\left(x^3+\sqrt{3}x^{3/2}+1\right) + 1/9\ \arctan\left(2\,x^{3/2}+\sqrt{3}\right) - 1/18\,\sqrt{3}\ln\left(x^3-\sqrt{3}x^{3/2}+1\right) + 1/9\ \arctan\left(2\,x^{3/2} -\right.$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2/9\,\pi.$$

$\diamondsuit$

(c) La valeur de J pour $q=0$ et $p=3$ est donnée par

$$J = \frac{\pi}{3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{3\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

soit

$$J = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

(d) La valeur de J pour $q=1$ et $p=4$ est donnée par

$$J = \frac{\pi}{4\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{4\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{4},$$

et on retrouve donc le résultat (H.16).

(4) Il faudrait utiliser les techniques d'intégration des fractions rationnelles, présentées par exemple dans [Bas22, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"].

Remarque I.2. D'après la remarque I.1, matlab sait d'une certaine façon intégrer f.

$\diamondsuit$

(5) (a) Le choix du chemin est proche de ceux utilisés à la fois dans l'annexe J et dans l'annexe K.

$$p > q + 1, \tag{I.16a}$$
$$q \geq 0. \tag{I.16b}$$

Et donc, les calculs de cet exercice sont encore valables si par p est un entier et q réel vérifient (I.16).

REMARQUE I.3. D'après la remarque I.1, matlab connaît ces résultats pour tout p et q.

♢

(b) La valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^p} dx$$

est donné par (I.15) avec $q = 1/2$, c'est-à-dire :

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}.$$

soit encore

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{3\pi}{2p}\right)},$$

REMARQUE I.4. Cela est confirmé par matlab (2007) : On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^q} dx = \pi \ \csc\left(3/2 \ \frac{\pi}{p}\right) p^{-1},$$

où $\csc(y) = 1/\sin(y)$.

♢

(6) (a)

$$p > q + 1, \tag{I.17a}$$
$$q > -1. \tag{I.17b}$$

Et donc, les calculs de cet exercice sont encore valables si par p est un entier et q réel vérifient (I.17).

Remarquons que la condition nécessaire et suffisante constitue aussi une condition nécessaire pour que l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \tag{I.18}$$

converge. En effet, sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est strictement positive et on a

$$\text{quand } x \text{ tend vers zéro : } f(x) \sim x^q, \tag{I.19a}$$
$$\text{quand } x \text{ tend vers } +\infty \text{ : } f(x) \sim x^{q-p}, \tag{I.19b}$$

Pour l'intégrabilité de f en zéro, d'après le critère de Rieman, il faut et il suffit que $q + 1 > 0$ ce qui donne (I.17b). Pour l'intégrabilité de f en $+\infty$, d'après le critère de Rieman, il faut et il suffit que $q - p + 1 < 0$ ce qui donne $p > q + 1$ et donc (I.17a).

(b) La valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^p)} dx,$$

est donnée par (I.15) avec $q = -1/2$, c'est-à-dire :

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}.$$

soit encore

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)},$$

REMARQUE I.5. Cela est confirmé par matlab (2007) : On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^q} dx = \pi \csc\left(1/2\,\frac{\pi}{p}\right) p^{-1},$$

où $\csc(y) = 1/\sin(y)$.

$\diamondsuit$

Annexe J

Calcul de l'intégrale de Dirichlet (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul de l'intégrale de Dirichlet sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{J.1}$$

On utilise la méthode des résidus et on pourra consulter par exemple [Buc92, p. 118-119] (qui a inspiré directement cette annexe) ou une méthode très légèrement différente sur
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_de_Dirichlet`

Énoncé

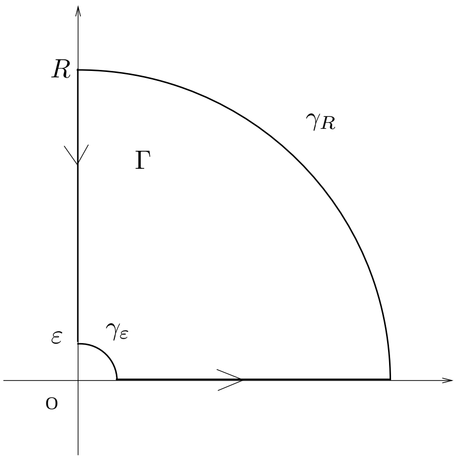


FIGURE J.1. Le chemin Γ considéré.

Pour ε et R deux réels tels que $0 < \varepsilon < R$, on considère le chemin fermé Γ constitué des deux arcs de cercles de centre l'origine O et de rayons respectifs ε et R (notés respectivement γ_ε et γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure J.1. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \tag{J.2}$$

(1) Paramétrer correctement les deux cercles et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{J.3}$$

(2) (a) Montrer que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \tag{J.4}$$

(b) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{J.5}$$

(c) En déduire que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{2R} \tag{J.6}$$

puis que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{J.7}$$

(3) On admet (comme (J.4)) que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -i\int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \tag{J.8}$$

(a) À $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, quelle est la limite de $e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ quand ε tend vers zéro par valeur strictement positive.

(b) Est-ce une condition suffisante pour assurer que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} -i\int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = -\frac{i\pi}{2}\ ? \tag{J.9}$$

On admettra néanmoins ce résultat.

(4) Que vaut $\int_\Gamma f(z)dz$?

(5) Conclure et montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0, \tag{J.10a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{J.10b}$$

Corrigé

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants des deux arcs de cercles de centre l'origine O et des deux segments constituant Γ :

$$\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [\pi/2, 0]\,; \tag{J.11a}$$

$$\gamma_R : z = Re^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0, \pi/2]\,; \tag{J.11b}$$

$$[\varepsilon, R] : z = t \text{ pour } t \in [\varepsilon, R]\,; \tag{J.11c}$$

$$[iR, i\varepsilon] : z = it \text{ pour } t \in [R, \varepsilon]. \tag{J.11d}$$

On a aussi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{[iR,i\varepsilon]} f(z)dz.$$

Ainsi, grâce aux deux paramétrages (J.11c) et (J.11d), il vient pour chacun d'eux $dz = dt$ et $dz = idt$ de sorte que :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R f(t)dt + i\int_R^\varepsilon f(it)dt,\\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - i\int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{it}dt\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{J.12}$$

(2) (a) D'après la définition (J.11b), on a $dz = Rie^{i\theta}d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta,\\ &= Ri\int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\left(Re^{i\theta}\right)}}{Re^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta,\\ &= i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta \tag{J.13}$$

(b) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0, \pi/2]$, ce dont on déduit que la courbe est au-dessus de sa corde, d'équation $y = 2\theta/\pi$, soit

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{J.14}$$

(c) D'après (J.13), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi/2} \left|e^{iRe^{i\theta}}\right| d\theta,\\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

et on déduit de (J.14) que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta,\\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta,\\ &= -\frac{\pi}{2R}\left(e^{-\frac{2R\times\pi}{2\pi}} - 1\right),\\ &= \frac{\pi}{2R}\left(1 - e^{-R}\right),\\ &\leq \frac{\pi}{2R}\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{2R} \tag{J.15}$$

dont on déduit immédiatement que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{J.16}$$

(3) De la même façon que l'on a établi (J.13), on a $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$ et

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\pi/2}^{0} f(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta} d\theta,$$
$$= -\varepsilon i \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)}}{\varepsilon e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta,$$
$$= -i \int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta,$$

et donc

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -i \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \tag{J.17}$$

(a) À $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} = 1. \tag{J.18}$$

(b) On a donc la convergence simple de la fonction $\theta \mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ vers 1 sur $[0, \pi/2]$. Si la convergence était uniforme, on pourrait écrire donc que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et en déduire, selon (J.17) que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -\frac{i\pi}{2}. \tag{J.19}$$

Malheureusement, cette convergence n'est pas *a priori* uniforme. Cependant, le théorème de convergence dominée de Lebesgue Q.3 du cours est aussi valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il suffit donc, pour pouvoir l'appliquer de majorer chaque fonction $\theta \mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ de façon indépendante de ε par une fonction intégrable sur $[0, \pi/2]$, ce qui est aisé car

$$\left| e^{\varepsilon i e^{i\theta}} \right| = e^{-\varepsilon \sin\theta} \leq 1.$$

Remarque J.1. Puisque, à $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\left| e^{R i e^{i\theta}} \right| \leq e^{-R\sin\theta}$$

on déduit d'une part que à $\theta \in]0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{R \to +\infty} e^{R i e^{i\theta}} = 0$$

et d'autre part que, que pour tout $R > 0$, on a

$$\left| e^{R i e^{i\theta}} \right| \leq 1.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue Q.3 assure encore que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

et cela pouvait nous permettre d'éviter de passer par la question 2 !

(4) La fonction $f : z \mapsto e^{iz}/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, elle n'a aucune singularité à l'intérieur du chemin Γ. Ainsi, d'après la formule du résidus (formule 3.44) du cours, on a

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{J.20}$$

Ici, on n'a même pas de résidu à calculer !

(5) Synthétisons tous les résultats : d'après (J.12) et (J.20), il vient, pour tout ε et R

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt = 0.$$

ce qui donne, en séparant partie réelle et imaginaire

$$\int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t}dt + \operatorname{Re}\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz\right) = 0,$$

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}dt + \operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0\right).$$

Enfin, d'après (J.16) et (J.19), il vient en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t}dt = 0,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

ce que l'on peut noter sous la forme finale puisque les intégrandes sont continues en zéro (à vérifier par le lecteur vigilant) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t}dt = 0, \tag{J.21a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}. \tag{J.21b}$$

Remarque J.2. Les intégrandes de (J.21) sont prolongeables par continuité en zéro donc la convergence en zéro était acquise dès le début. Attention cependant, ces intégrales ne sont que semi-convergentes au sens de l'intégration de Riemann : on peut montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \left|\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right| dt = +\infty, \tag{J.22a}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty. \tag{J.22b}$$

Au sens de l'intégration de Lebesgue, les fonctions intégrandes ne sont donc pas dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

(a) Pour démontrer (J.22b), on renvoie à la question 1 page suivante ci-dessous.

(b) Pour démontrer (J.22a), on procède comme dans le cas 5a On écrit tout d'abord pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left|\cos t - e^{-t}\right| \geq |\cos t| - e^{-t}$$

et donc, pour tout $X \geq 1$:

$$\int_1^X \left|\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right| dt \geq \int_1^X \frac{|\cos t|}{t}dt - \int_1^X \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

La seconde intégrale est absolument convergente à cause de e^{-t}. Pour la première, on procède comme dans le cas 5a puisque $|\cos(t)| \leq 1$, on a

$$\forall t \geq 1, \quad |\cos(t)| \geq \cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1).$$

et on conclut comme dans le cas 5a.

$\diamondsuit$

Nous donnons ci-dessous, sous la forme d'un problème corrigé, la preuve de la semi-convergence de l'intégrale donnée dans (J.1) ainsi que le calcul de la valeur exacte, sans la méthode des résidus et donc plus fastidieuse !

Énoncé (calcul "manuel")

(1) Déterminer la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin t/tdt$ et $\int_0^{+\infty} |\sin t|/tdt$.

(2) Soit F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt$$

Montrer que F est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = C - \arctan(x)$, pour tout $x > 0$.

(3) Quelle est la limite de F en l'infini ? Conclure sur la valeur de C.

On pourra passer directement à la limite avec le bon théorème ou utiliser la méthode suivante :

Soit (x_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. En considérant la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(t) = e^{-tx_n}\frac{\sin t}{t}dt,$$

montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0.$$

(4) Que peut-on dire *a priori* sur la continuité de F en zéro ?

(5) Montrer que F est continue en zéro et conclure.

On pourra montrer en faisant une intégration par partie que, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $A, B > 0$, avec $A < B$,

$$\left|\int_A^B e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt\right| \le \frac{6}{A},$$

et faire tendre B vers l'infini.

Corrigé (calcul "manuel")

(1) (a) Définissons la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \ge 0, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & \text{si } t > 0, \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases} \tag{J.23}$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$, puisque la limite de $\sin(t)/t$ en zéro vaut 1.

Nous proposons deux méthodes :

(i) Tout d'abord, on fait un calcul direct. Par intégration par partie, on a pour tout $X \ge 1$, en dérivant $1/t$ et intégrant $\sin t$:

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}dt. \tag{J.24}$$

Puisque

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2},$$

et que $1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, la limite de $\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ existe quand X tend vers l'infini. Par ailleurs, on a

$$\lim_{X\to+\infty}\left|\frac{\cos(t)}{t}\right| = 0,$$

Ainsi, d'après (J.24) et la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$I = \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}dt \in \mathbb{R}. \tag{J.25}$$

On déduit aussi de (J.24) que

$$I = \cos(1) + \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}dt + \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

(ii) On peut aussi, autrement, utiliser une série alternée (de Riemann). Posons tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt \tag{J.26}$$

Faisons le changement de variable $u = t - n\pi$. On a donc

$$I_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi}dt.$$

Si n est pair, on a $\sin(u+n\pi) = \sin(u)$ et donc

$$\text{si } n \text{ pair}, \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} dt, \tag{J.27a}$$

et, de même

$$\text{si } n \text{ impair}, \quad I_n = -\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} dt. \tag{J.27b}$$

On vérifie que, pour n nul, I_0 est définie puisque $\sin u/u$ est continue en zéro. On déduit ensuite que la série de terme général I_n est alternée. En effet, sin est positif sur $[0,\pi]$ et donc I_n est positif si n est pair et négatif sinon. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = (-1)^n |I_n|, \tag{J.28a}$$

$$|I_n| = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} du. \tag{J.28b}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in [0,\pi]$, on a

$$u + (n+1)\pi \geq u + n\pi > 0,$$

et donc puisque $0 \leq \sin(u)$

$$0 \leq \frac{\sin(u)}{u+(n+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u+n\pi},$$

et donc, par intégration,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I_{n+1}| \leq |I_n|. \tag{J.29}$$

On a aussi, pour $n \geq 1$, puisque $0 \leq \sin(u) \leq 1$ et $0 < n\pi \leq u + n\pi \leq (n+1)\pi$

$$\frac{\sin(u)}{(n+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u+n\pi} \leq \frac{\sin(u)}{n\pi}$$

et donc

$$\frac{\sin(u)}{(n+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$$

et par intégration, puisque $\int_0^\pi \sin(u) du = 2$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{(n+1)\pi} \leq |I_n| \leq \frac{1}{n}. \tag{J.30}$$

et en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I_n| \leq \frac{1}{n}. \tag{J.31}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0. \tag{J.32}$$

De (J.28a), (J.29) et (J.32), on déduit que la série de terme général I_n converge et il existe donc $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n+\to\infty} \sum_{k=0}^{n} I_n = l$$

autrement dit

$$\lim_{n+\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = l. \tag{J.33}$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}_+$, en posant $n = E(X/n)$, on a $n\pi \leq X \leq (n+1)\pi$ et donc

$$\int_0^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\pi n} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_{n\pi}^X \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \int_0^X \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_0^{\pi n} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| &\leq \left| \int_{n\pi}^X \frac{\sin(t)}{t} dt \right|, \\ &\leq \int_{n\pi}^X \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt, \\ &\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt, \\ &= |I_n|. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^X \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_0^{\pi n} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq |I_n|. \tag{J.34}$$

Quand X tend vers l'infini, n aussi et de (J.33) et (J.34), on déduit donc que

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin(t)}{t}dt = l. \tag{J.35}$$

(b) Comme pour la convergence de l'intégrale, on peut utiliser deux méthodes (qui sont proches des deux méthodes vues ci-dessus pour la convergence).

(i) Puisque $|\sin(t)| \leq 1$, on a

$$\forall t \geq 1, \quad |\sin(t)| \geq \sin^2(t),$$

et donc, on écrit successivement : pour tout $X \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt &\geq \int_1^X \frac{\sin^2(t)}{t}dt,\\ &= \int_1^X \frac{1-\cos(2t)}{t}dt,\\ &= \frac{1}{2}\int_1^X \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t}dt,\end{aligned}$$

par intégration par partie sur la seconde intégrale, en dérivant $1/t$ et intégrant $\cos(2t)$: il existe des constantes a, b et c toutes non nulles, telles que

$$= \frac{1}{2}\int_1^X \frac{dt}{t} + a + b\frac{\sin(2X)}{X} + c\int_1^X \frac{\sin(2t)}{t^2}dt.$$

On a

$$\lim_{X\to+\infty}\left|\frac{\sin(2X)}{X}\right| = 0.$$

On a aussi

$$\left|\frac{\sin(2t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2},$$

et que $1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, la limite de $\int_1^X \frac{\sin(2t)}{t^2}dt$ existe quand X tend vers l'infini. Enfin, la limite de $\int_1^X \frac{1}{t}dt$ est égale à $+\infty$. De tout cela, il résulte que

$$\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty,$$

ce qui implique

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty,$$

(ii) On peut aussi passer par les séries. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$J_n = \int_{n\pi} (n+1)\pi \left|\frac{\sin(t)}{t}dt\right| dt.$$

Il est clair, que puisque $\sin(t)$ est du signe de $(-1)^n$, on a

$$J_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}dtdt.$$

et autrement dit, en utilisant la définition (J.26) et (J.28b), on a

$$J_n = |I_n|. \tag{J.36}$$

On a plus qu'à utiliser (J.30) qui fournit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{(n+1)\pi} \leq J_n, \tag{J.37}$$

ce qui implique que la série de terme général J_n est divergente, puisque minorée par le terme général d'une série de Riemann divergente. On en déduit comme (J.33) que

$$\lim_{n+\to\infty}\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty \tag{J.38}$$

Enfin, exactement comme (J.34), on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt - \int_0^{\pi n} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt\right| \leq |I_n|.$$

dont on déduit alors, en utilisant (J.38) comme pour la preuve de (J.35)

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty. \tag{J.39}$$

REMARQUE J.3. On a donc une intégrale semi-convergente.

(2) — Pour f définie par (J.23), considérons g, la fonction de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x,t) = f(t)e^{-tx}.$$

Puisque pour tout $y \geq 0$, $|\sin(y)| \leq y$, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, on a

$$|g(x,t)| \leq e^{-tx}.$$

Soit $\alpha > 0$, fixé. On a donc aussi

$$\forall (x,t) \in [\alpha, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \quad |g(x,t)| \leq e^{-\alpha t}. \tag{J.40}$$

g est continue en t en x. D'après (J.40), puisque $e^{-\alpha \cdot}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, g vérifie donc l'hypothèse de domination et F est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisqu'elle l'est pour tout $\alpha > 0$, sur $[\alpha, +\infty[$).

REMARQUE J.4. Naturellement, pour $\alpha = 0$, cela n'est plus vrai et donc, F, défini en $x = 0$, d'après (J.25) n'est pas nécessairement continue en zéro.

— De même, g est dérivable par rapport à x sur $[\alpha, +\infty[\times \mathbb{R}_+$ et

$$\forall (x,t) \in [\alpha, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = -\sin(t)e^{-xt},$$

dont on déduit

$$\forall (x,t) \in [\alpha, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq e^{-\alpha t}.$$

L'hypothèse de domination est donc vérifiée et F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt. \tag{J.41}$$

— Posons, à $x > 0$, $u = xt$ de telle sorte que

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \sin(u/x)e^{-u}du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \sin(t/x)e^{-t}dt. \tag{J.42}$$

On a, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t}dt &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt\right), \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right), \\
&= \frac{x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (J.42), on a

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\frac{1/x}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a donc finalement, d'après (J.41) :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \tag{J.43}$$

et par intégration, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = -\arctan(x) + C. \tag{J.44}$$

(3) D'après (J.44), on a

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = C - \frac{\pi}{2}. \tag{J.45}$$

Pour trouver la valeur de C, on utilise l'indication de l'énoncé. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(t) = e^{-tx_n}\frac{\sin t}{t},$$

où (x_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. On vérifie que pour tout $t > 0$,

$$|f_n(t)| \leq e^{-x_n t},$$

et donc f_n tend simplement vers zéro sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque x_n tend vers l'infini, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $x_n \geq \alpha$ et donc

$$\forall n \geq N, \quad |f_n(t)| \leq e^{-\alpha t}.$$

Là encore, l'hypothèse de convergence dominée est vérifiée et on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0.$$

Or, pour tout n,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = F(x_n).$$

Ainsi, pour toute suite (x_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, on a $F(x_n) \to 0$, ce qui signifie que

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0. \tag{J.46}$$

De (J.44), (J.45) et (J.46), on déduit donc

$$\forall x > 0, \quad F(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}. \tag{J.47}$$

(4) *A priori* sur la continuité de F en zéro n'est pas assurée. Voir remarque J.4.

(5) — La fonction F n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. Néanmoins, on peut la définir en zéro en utilisant les résultats de la question 1, en définissant

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, \tag{J.48}$$

au sens de

$$F(0) = \lim_{X\to+\infty}\int_0^{X} \frac{\sin(t)}{t} dt. \tag{J.49}$$

Formellement, on a

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, \tag{J.50}$$

et donc, d'après (J.47)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \tag{J.51}$$

Le problème de cet raisonnement est que cela revient à écrire que F est continue en zéro, ce que l'on n'a pas !

— Montrons (J.51) maintenant cela rigoureusement ! Le problème de ce passage à la limite est que, pour $x > 0$, $F(x)$ existe comme intégrale absolument convergente, mais que pour $x = 0$, $F(0)$ n'existe que comme intégrale semi-convergente. Voir remarque J.3.

— Montrons que

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall A, B, \quad 0 < A < B, \quad \left|\int_A^B e^{-tx}\frac{\sin t}{t} dt\right| \leq \frac{6}{A}, \tag{J.52}$$

Cette correction est issue et adaptée de [AF88, Tome 2, p. 442] à vos connaissances. La notion de critère de Cauchy, utilisée originellement pour cette preuve, ne figure plus au programme !

En reprenant les calculs déjà fait ci-dessus ou en utilisant matlab, on peut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int \sin(t)e^{-xt}dt = -\frac{\cos(t)\, e^{-xt}}{x^2+1} - \frac{\sin(t)\, xe^{-xt}}{x^2+1}, = -\frac{e^{-xt}(\cos(t) + x\sin(t))}{1+x^2}. \tag{J.53}$$

Soient A, B tels que $0 < A < B$. À $x > 0$ fixé, faisons une intégration par partie en posant $u' = e^{-xt}\sin(t)$ et $v = 1/t$. On a donc en posant

$$G = \int_A^B \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt, \tag{J.54}$$

$$\begin{aligned} G &= \int_A^B uv'dt + [uv]_{t=A}^{t=B}, \\ &= -\int_A^B \frac{e^{-xt}(\cos(t) + x\sin(t))}{1+x^2}\frac{1}{t^2}dt + \left[\frac{e^{-xt}(\cos(t) + x\sin(t))}{(1+x^2)t}\right]_{t=A}^{t=B}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |G| &\leq \int_A^B \frac{1+x}{1+x^2}\frac{1}{t^2}dt + \frac{1+x}{1+x^2}\left|\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right|, \\ &\leq \frac{1+x}{1+x^2}\left(\int_A^B \frac{1}{t^2}dt + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right), \end{aligned}$$

et puisque $1/B < 1/A$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1+x}{1+x^2}\left(\int_A^B \frac{1}{t^2}dt + \frac{2}{A}\right),\\
&= \frac{1+x}{1+x^2}\left(-\frac{1}{B} + \frac{1}{A} + \frac{2}{A}\right),\\
&\leq \frac{1+x}{1+x^2} \times \frac{3}{A}
\end{aligned}$$

et puisque en se retreignant à $x \in]0,1]$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1+1}{1} \times \frac{3}{A},\\
&= \frac{6}{A}.
\end{aligned}$$

Si maintenant $x = 0$, on a

$$\int \sin(t)dt = -\cos(t),$$

et (J.53) est encore vrai avec $x = 0$ et donc le calcul précédent est encore vrai pour $x = 0$. On a donc finalement (J.52). Cette intégrale est définie pour $x > 0$ et pour $x = 0$, au sens de (J.25). Enfin, on peut donc dans (J.52) faire tendre $B \to \infty$, ce qui donne

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall A > 0, \quad \left|\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt\right| \leq \frac{6}{A}, \tag{J.55}$$

Par ailleurs, pour tout $x \geq 0$, on a, pour tout $A > 0$,

$$|F(x) - F(0)| \leq \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right|,$$

et donc

$$\forall x \geq 0, \quad \forall A > 0, \quad |F(x) - F(0)| \leq \left|\int_A^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt\right| + \left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right| + \left|\int_0^A \left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}dt\right|.$$

et d'après (J.55), il vient

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall A > 0, \quad |F(x) - F(0)| \leq \frac{6}{A} + \left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right| + \left|\int_0^A \left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}dt\right|. \tag{J.56}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la convergence de $\int_0^\infty \sin(t)/t$, on peut choisir A_1 tel que $\forall A \geq A_1$:

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{J.57}$$

On peut choisir A_2 tel que $\forall A \geq A_2$:

$$\frac{6}{A} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{J.58}$$

Fixons alors $A = \max(A_1, A_2)$. Il vient donc d'après (J.56), (J.57) et (J.58)

$$\forall x \geq 0, \quad |F(x) - F(0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_0^A \left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}dt\right|. \tag{J.59}$$

Enfin, la fonction $t \mapsto \left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}$ tend simplement vers zéro quand $x \to 0$. De plus, pour tout $t \in [0, A]$,

$$\left|\left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq 2\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|,$$

et le théorème de convergence dominée nous donne

$$\lim_{x\to 0}\left|\int_0^A \left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}dt\right| = 0,$$

et il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [0, \eta]$,

$$\left|\int_0^A \left(e^{-xt}-1\right)\frac{\sin(t)}{t}dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et donc, d'après (J.59),

$$\forall x \in [0, \eta], \quad |F(x) - F(0)| \leq \varepsilon.$$

Bref, la fonction F est continue et (J.51) est donc prouvé rigoureusement !

◇

Annexe K

Calcul de l'intégrale de Fresnel (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul des intégrales de Fresnel sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen :

$$\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \tag{K.1a}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \tag{K.1b}$$

On utilise la méthode des résidus. et on pourra consulter par exemple [Buc92, p. 118-119] (qui a inspiré directement cette annexe) ou
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_de_Fresnel`

L'utilisation de l'intégrale de Fresnel pour la longueur de la spirale de Cornu et dans les Clothoïdes est illustrée dans

— `http://fr.wikipedia.org/wiki/Clothoïde`
— ou dans l'exercice 2 de l'examen médian de MT25 donné au Printemps 2006, disponible sur
  — `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt25/medianMT25_P06.zip`
  — `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt25/source_matlab_medianP06.zip`
  — `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt25/mediancorrigeMT25_P06.zip`

Énoncé

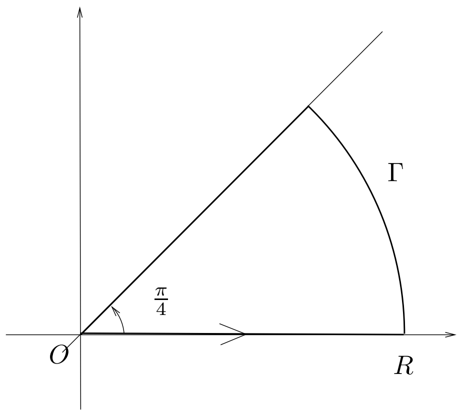


Figure K.1. Le chemin Γ_T considéré.

Pour$R$ un réel strictement positif, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et d'angle $\pi/4$, noté Γ_R et de deux segments comme le montre la figure K.1. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = e^{-\left(z^2\right)}, \tag{K.2}$$

notée e^{-z^2} pour simplifier.

(1) Paramétrer correctement l'arc de cercle Γ_R et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi}d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt. \tag{K.3}$$

(2) (a) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \psi \in [0,\pi/2], \quad \sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi. \tag{K.4}$$

(b) En déduire que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi}d\phi\right| \leq \frac{\pi}{2R^2}. \tag{K.5}$$

(3) On admet que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{K.6}$$

En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \tag{K.7a}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \tag{K.7b}$$

Corrigé

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants de l'arc de cercle Γ_R et les deux segments constituant Γ :

$$\gamma_R : z = Re^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0,\pi/4]\,; \tag{K.8a}$$

$$\text{segment horizontal } I_1 : z = t \text{ pour } t \in [0,R]\,; \tag{K.8b}$$

$$\text{segment oblique } I_2 : z = te^{i\frac{\pi}{4}} \text{ pour } t \in [R,0]. \tag{K.8c}$$

On a aussi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz.$$

Ainsi, grâce aux paramétrages (K.8), il vient pour chacun d'eux, $dz = Rie^{i\theta}d\theta$, $dz = dt$ et $dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dt$, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= Ri\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\theta}e^{-R^2e^{2i\theta}}d\theta + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt,\\ &= Ri\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\theta}e^{-R^2\cos(2\theta) - iR^2\sin(2\theta)}d\theta + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt,\end{aligned}$$

soit, en posant $\phi = 2\theta$ dans la première intégrale :

$$= \frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi}d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt,$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi}d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt. \tag{K.9}$$

(2) (a) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0,\pi/2]$, dont on déduit que la courbe est au dessus de sa corde, d'équation $y = 2\phi/\pi$, soit

$$\forall \psi \in [0,\pi/2], \quad \sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi. \tag{K.10}$$

(b) On en déduit donc

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi\right|,\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\phi} d\phi,\end{aligned}$$

soit, en posant $\psi = \pi/2 - \phi$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\psi} d\psi,\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{2}{\pi}\psi} d\psi,\\ &= -\frac{\pi}{2R^2}\left(e^{-R^2} - 1\right),\\ &= \frac{\pi}{2R^2}\left(1 - e^{-R^2}\right),\\ &\leq \frac{\pi}{2R^2},\end{aligned}$$

et donc que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi\right| \leq \frac{\pi}{2R^2}. \tag{K.11}$$

(3) Posons

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{K.12}$$

On admet que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{K.13}$$

Remarque K.1. Formellement (mais ce calcul est totalement justifié *a posteriori*), on écrit successivement

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy,\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx dy,\end{aligned}$$

ce que l'on écrit en polaire sous la forme (puisque $dxdy = dS = rdrd\theta$) :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \iint_{\theta\in[0,\pi/2], r\in\mathbb{R}_+} e^{-r^2} rdrd\theta,\\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr,\\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=+\infty}\\
&= \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et la formule des résidus et (K.9) impliquent donc, pour tout R,

$$\frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt = 0. \tag{K.14}$$

Si on fait tendre R vers l'infini dans (K.14), les résultats (K.11) et (K.13) impliquent donc que $\int_0^R e^{-it^2}dt$ admet une limite quand R tend vers l'infini qui vérifie

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-it^2}dt = 0$$

On en déduit donc

$$\int_0^\infty e^{-it^2}dt = e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i),$$

et en séparant partie réelle et imaginaire, on en déduit finalement

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos^2 xdx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4},\\
\int_0^{+\infty} \sin^2 xdx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.
\end{aligned}$$

Annexe L

Calcul d'une intégrale (sous la forme d'un exercice et d'un problème corrigés)

Nous proposons dans cette annexe le calcul de l'intégrale suivante sous la forme d'un problème corrigé donné en examen :

$$J(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{a^2+t^2}dt,$$

pour tout $(a,b)\in {\mathbb{R}_+}^2$.

Ceci constitue un contre exemple où le calcul par les résidus, habituellement plus rapide, est presque plus long que le calcul habituel ; de plus, le calcul par résidu est moins général que le calcul habituel !

Ce problème nécessitait au préalable le traitement du petit exercice suivant préliminaire, lui aussi donné en examen :

Énoncé de l'exercice

(1) *À partir de l'inégalité triangulaire rappelée ici :*

$$\forall z,z'\in\mathbb{C},\quad |z+z'|\leq |z|+|z'|$$

montrer que

$$\forall z,z'\in\mathbb{C},\quad |z-z'|\geq \left||z|-|z'|\right|. \tag{L.1}$$

(2) Pour toute la suite, c est un réel strictement positif. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{|z|\to+\infty}\left|1+cz^2\right|=+\infty. \tag{L.2}$$

(3) (a) Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, tel que $\operatorname{Ln}(1+cz^2)$ est défini

$$\left|\operatorname{Ln}(1+cz^2)\right|\leq \left|\ln\left|1+cz^2\right|\right|+\pi. \tag{L.3}$$

(b) Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ \operatorname{Ln}(1+cz^2)\text{ défini}}}\frac{\operatorname{Ln}\left(1+cz^2\right)}{|z|}=0. \tag{L.4}$$

Corrigé de l'exercice

(1) Soient $z,z'\in\mathbb{C}$. Appliquons l'inégalité triangulaire rappelée ici :

$$\forall Z,Z'\in\mathbb{C},\quad |Z+Z'|\leq |Z|+|Z'|, \tag{L.5}$$

à $Z=z-z'$ et $Z'=z'$, ce qui donne

$$|z|\leq |z-z'|+|z'|, \tag{L.6}$$

et donc

$$|z|-|z'|\leq |z-z'|. \tag{L.7}$$

On peut intervertir les rôles de z et de z' ce qui donne dans (L.6)

$$|z'| \leq |z - z'| + |z|,$$

et donc

$$|z'| - |z| \leq |z - z'| \tag{L.8}$$

De (L.7) et (L.8) on déduit donc

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z - z'| \geq ||z| - |z'||. \tag{L.9}$$

(2) Pour toute la suite, c est un réel strictement positif. On peut écrire d'après (L.9)

$$\left|1 + cz^2\right| = \left|cz^2 - (-1)\right| \geq \left|\left|cz^2\right| - |(-1)|\right| = \left|c\,|z|^2 - 1\right|$$

et puisque $|z| \to +\infty$, pour $|z|$ assez grand, $c\,|z|^2 > 1$ et donc

$$\left|1 + cz^2\right| \geq c\,|z|^2 - 1$$

qui tend $+\infty$ si $|z| \to +\infty$. On a donc

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left|1 + cz^2\right| = +\infty. \tag{L.10}$$

(3) (a) Par définition, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Ln}(1 + cz^2)$ est défini, on a

$$\mathrm{Ln}(1 + cz^2) = \ln\left|1 + cz^2\right| + i\arg\left(1 + cz^2\right),$$

et donc, de nouveau grâce à (L.5)

$$\left|\mathrm{Ln}(1 + cz^2)\right| \leq \left|\ln\left|1 + cz^2\right|\right| + \left|\arg\left(1 + cz^2\right)\right|,$$

et puisque l'argument est dans $]-\pi, \pi]$, on a donc

$$\left|\mathrm{Ln}(1 + cz^2)\right| \leq \left|\ln\left|1 + cz^2\right|\right| + \pi. \tag{L.11}$$

(b) Supposons que $|z|$ tende vers l'infini. On a donc, d'après (L.10) $\left|1 + cz^2\right|$ qui tend vers l'infini, et pour $|z|$ assez grand,

$$1 \leq \left|1 + cz^2\right|$$

et puisque le logarithme (réel) est croissant

$$0 \leq \ln(1) \leq \ln\left|1 + cz^2\right| \leq \ln\left(1 + c|z^2|\right) = \left|\ln\left(1 + c|z|^2\right)\right|,$$

Ainsi, pour $|z|$ assez grand,

$$0 \leq \ln\left|1 + cz^2\right| \leq \ln\left(1 + c|z^2|\right) \tag{L.12}$$

et donc, d'après (L.11)

$$\left|\mathrm{Ln}(1 + cz^2)\right| \leq \ln\left(1 + c|z^2|\right) + \pi,$$

On en déduit que, pour tout z tel que $\mathrm{Ln}(1 + cz^2)$ est défini, on a

$$0 \leq \frac{\left|\mathrm{Ln}(1 + cz^2)\right|}{|z|} \leq \frac{\ln\left(1 + c|z^2|\right)}{|z|} + \frac{\pi}{|z|} = \frac{\ln\left(1 + c|z|^2\right)}{|z|} + \frac{\pi}{|z|} \tag{L.13}$$

Puisque, quand R tend vers l'infini

$$\frac{\ln\left(1 + cR^2\right)}{R} + \frac{\pi}{R},$$

tend vers zéro, on déduit donc de (L.13) que

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ \mathrm{Ln}(1 + cz^2)\ \text{défini}}} \frac{\mathrm{Ln}\left(1 + cz^2\right)}{|z|} = 0. \tag{L.14}$$

REMARQUE L.1. On verra plus loin que $\mathrm{Ln}(1+cz^2)$ est défini et holomorphe sur l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par (L.31) et (L.32).

Énoncé du problème

On cherche à déterminer la valeur de

$$J(a,b)=\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{a^2+t^2}dt, \tag{L.15}$$

pour tout $(a,b)\in {\mathbb{R}_+}^2$.

(1) Montrer que J est définie pour tout $a>0$ et $b>0$. *On admettra pour toute la suite que J est définie et continue pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$.*

(2) En faisant un changement de variable, montrer que si $a\neq 0$,

$$\forall b\geq 0,\quad \forall a>0,\quad J(a,b)=\frac{1}{a}I(ba^2), \tag{L.16}$$

où

$$\forall c\geq 0,\quad I(c)=\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2}dt. \tag{L.17}$$

(3) On veut maintenant calculer l'intégrale $I(c)$ de (L.17) grâce au théorème des résidus.

(a) Soit $c>0$. On pose pour tout $z\in\mathbb{C}$

$$f(z)=\frac{\mathrm{Ln}\left(1+cz^2\right)}{1+z^2}. \tag{L.18}$$

(i) Quels sont les zéros de $z\mapsto 1+z^2$?

(ii) Montrer que

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \text{avec } \mathrm{Ln}(1+cz^2)\text{ défini}}} |zf(z)|=0. \tag{L.19}$$

On pourra utiliser l'exercice page 232.

(iii) On tient le raisonnement suivant : puisque (L.19) est vérifiée, la proposition 5.8 page 51 du cours implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=2i\pi\,\mathrm{Rés}(f,i). \tag{L.20}$$

(A) Déterminer la valeur de $\mathrm{Rés}(f,i)$, puis déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty}f(t)dt$

(B) La valeur obtenue est absurde et ce raisonnement est erroné ! Pourquoi ?

(iv) *Le raisonnement de la question 3(a)iii n'étant pas valable*, on calcule maintenant proprement la valeur de l'intégrale recherchée !

(A) Montrer que f est holomorphe sur l'ouvert

$$W=\mathbb{C}\setminus\left(V\cup\{i,-i\}\right), \tag{L.21}$$

où

$$V=\left\{z\in\mathbb{C},\quad \exists t\in[1/\sqrt{c},+\infty[, z=\pm it\right\}. \tag{L.22}$$

(B)

Pour toute la suite, on suppose que

$$0<c<1, \tag{L.23}$$

et on considère, à $\varepsilon>0$, assez petit, et $R>0$, assez grand, le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ défini sur la figure L.1 page suivante. Montrer que ce chemin est inclus dans l'ouvert W.

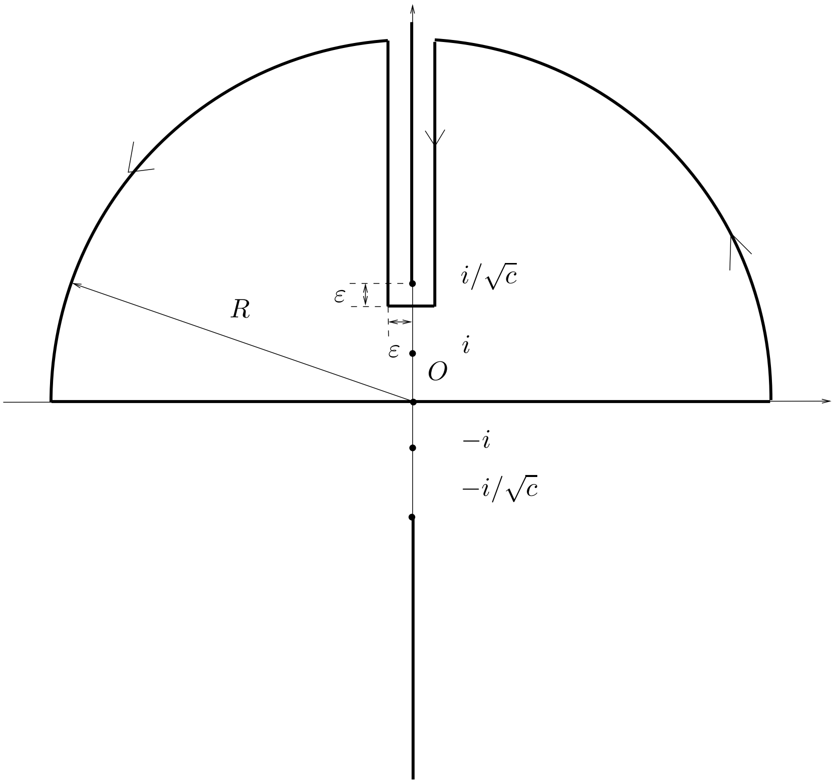


FIGURE L.1. Le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ utilisé.

(C) Quel est le résultat de la proposition 3.44 page 38 du cours ici ?

(D) Qu'entraîne-t-il si on fait tendre ε vers zéro et R vers l'infini ?

(b) Est-ce que les résultats établis sont valides pour $c = 0$ et $c = 1$? Quelle sont les valeurs de $I(0)$ et $I(1)$?

(c) Quelle est la valeur de $J(a, b)$ pour $a, b \geq 0$ vérifiant $0 \leq ba^2 \leq 1$?

Corrigé du problème

(1) Il est clair que l'intégrale est bien définie puisque l'intégrande est continue pour $t \to 0$ et est un $O(1/t^{3/2})$ pour $t \to +\infty$.

REMARQUE L.2. Pour montrer la définition et la continuité de J sur ${\mathbb{R}_+}^2$, on raisonne comme suit :

Soient $A, B \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(a, b) \in [A, \infty[\times[0, B]$, on a par croissance du logarithme et puisque $a^2 + t^2 \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \frac{\ln\left(1 + bt^2\right)}{a^2 + t^2} \leq \frac{\ln\left(1 + Bt^2\right)}{A^2 + t^2}$$

À A et B fixé, la fonction $t \mapsto \phi(t) = \frac{\ln\left(1+Bt^2\right)}{A^2+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue en zéro et en $O(1/t^{3/2})$ en $+\infty$. La fonction $(t, a, b) \mapsto \frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{a^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [A, \infty[\times[0, B]$. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, J est définie et continuue sur $[A, \infty[\times[0, B]$. Puisque c'est vrai pour tout $A, B \in \mathbb{R}_+^*$, J est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

Si à $b \geq 0$ fixé, a tend vers zéro, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{a^2+t^2} \to \frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{t^2},$$

qui est équivalent quand t tend vers zéro à

$$\frac{bt^2}{t^2} = b,$$

et donc continue en zéro. La fonction $t \mapsto \frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. On peut aussi écrire, pour tout $a \geq 0$,

$$\frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{a^2+t^2} \leq \frac{\ln\left(1+bt^2\right)}{t^2},$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'après ce qui précède. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, J est définie et contiue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(2) Si $a \neq 0$, on considère la nouvelle variable u et le changement de variable $u = t/a$. On a donc $dt = adu$ et

$$J(a,b) = a\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+ba^2u^2\right)}{a^2+a^2u^2}du = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+cu^2\right)}{1+u^2}du,$$

où $c = ba^2 \geq 0$. On a donc,

$$\forall b \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad J(a,b) = \frac{1}{a}I(ba^2), \tag{L.24}$$

où

$$\forall c \geq 0 \quad I(c) = \int_0^\infty \frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2}dt. \tag{L.25}$$

(3) (a) Soit $c > 0$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\mathrm{Ln}\left(1+cz^2\right)}{1+z^2}. \tag{L.26}$$

(i) Les zéros de $z \mapsto 1+z^2$ sont $\pm i$.

(ii) On a, tant que le logarithme complexe $\mathrm{Ln}(1+cz^2)$ est défini et que z est non nul,

$$\begin{aligned}|zf(z)| &= |z|\frac{\left|\mathrm{Ln}\left(1+cz^2\right)\right|}{|1+z^2|},\\ &= \frac{\left|\mathrm{Ln}\left(1+cz^2\right)\right|}{\left|\frac{1}{z}+z\right|},\end{aligned}$$

De nouveau, en utilisant (L.9), on a $\left|\frac{1}{z}+z\right| \geq |z| - 1/|z| \geq |z|-1$, si $|z|$ est assez grand. On a donc, pour $|z|$ assez grand,

$$\begin{aligned}|zf(z)| &\leq \frac{\left|\mathrm{Ln}\left(1+cz^2\right)\right|}{|z|-1},\\ &\leq \frac{\left|\mathrm{Ln}\left(1+cz^2\right)\right|}{|z|}\frac{|z|}{|z|-1}.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{|z|}{|z|-1}$ tend vers 1 quand $|z|$ tend vers l'infini, l'équation (L.14) implique donc que

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \text{avec } \mathrm{Ln}(1+cz^2) \text{ défini}}} |zf(z)| = 0. \tag{L.27}$$

(iii)(A) Puisque i est un pôle simple de f, le lemme 3.47 page 41 du cours implique que

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{g(i)}{\phi'(i)},$$

où $g(z) = \text{Ln}\left(1 + cz^2\right)$ et $\phi(z) = 1 + z^2$. On a donc

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{\text{Ln}\,(1 - c)}{2i},$$

et donc

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{\text{Ln}\,(1 - c)}{2i}. \tag{L.28}$$

D'après la proposition 5.8 page 51 du cours, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2i\pi\,\text{Rés}(f, i) = \pi\,\text{Ln}\,(1 - c)\,,$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \pi\,\text{Ln}\,(1 - c)\,, \tag{L.29}$$

Puisque f est paire, on a donc

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2}\,\text{Ln}\,(1 - c)\,, \tag{L.30}$$

(B) La valeur donnée par (L.30) est absurde car l'intégrale existe pour toute valeur de c. Or, $\text{Ln}\,(1 - c)$ n'est pas défini si $1 - c < 0$. De plus, même si $1 - c > 0$, la valeur de l'intégrale n'est pas conforme à celle donnée par (L.59).

(iv) *Le raisonnement de la question 3(a)iii n'étant pas valable*, on calcule maintenant proprement la valeur de l'intégrale recherchée !

(A) Le dénominateur de f s'annule pour $z = \pm i$. Son numérateur $\text{Ln}\left(1 + cz^2\right)$ n'est défini et holomorhphe que si $1 + cz^2$ n'est pas un réel négatif ou nul (s'il est dans le plan fendu habituel). Or $1 + cz^2$ est un réel négatif ou nul est équivalent à

$$1 + cz^2 = -r,$$

où $r \in \mathbb{R}_+$, soit encore

$$z^2 = -\frac{r + 1}{c},$$

où $-\frac{r+1}{c} \leq -1/c < 0$ et donc

$$z = \pm i\tau,$$

où $\tau \in [1/\sqrt{c}, +\infty[$. et donc f est holomorphe sur l'ouvert

$$W = \mathbb{C} \setminus (V \cup \{i, -i|\})\,, \tag{L.31}$$

où

$$V = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad \exists t \in [1/\sqrt{c}, +\infty[, z = \pm it\right\}. \tag{L.32}$$

(B) Le chemin évite $\pm i$ et la partie interdite définie par V et est donc inclus dans l'ouvert W, qui n'est pas convexe ici !

(C) On admettra que, malgré l'absence de convexité de l'ouvert W, la proposition 3.44 page 38 du cours s'applique ici ; l'unique résidu de f à l'intérieur du chemin est i et elle donne donc

$$2i\pi\,\text{Rés}(f, i) = \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz. \tag{L.33}$$

On découpe le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ en :

- le segment horizontal $[-R, R]$ où $z = t$;
- le premier segment vertical $\delta_{\varepsilon,R}$ où $z = \varepsilon + it$ avec $t \in [R_1, 1/\sqrt{c} - \varepsilon]$ où R_1 est "proche" de R (quand ε tend vers zéro) ;
- le second segment vertical $\delta'_{\varepsilon,R}$ où $z = -\varepsilon + it$ avec $t \in [1/\sqrt{c} - \varepsilon, R_1]$ où R_1 est "proche" de R (quand ε tend vers zéro) ;
- un autre segment horizontal d_ε où $z = i(1/\sqrt{c} - \varepsilon) + t$ avec $t \in [\varepsilon, -\varepsilon]$;
- les deux arcs de cercle de centre 0 et de rayon R, de réunion notée $\mathcal{C}_{\varepsilon,R}$.

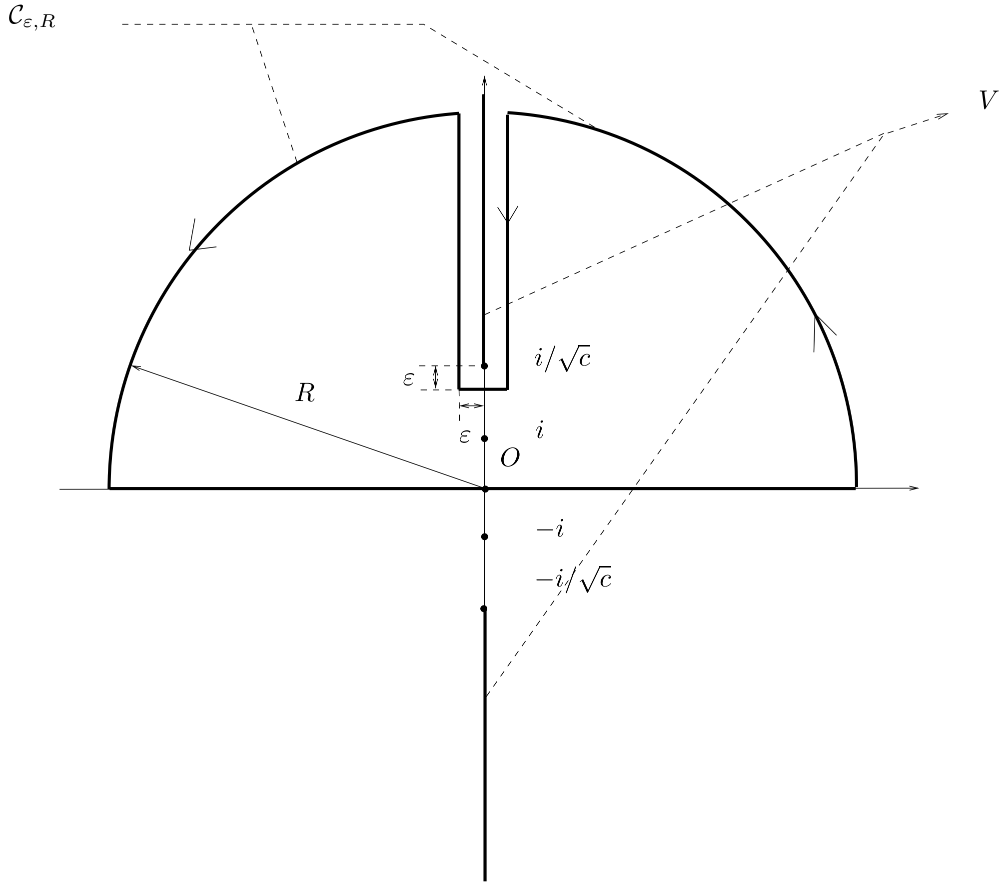


FIGURE L.2. Le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ utilisé.

Voir figure L.2. On a donc

$$2i\pi \operatorname{Rés}(f, i) = \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{d_\varepsilon} f(z)dz. \quad \text{(L.34)}$$

Le résidu de f en i est toujours donné par (L.28).

(D) On admet[1] que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{d_\varepsilon} f(z)dz = 0. \quad \text{(L.35)}$$

1. Ce qui provient du fait que l'intégrande est bornée indépendamment de ε au voisinage de $1/\sqrt{c}$.

On admet [2] que, grâce à l'hypothèse (L.27),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathcal{C}_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 0. \tag{L.36}$$

On sait que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)dz = 2\int_0^\infty f(t)dt. \tag{L.37}$$

Enfin, sur le premier segment vertical $\delta_{\varepsilon,R}$, on a $z=\varepsilon+it$ avec $t\in[R_1, 1/\sqrt{c}-\varepsilon]$ et sur le second segment vertical $\delta'_{\varepsilon,R}$, $z=-\varepsilon+it$ avec $t\in[1/\sqrt{c}-\varepsilon, R_1]$ On a donc, sur chacun de ces deux segments, $dz=idt$ et

$$\begin{aligned}\int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz+\int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz &= i\left(\int_{R_1}^{1/\sqrt{c}-\varepsilon} f(\varepsilon+it)dt+\int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(-\varepsilon+it)dt\right),\\ &= i\left(-\int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(\varepsilon+it)dt+\int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(-\varepsilon+it)dt\right).\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz+\int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz = i\left(-\int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(\varepsilon+it)dt+\int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(-\varepsilon+it)dt\right). \tag{L.38}$$

Or, pour tout $t\in[1/\sqrt{c}-\varepsilon, R_1]$, on a, pour $z=\varepsilon+it$

$$z^2=\varepsilon^2-t^2+2i\varepsilon t,$$

et donc

$$\forall t\in[1/\sqrt{c}-\varepsilon, R_1],\quad f(\varepsilon+it)=\frac{\operatorname{Ln}\left(1+c\varepsilon^2-ct^2+2ic\varepsilon t\right)}{1+\varepsilon^2-t^2+2i\varepsilon t}. \tag{L.39}$$

et de même

$$\forall t\in[1/\sqrt{c}-\varepsilon, R_1],\quad f(-\varepsilon+it)=\frac{\operatorname{Ln}\left(1+c\varepsilon^2-ct^2-2ic\varepsilon t\right)}{1+\varepsilon^2-t^2-2i\varepsilon t}. \tag{L.40}$$

On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} 1+\varepsilon^2-t^2-2i\varepsilon t = 1-t^2<0, \tag{L.41}$$

car $t^2\geq 1/c>1$, d'après l'hypothèse faite sur c :

$$0<c<1. \tag{L.42}$$

Notons

$$z_\varepsilon = 1+c\varepsilon^2-ct^2+2i\varepsilon ct, \tag{L.43}$$

qui vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} z_\varepsilon = 1-ct^2. \tag{L.44}$$

En revanche, on ne peut pas plus écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\operatorname{Ln}(z_\varepsilon)=\operatorname{Ln}(1-ct^2),$$

puisque $1-ct^2\in\mathbb{R}_-^*$ et n'a pas de logarithme complexe. Cependant, la partie imaginaire de z_ε est strictement positive et sa partie réelle tend vers $1-ct^2<0$. Ainsi, pour $\varepsilon>0$ assez petit, la partie imaginaire de z_ε est strictement positive. On a donc, pour $\varepsilon>0$,

$$\operatorname{Ln}(z_\varepsilon)=\ln|z_\varepsilon|+i\arg(z_\varepsilon).$$

2. provient du lemme 5.6 page 57 de la version longue du cours.

La partie réelle de z_ε tend vers un nombre strictement négatif et sa partie imaginaire tend vers zéro par valeur positive. Ainsi, z_ε tend vers un point de l'axe réel négatif, en en étant "au-dessus". Ainsi, à la limite ε tendant vers zéro, l'argument de z_ε tend donc vers π. D'après (L.44), on a donc finalement

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Ln}(z_\varepsilon) = \ln\left|1 - ct^2\right| + i\pi,$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Ln}(z_\varepsilon) = \ln\left(ct^2 - 1\right) + i\pi. \tag{L.45}$$

D'après (L.39), on a donc finalement

$$\forall t \in [1/\sqrt{c}, R], \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\varepsilon + it) = \frac{\ln\left(ct^2 - 1\right) + i\pi}{1 - t^2}. \tag{L.46}$$

Si on fait le même raisonnement sur $z_\varepsilon = 1 + c\varepsilon^2 - ct^2 - 2ic\varepsilon t$ dont la partie la partie imaginaire de z_ε est strictement négative et sa partie réelle tend vers $1 - ct^2 < 0$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a,c comme (L.45)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Ln}(z_\varepsilon) = \ln\left(ct^2 - 1\right) - i\pi, \tag{L.47}$$

et donc

$$\forall t \in [1/\sqrt{c}, R], \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(-\varepsilon + it) = \frac{\ln\left(ct^2 - 1\right) - i\pi}{1 - t^2}. \tag{L.48}$$

On admet[3] que (L.39), (L.40), (L.45), (L.48), impliquent

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz = i\left(-\int_{1/\sqrt{c}}^{R} \frac{\ln\left(ct^2 - 1\right) + i\pi}{1 - t^2} dt + \int_{1/\sqrt{c}}^{R} \frac{\ln\left(ct^2 - 1\right) - i\pi}{1 - t^2} dt\right),$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -2\pi \int_{1/\sqrt{c}}^{R} \frac{1}{t^2 - 1} dt. \tag{L.49}$$

Pour tout $t \in [1/\sqrt{c}, R_1]$, on a $t^2 \geq 1/c$ d'où, d'après (L.42), on a $t^2 - 1 \geq 1/c - 1 > 0$ et la fonction $1/(t^2 - 1)$ est continue et intégrable sur $[1/\sqrt{c}, R_1]$. Puisque

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right),$$

3. conséquence de la limite simple et du théorème Q.3 page 256 du cours.

on a donc, si $R > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{1/\sqrt{c}}^{R} \frac{1}{t^2-1} dt &= \frac{1}{2}\left(\int_{1/\sqrt{c}}^{R} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt\right),\\
&= \frac{1}{2}\left([\ln(|t-1|)]_{1/\sqrt{c}}^{R} - [\ln(|t+1|)]_{1/\sqrt{c}}^{R}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|R-1| - \ln|R+1| - \ln|1/\sqrt{c}-1| + \ln|1/\sqrt{c}+1|\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{|R-1|}{R+1} + \ln\frac{1/\sqrt{c}+1}{|1/\sqrt{c}-1|}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{R-1}{R+1} + \ln\frac{1/\sqrt{c}+1}{1/\sqrt{c}-1}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{R-1}{R+1} + \ln\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right),
\end{aligned}$$

Enfin, si on passe à la limite R tendant vers l'infini, on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+, R\to\infty} \int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -\pi \ln\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}. \tag{L.50}$$

Passons finalement à la limite $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$, et (L.34), (L.35), (L.36), et (L.37) donnent donc

$$2i\pi \operatorname{Rés}(f,i) = 2\int_0^\infty f(t)dt - \pi \ln\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}},$$

où le résidu de f en i est toujours donné par (L.28). Ainsi, on obtient

$$2i\pi \frac{\operatorname{Ln}(1-c)}{2i} = 2\int_0^\infty f(t)dt - \pi \ln\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}},$$

et donc, grâce à (L.42),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)dt &= \frac{\pi}{2}\ln(1-c) + \frac{\pi}{2}\ln\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}},\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\ln\left((1-c)\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)\right),\\
&= \frac{\pi}{2}\ln\left(\left(1-\sqrt{c}\right)\left(1+\sqrt{c}\right)\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right),\\
&= \frac{\pi}{2}\ln\left(\left(1+\sqrt{c}\right)^2\right),\\
&= \pi\ln\left(1+\sqrt{c}\right),
\end{aligned}$$

et donc finalement

$$\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2} dt = \pi\ln\left(1+\sqrt{c}\right), \tag{L.51}$$

qui est différent de la valeur donnée par (L.30). De plus, la valeur de l'intégrale est maintenant conforme à celle donnée par (L.59).

(b) Cette preuve s'appuie sur l'inégalité (L.42). Cependant, on a admis que la fonction J est continue (voir preuve dans la remarque L.2) ; il en est de même pour I. Puisque $c \mapsto \ln(1+\sqrt{c})$ est continue en $c = 0$ et $c = 1$, on peut donc passer à la limite $c \to 0$ ou $c \to 1$ dans (L.51) et obtenir

$$\forall c \in [0,1], \quad I(c) = \int_0^\infty \frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2}dt = \pi \ln\left(1+\sqrt{c}\right). \tag{L.52}$$

En particulier $I(0) = 0$ et

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2}dt = \pi \ln(2).$$

(c) Enfin, d'après les premières questions, si $a > 0$ et si

$$0 \leq ba^2 \leq 1, \tag{L.53}$$

on a $c = ba^2 \in [0,1]$ et

$$\forall b \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad J(a,b) = \frac{1}{a}I(ba^2) = \frac{1}{a}\pi \ln\left(1+\sqrt{ba^2}\right) = \frac{1}{a}\pi \ln\left(1+a\sqrt{b}\right).$$

Par continuité de J par rapport à a et b et le fait que

$$\lim_{a\to 0} \frac{\pi}{a} \ln\left(1+a\sqrt{b}\right) = \lim_{a\to 0} \frac{\pi}{a} a\sqrt{b} = \pi\sqrt{b},$$

impliquent donc

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+}^2, \text{vérifant (L.53)}, \quad J(a,b) = \frac{\pi}{a} \ln\left(1+a\sqrt{b}\right), \tag{L.54}$$

où par convention,

$$\left[\frac{\pi}{a} \ln\left(1+a\sqrt{b}\right)\right]_{a=0} = \pi\sqrt{b},$$

ce qui est bien la valeur annoncée dans la remarque L.4.

Remarque L.3. Ici, contrairement à la méthode classique de la remarque (L.4), on ne peut pas calculer l'intégrale $I(c)$ si l'hypothèse (L.42) n'est pas vérifiée. En effet, si $c > 1$, on peut toujours écrire comme dans le point 3(a)ivC page 237 la proposition 3.44 page 38 du cours et cette fois les résidus de f sont à l'extérieur du chemin et elle donne donc

$$0 = \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz. \tag{L.55}$$

Cependant, puisque si $1/\sqrt{c} < 1$, on peut plus écrire (L.49) qui donnerait

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -2\pi \int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{1}{t^2-1}dt,$$

qui divergerait au point $t = 1$ qui est cette fois-ci inclus dans $[1/\sqrt{c}, R]$.

Remarque L.4. Classiquement, mais plus longuement, on peut aussi parvenir au même résultat sans utiliser les résidus, en dérivant sous le signe somme, en décomposant en éléments simples et en intégrant chacune des fonctions obtenues, comme le montre la suite.

(1) Soit $C > 0$. La fonction définie sur $[C,\infty] \times \mathbb{R}_+$, qui à (c,t) associe $\frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2}$ est, comme précédemment, continue par rapport à t, dérivable par rapport à c avec

$$\forall (c,t) \in [C,\infty] \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial}{\partial c}\frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2} = \frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)}$$

En particulier, pour $(c,t) \in [C,\infty] \times \mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial c}\frac{\ln\left(1+ct^2\right)}{1+t^2} \leq \frac{t^2}{(1+Ct^2)(1+t^2)},$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire d'après le théorème de dérivation sous le signe somme :

$$\forall c > 0, \quad I'(c) = \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)}dt. \tag{L.56}$$

(2) On cherche à déterminer la valeur de

$$\mathcal{I}(c)=\int_0^{\infty}\frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)}dt, \tag{L.57}$$

pour $c\in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}$

$$\frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)}=\frac{\alpha t+\beta}{1+ct^2}+\frac{\gamma t+\delta}{1+t^2},$$

où α, β, γ et δ sont *a priori* dans $\mathbb{C}$. Les deux zéros des dénominateurs des éléments simples $1+ct^2$ et $1+t^2$ sont $t=\pm i/\sqrt{c}$ et $\pm i$, qui sont distincts puisque $c\neq 1$. On multiplie par $t+ct^2$ et on fait tendre t vers $t=i/\sqrt{c}$, ce qui donne

$$\frac{i\gamma}{\sqrt{c}}+\delta=\frac{-1/c}{1-1/c},$$

et donc $\gamma=0$ et $\delta=1/(1-c)$. De même, on a $\alpha=0$ et $\beta=1/(c-1)$. On a donc

$$\frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)}=\frac{1}{1-c}\left(\frac{1}{1+ct^2}-\frac{1}{1+t^2}\right).$$

Chacune des deux intégrales existe et donc,

$$\mathcal{I}(c)=\frac{1}{1-c}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{1+ct^2}dt-\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\right).$$

Remarquons que pour tout $\eta>0$, on a, en posant $u=\sqrt{\eta}t$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\eta t^2}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{\sqrt{\eta}}=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\arctan(+\infty)-\arctan(0)\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{\eta}},$$

On a donc

$$\mathcal{I}(c)=\frac{1}{1-c}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-1\right)=\frac{\pi}{2\left(1+\sqrt{c}\right)\sqrt{c}}=\frac{\pi}{1-c}\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(1-\sqrt{c}\right),$$

soit

$$\forall c\in]0,1[\cup]1,+\infty[,\quad \mathcal{I}(c)=\frac{\pi}{2\sqrt{c}\left(1+\sqrt{c}\right)} \tag{L.58}$$

(3) Déduisons maintenant de ce qui précède la valeur de $I(c)$ pour tout $c\geq 0$. D'après ce qui précède, on a, sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$$I(c)=\int\frac{\pi}{2\sqrt{c}\left(1+\sqrt{c}\right)}dc,$$

Déterminons une primitive de $\frac{\sqrt{c}\pi}{2\left(1+\sqrt{c}\right)}$ sur un intervalle inclus dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$. On pose $X=\sqrt{c}$ et donc $c=X^2$ et $dc=2XdX$ et

$$\begin{aligned}
I(c)&=\int\frac{\pi}{2X\left(1+X\right)}2XdX,\\
&=\int\frac{\pi}{(1+X)}dX,\\
&=\pi\int\frac{1}{(1+X)}dX,\\
&=K+\pi\ln(1+X),\\
&=K+\pi\ln\left(1+\sqrt{c}\right),
\end{aligned}$$

où K est une constante. Par continuité de $I(c)$ par rapport à c, cela est aussi vrai pour $c=0$. On a donc

$$\forall c\geq 0,\quad I(c)=K+\pi\ln\left(1+\sqrt{c}\right). \tag{L.59}$$

(4) Concluons maitenant sur la valeur de $J(a,b)$ sur ${\mathbb{R}_+}^2$. Si $a>0$, on a donc, d'après ce qui précède,

$$J(a,b)=\frac{1}{a}I(ba^2)=\frac{1}{a}\left(K+\pi\ln\left(1+\sqrt{ba^2}\right)\right)=\frac{1}{a}\left(K+\pi\ln\left(1+a\sqrt{b}\right)\right)$$

À $a>0$, faisons tendre b vers zéro. Puisque J est continue, on a donc

$$J(a,0)=\frac{K}{a}.$$

On a aussi par définition

$$J(a,0)=\int_0^\infty \frac{\ln(1)}{a^2+t^2}dt=0,$$

et donc $K=0$. Ainsi, pour tout $a>0$ et pour tout $b\geq 0$

$$J(a,b)=\frac{\pi}{a}\ln\left(1+a\sqrt{b}\right).$$

Enfin, puisque J est continue sur ${\mathbb{R}_+}^2$ et que

$$\lim_{a\to 0}\frac{\pi}{a}\ln\left(1+a\sqrt{b}\right)=\lim_{a\to 0}\frac{\pi}{a}a\sqrt{b}=\pi\sqrt{b},$$

On a donc

$$\forall (a,b)\in{\mathbb{R}_+}^2,\quad J(a,b)=\frac{\pi}{a}\ln\left(1+a\sqrt{b}\right), \tag{L.60}$$

où par convention,

$$\left[\frac{\pi}{a}\ln\left(1+a\sqrt{b}\right)\right]_{a=0}=\pi\sqrt{b},$$

Annexe M

Transformations conformes

On pourra consulter [Buc92, p. 119–125], [Rud92, chap. 14], [Pab95, chap. 11], [AF03, chap. 5] ou `http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_conforme` (avec de jolies images)

ou de façon plus complète

[Kar13] disponible sur `http://karczmarczuk.users.greyc.fr/TEACH/InfoGeo/Work/conform.pdf`.

Ce bref chapitre s'appuie sur des résultats théoriques et sera surtout l'occasion d'une part de formaliser les observations faites sur les fonctions holomorphes en remarque 1.11 page 7 ou lors des exercices de TD 1.11 et 1.12 et d'autre part de justifier certaines notions utilisées de façon pratique (voir section 5.2).

Nous nous conterons de l'énoncé de brefs résultats théoriques.

Généralisons la conservation de l'angle droit vu dans l'exercice de TD 1.11.

Définition M.1. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie localement en z_0 conserve les angles en z_0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} e^{-i\theta}\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|} \tag{M.1}$$

existe et est indépendante de θ.

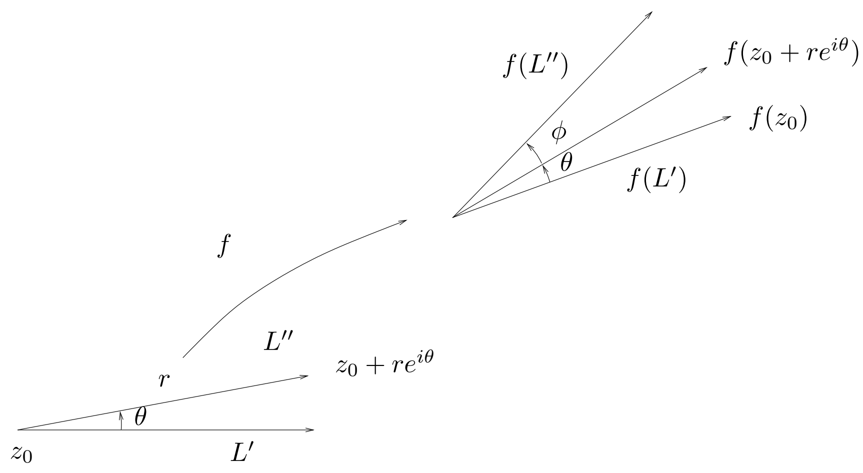


Figure M.1. Les deux rayons L' et L'' et leurs images par f : ϕ tend vers zéro indépendamment de θ quand r tend vers zéro.

De façon moins rigoureuse, cela signifie que f envoie deux rayons L' et L'' issus de z_0 sur deux rayons dont l'angle (orienté) est égal à l'angle entre les deux rayons L' et L'' (voir figure M.1).

Comme dans l'exercice de TD 1.11, on a

Lemme M.2. *Si f est dérivable en z_0 et si $f'(z_0)\neq 0$, alors f conserve les angles en z_0. Réciproquement, si la ($\mathbb{R}^2$)-différentielle de f existe en z_0 et est non nulle et si f conserve les angles en z_0, alors f est dérivable en z_0 et $f'(z_0)\neq 0$.*

DÉMONSTRATION. Seule la condition nécessaire est montrée.

Puisque f est dérivable en z_0, on a

$$f(z_0+re^{i\theta}) = f(z_0) + re^{i\theta}f'(z_0) + r\varepsilon(r),$$

d'où

$$\begin{aligned} e^{-i\theta}\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|} &= e^{-i\theta}\frac{re^{i\theta}f'(z_0)+r\varepsilon(r)}{|re^{i\theta}f'(z_0)+r\varepsilon(r)|},\\ &= \frac{rf'(z_0)+e^{-i\theta}r\varepsilon(r)}{|rf'(z_0)+e^{-i\theta}r\varepsilon(r)|},\\ &= \frac{f'(z_0)+e^{-i\theta}\varepsilon(r)}{|f'(z_0)+e^{-i\theta}\varepsilon(r)|}. \end{aligned}$$

Quand r tend vers zéro, $f'(z_0)+e^{-i\theta}\varepsilon(r)$ tend vers $f'(z_0)$ (puisque le module de la différence est égal à $|\varepsilon(r)|$) et donc

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} e^{-i\theta}\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|} = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|}$$

qui est bien indépendante de θ. □

Si f est dérivable en un point et de dérivée nulle, elle ne conserve pas les angles *a priori* (voir exercice de TD 1.3).

Un certains nombres de fonctions simples envoient des ensembles simples du plan sur eux même. Voir [Rud92, chap. 14].

Les deux théorème fondamentaux (admis sans preuves, données dans [Buc92, p. 119–125] et [Rud92, chap. 14]) sont les suivants :

THÉORÈME M.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe et injective sur U. On a alors, pour tout $z \in U$, $f'(z) \neq 0$ et f est une bijection de U sur $V = f(U)$. De plus, f conserve les angles. On dit que f est une transformation conforme.*

Notons que la seule difficulté de ce théorème est de montrer que pour tout $z \in U$, $f'(z) \neq 0$ (ce qui provient du principe du zéro isolé (voir [Buc92] ou [Sko91]).

Une conséquence simple du théorème M.3 est le corollaire suivant

COROLLAIRE M.4. *Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe et injective sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Alors les courbes d'équation $P(x,y) = \alpha$ =constante et $Q(x,y) = \beta$ =constante sont localement perpendiculaires.*

Cette propriété sera très utile pour la section 5.2.1.

DÉMONSTRATION.

Les droites d'équations $x = \alpha$ et $y = \beta$ sont perpendiculaires et sont envoyées par f sur les courbes d'équations $P(x,y) = \alpha$ et $Q(x,y) = \beta$ (voir figure M.2), qui sont donc elle-même perpendiculaires. □

THÉORÈME M.5. *Tout ouvert simplement connexe[1] de plan (autre que le point lui-même) est l'image par une bijection holomporphe du disque unité vers U.*

DÉMONSTRATION. Voir références de la preuve [AF03, Théorème 5.5.4 p. 344]. □

1. Pour la définition de connexité, voir la note de bas de page 8 page 11. Un ensemble simplement connexe est de plus « sans trou » ni « poignée ». On formalise cela en disant que tout lacet tracé dans un espace simplement connexe doit pouvoir être réduit continûment (c'est-à-dire par homotopie) à un point. Voir `http://fr.wikipedia.org/wiki/Connexité_simple`.

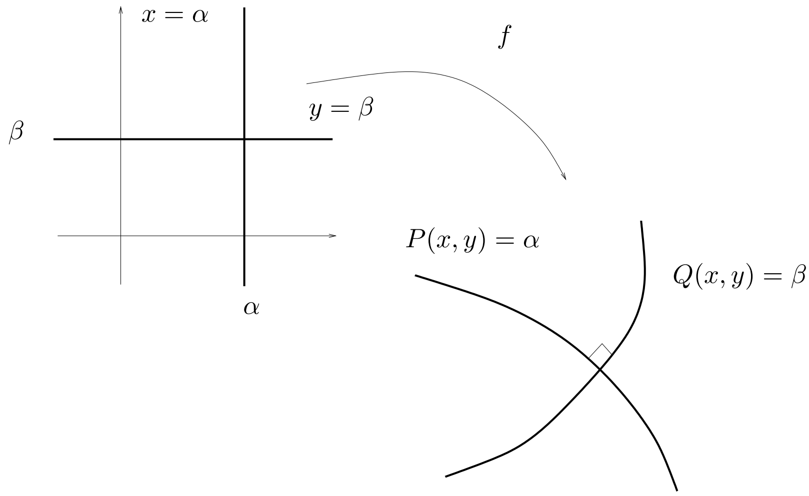


FIGURE M.2. Les droites d'équations $X = \alpha$ et $Y = \beta$ et leurs images par f.

Annexe N

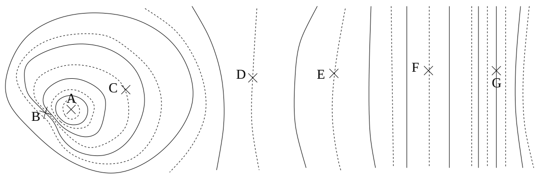
Topographie et courbes de niveau

N.1. Un exercice de rappel

Donnons un petit exercice de rappel, sur les courbes de niveau et le gradient.

Énoncé

On donne sur la figure suivante quelques lignes de niveau issues d'une carte topographique.



On supposera que A est le plus haut point (altitude 1235 m.) et que le terrain «descent vers la droite» de la carte. De plus, entre deux lignes de niveau différentes (une pleine et une pointillée), on supposera qu'il y a une différence d'altitude $\delta_1 = 5$ m et qu'entre deux lignes de niveau du même type (pleine ou pointillée), il y a une différence d'altitude $\delta_2 = 10$ m. L'échelle est de 1 cm. sur la carte pour 10 m. sur le terrain.

Nous considérons que ces lignes de niveau représentent les isovaleurs de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à chaque point (x, y) du plan associe $z = g(x, y)$, la hauteur en ce point.

(1) Tracer en B, C, ..., G la direction et le sens du gradient de g.

(2) Comment peut on définir le gradient approché en ces points (on utilisera les deux réseaux d'équipotentielles définis par δ_2 puis δ_1) ?

(3) En déduire que la pente (approchée) est la plus forte là où les lignes de niveau se resserrent.

(4) (a) En utilisant les questions précédentes, Tracer en B, C, ..., G le gradient approché de g. (on utilisera les deux réseaux d'équipotentielles définis par δ_2 puis δ_1).

(b) Le résultat annoncé en question 3 est il vérifié ?

(c) Que remarquez vous au point G ?

(5) Que se passe-t-il si on donne des lignes de niveau séparées par des différences d'altitude de plus en plus faibles ? Est-ce raisonnable ?

(6) Peut on calculer le gradient en A ? Que pensez vous de sa valeur ?

(7) Que se passe-t-il sur le gradient approché si le terrain est «presque plat» ? Que se passe-t-il sur le gradient approché si le terrain rigoureusement plat ?

(8) Que se passe-t-il pour les gradients précédemment calculés si on suppose que le point D est le point le plus bas de la carte ?

(9) Essayez d'imaginez les allures des cartes représentant le sommet du ballon d'Alsace et du pic du midi. Quelle serait l'allure de la carte pour un sommet se trouvant dans une situation intermédiaire entre celle d'un sommet de type ballon et celle d'un sommet de type pic ?

Corrigé

Exercice issu de [BC04], non corrigé.

N.2. Liens entre potentiels, équipotentielles, altitude et lignes de plus grande pente

On considère $\mathcal{S}$, la surface d'équation $z = \phi(x,y)$ où ϕ est le potentiel scalaire, que l'on peut tracer dans l'espace. z peut être considérée comme l'altitude. Ainsi, dans le plan, les équipotentielles, d'équations $\phi(x,y)$ =Constante, correspondent aux courbes définies comme l'intersection de $\mathcal{S}$ et des plans d'équation z =Constante, qui sont donc les courbes d'altitudes constantes. De plus, en tout point de cette surface, les projections sur un plan horizontal fixé des lignes de plus grandes pentes, correspondent aux lignes de courant ! Ainsi, si on fait partir une goutte d'eau d'un point quelconque de la surface $\mathcal{S}$, la projection de son trajet sur un plan horizontal fixé est une ligne de courant.

Pour montrer que les projections sur un plan horizontal fixé des lignes de plus grandes pentes correspondent aux lignes de courant. Il suffit de remarquer que si $M'(x' = x + dx, y' = y + dy, z')$ est un point proche de $M(x,y,z)$, tous les deux appartenant à la surface $\mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned} z' - z &= \phi(x',y') - \phi(x,y), \\ &\approx \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy, \\ &\approx \nabla\phi(x,y) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour que la différence d'altitude $z' - z$ soit la plus grande possible (autrement dit, que le point M' soit le plus bas possible), il suffit que $\nabla\phi(x,y)$ et $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ soit perpendiculaires entre eux. Le premier vecteur, porté par le gradient, est perpendiculaire aux équipotentielles. Ainsi, le résultat est prouvé.

Par exemmple, si on dessine dans l'espace le potentiel utilisé dans celui de la figure 5.5 page 59, défini par (5.32f), on obtient l'image de la figure N.1 page suivante.

Par exemmple, si on dessine dans l'espace le potentiel utilisé dans celui de la figure 5.6 page 60, défini par (5.32h), on obtient l'image de la figure N.2 page 251.

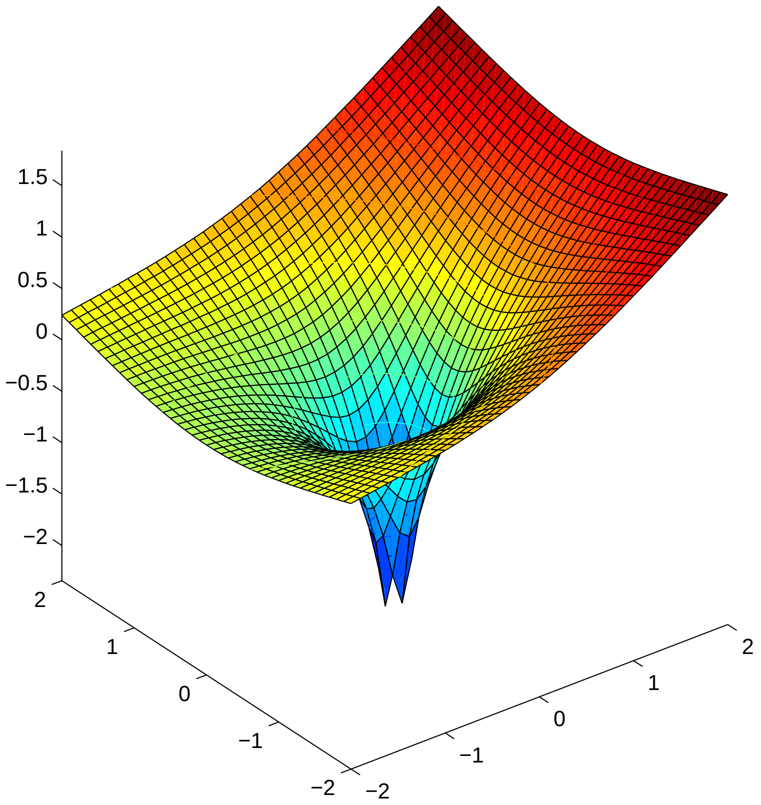


FIGURE N.1. Le potentiel ϕ dans l'espace, associé au potentiel défini par (5.32f).

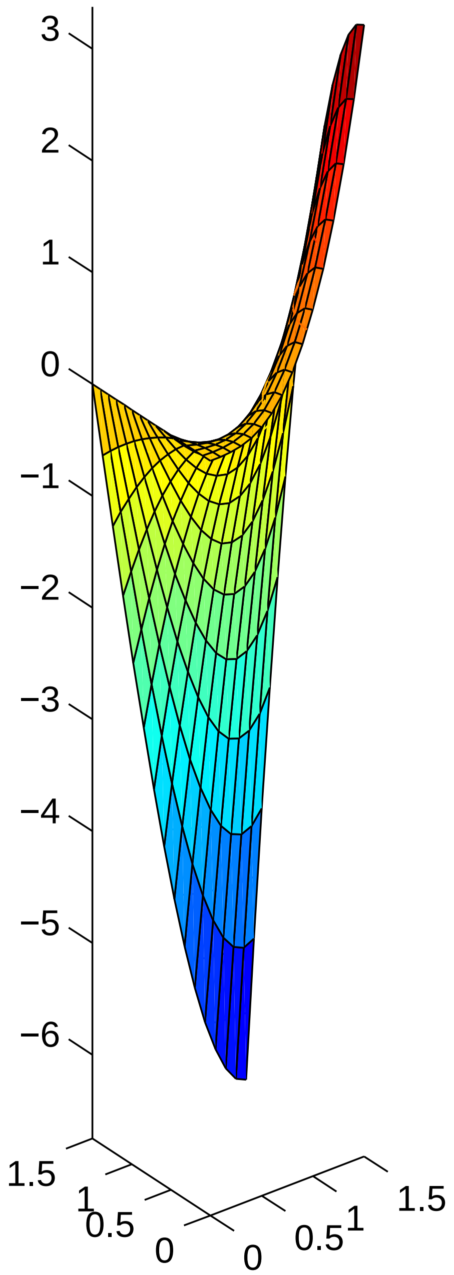


FIGURE N.2. Le potentiel ϕ dans l'espace, associé au potentiel défini par (5.32h).

Annexe O

Rappels sur une poutre droite en flexion

Dans cette annexe, on rappelle quelques résultats de RDM relatifs à une poutre droite en flexion. Ces résultats sont classiques et peuvent être trouvés par exemple dans
[Bas11c] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/15/PDF/coursMQ41_A04.pdf` notamment dans le chapitre 1 (propositions 1.9 et 1.12 p. 17 ou 1.15 p.18) ou dans l'annexe C, section C.2, p. 159.

Nous supposons donc connues les notions de bases de RDM (effort normal, moment fléchissant, flèche ...) pour lesquels on renvoie à [Bas11c].

O.1. Équation d'équilibre local

Pour simplifier, on suppose que la poutre est droite et n'est soumise à

$$\text{à une densité linéaire verticale } p. \tag{O.1}$$

On supposera donc que la poutre est soumise à

$$\text{une densité linéaire horizontale } q \text{ nulle,} \tag{O.2a}$$

$$\text{une densité linéaire de couple } m \text{ nulle.} \tag{O.2b}$$

On supposera que la fonction p est continue.

Ces hypothèses simplifiée permettent de faire des calculs plus simples mais peuvent tout à fait être étendues à des situations plus complètes.

Sous ces hypothèses, la proposition 1.9 p. 17 de [Bas11c] s'écrit

Proposition O.1. *Nous avons les deux équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \tag{O.3a}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0. \tag{O.3b}$$

Remarque O.2. En toute rigueur, les équations (O.3) ne sont valables qu'aux endroits où aucune force ni couple ponctuel ne sont appliquées. Selon l'hypothèse de Saint-Venant, c'est loin des points d'application des ces forces et couples ponctuels qu'on peut utiliser les relations (O.3). En pratique, on pourra les utiliser entre ces points d'application. Mais la proposition proposition 1.12 p. 17 de [Bas11c] fournit un résultat de discontinuité aux points d'applications de forces ponctuelles :

Proposition O.3. *On suppose que la portion de poutre comprise entre les abscisses curvilignes x_1 et x_2 n'est soumise qu'à une force ponctuelle $\overrightarrow{F} = T_0\vec{j}$ au point d'abscisse x_0 avec $x_1 < x_0 < x_2$ ainsi qu'à une densité linéaire verticale p. Alors,*

$$T(x_0 + 0) - T(x_0 - 0) = -T_0, \tag{O.4a}$$

$$M(x_0 + 0) - M(x_0 - 0) = 0. \tag{O.4b}$$

La preuve de cette proposition (faite en annexe C, section C.2, p. 159, de [Bas11c]) peut se faire de façon mécanique élémentaire ou alors en utilisant la « fonction »Dirac qui permet de dériver formellement une fonction discontinue. Nous reviendrons là-dessus au cours de la section 6.2. Cette propriété est vraie en fait à tous les endroits de la poutre où est appliquée une force ponctuelle verticale. On peut donc écrire les résultats des propositions O.1 et O.3 sous la forme condensée suivante :

Proposition O.4. *Nous avons les deux équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle,} \tag{O.5a}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0, \text{ en tout point } x, \tag{O.5b}$$

auxquelles on rajoute

$$T(x+0) - T(x-0) = -T_0, \text{ en tout point } x \text{ où est appliquée une force verticale ponctuelle } T_0\vec{j}. \tag{O.5c}$$

Avec ces équations, on constate donc que

$$M \text{ est continue en tout point,} \tag{O.6a}$$

$$T \text{ est continue en tout point sauf aux points d'application de forces verticales ponctuelle,} \tag{O.6b}$$

$$M \text{ est dérivable en tout point sauf aux points d'application de forces verticales ponctuelle.} \tag{O.6c}$$

L'application des équations (O.5a) et (O.5b) ne peut se faire proche des endroits où s'appliquent des forces verticales ponctuelles pour des raisons mécaniques (voir remarque O.2), mais les fonctions donnant les efforts et la déformée de la poutre sont définies partout et le mécanicien voudrait bien écrire les équations (O.5) et (O.6) partout, par soucis d'uniformité et de généralité.

Dans l'exemple 1.16 p. 19 de [Bas11c], on montre comment calculer M et T en intégrant les équations (O.5a) et (O.5b) séparément. On aimerait pouvoir le faire globalement, ce qui va être possible grâce à l'usage des distributions !

O.2. Équations donnant la déformée

Les équations (1.58), (1.59) et (1.60) de [Bas11c] donnent l'équation différentielle donnant la déformée v de la poutre, en négligeant les effets dus aux efforts tranchants et qui donnent, compte tenu de (O.6) :

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{EI}, \text{ en tout point } x, \tag{O.7a}$$

$$\frac{d^3v(x)}{dx^3}(x) = -\frac{T(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \text{ ,} \tag{O.7b}$$

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}(x) = \frac{p(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle.} \tag{O.7c}$$

L'inconvénient de ces équations est manifeste : il nous faut traiter séparément les différentes partions de poutres, comme dans l'exemple 1.16 p. 19 de [Bas11c], pour intégrer ces équations et trouver la déformée v de la poutre.

O.3. Poutre encastrée libre

On suppose maintenant que la poutre de longueur L est encastrée à gauche et libre à droite, qu'elle est soumise à une à une densité linéaire verticale p et à des forces ponctuelles verticales $F_k = F_k\vec{j}$ aux points d'abscisses x_k.

Les équations précédentes deviennent donc

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{EI}, \text{ en tout point } x, \tag{O.8a}$$

$$\frac{d^3v(x)}{dx^3}(x) = -\frac{T(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \ , \tag{O.8b}$$

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}(x) = \frac{p(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \neq x_k, \tag{O.8c}$$

auquelles on rajoute les conditions aux limites : l'encastrement à gauche implique

$$v(0) = 0, \tag{O.9a}$$

$$v'(0) = 0, \tag{O.9b}$$

tandis que la nullité des efforts appliqués à droite donnent

$$v^{(2)}(L) = 0, \tag{O.9c}$$

$$v^{(3)}(L) = 0. \tag{O.9d}$$

Constatons que compte tenu de (O.8), si la densité p est continue et si les forces verticales appliquées sont nulles :

$$v \text{ est de classe } C^4 \text{ sur } [0, T], \tag{O.10a}$$

$$T \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } [0, T], \tag{O.10b}$$

$$M \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [0, T]. \tag{O.10c}$$

Si les forces verticales ponctuelles sont non nulles et que p est continue, on a alors une perte de régularité aux points x_k

$$v \text{ est de classe } C^4 \text{ par morceaux sur } [0, T], \text{ mais pas } C^3 \text{ aux } x_k \tag{O.11a}$$

$$T \text{ est de classe } C^3 \text{ par morceaux sur } [0, T], \text{ mais pas } C^1 \text{ aux } x_k \tag{O.11b}$$

$$M \text{ est de classe } C^2 \text{ par morceaux sur } [0, T], \text{ mais pas } C^2 \text{ aux } x_k \tag{O.11c}$$

mais que néanmoins

$$v \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [0, T], \tag{O.12a}$$

$$T \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, T], \tag{O.12b}$$

$$M \text{ est de classe } C^0 \text{ sur } [0, T]. \tag{O.12c}$$

Remarque O.5. Si la fonction p est discontinue (par exemple en escalier), alors il faudra remplacer (O.5a) par

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle et où } p \text{ est continue}, \tag{O.13}$$

et (O.7c) par

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}(x) = \frac{p(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle et où } p \text{ est continue.} \tag{O.14}$$

On aura alors encore une perte de régularité par rapport à (O.11) et (O.12) aux points de discontinuité de p.

O.4. Retour sur les équations au sens des distributions

Voir section 8.5.2.1 page 151 de la version longue.

Annexe P

Rappels sur les différents modes de convergence de fonctions

On pourra consulter, pour plus de détail, [RDO87, chapitre 2].

On se donne un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Pour les définitions P.2 et P.3, on peut considérer des fonctions.

DÉFINITION P.1. On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ tend simplement vers f si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

DÉFINITION P.2. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ tend presque partout vers f et on note $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur I si et seulement si l'ensemble des points où $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini a un complémentaire négligeable (voir définition Q.2 page suivante).

DÉFINITION P.3. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ tend vers la fonction f dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si $\int_\Omega |f(x) - f_n(x)|dx$ (au sens de Lebesgue, voir annexe R) tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Notons que $\int_\Omega |f(x) - f_n(x)|dx \to 0$ implique $\int_\Omega f_n(x)dx$ tend $\int_\Omega f(x)dx$ quand n tend vers l'infini.

DÉFINITION P.4. On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ tend uniformément vers l'application f de I dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, $\max_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Notons que la convergence uniforme entraîne (si Ω est borné), la convergence dans $L^1(\Omega)$. La convergence uniforme entraîne convergence simple. La convergence presque partout adjointe à la convergence dominée (voir théorème Q.3 page suivante) entraîne la convergence dans $L^1(\Omega)$.

THÉORÈME P.5. *On suppose que les fonctions f_n sont de classe C^1 et que la suite des fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une application g (qui est nécessairement continue). S'il existe $t_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(t_0))_n$ admette une limite l, alors la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers l'application f définie par $f(t) = l + \int_{t_0}^t g(u)du$.*

Annexe Q

Rappels sur l'intégration

Pour toute la suite, on suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que toutes les fonctions sont définies de Ω vers $\mathbb{R}$. Les notions présentées dans cette annexe peuvent être étendues au cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et/ou au cas les fonctions sont définies de Ω vers $\mathbb{R}^p$.

Q.1. Intégration de Riemann

En cours de rédaction pour l'année 2019-2020

Q.2. Intégration de Lebesgue

En cours de rédaction pour l'année 2019-2020

La notion d'intégrale que vous avez probablement d'abord apprise est celle de Riemann. On renvoie par exemple à [RDO79]. La notion d'intégrale de Lebesgue est plus riche [1] puisqu'elle exige moins de régularité sur les fonctions à intégrer. On consultera les références données au début de cette annexe pour plus de détails.

Rappelons seulement qu'une fonction f est intégrable, au sens de Lebesgue, si et seulement si elle est mesurable [2] et si $|f|$ est intégrable (soit $\int_\Omega |f(x)|dx < +\infty$).

Définition Q.1. On appelle $L^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur Ω.

Définition Q.2. Une propriété $\mathcal{P}(t)$ est dite avoir lieu presque partout sur Ω si l'ensemble des éléments de Ω où elle est vraie a un complémentaire « négligeable », c'est-à-dire, de mesure nulle (voir la section 4 de [Mal82]). On notera

$$\mathcal{P}(t), \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

En particulier, deux fonctions seront dites presque partout égales. On peut donc modifier la valeur d'une fonction sur un ensemble négligeable de points, par exemple sur un ensemble au plus dénombrable de points.

Rappelons le résultat essentiel de l'intégrale de Lebesgue :

Théorème Q.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir Théorème IV.2 de [Bre83])). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

(1) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.,

(2) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω [3].

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$, ce qui implique que $\int_\Omega f_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx$.

1. Sauf pour certaines intégrales impropres de Riemann convergentes, mais non absolument convergentes, comme $\int_0^\infty \sin x/x dx$ qui n'est pas Lebesgue intégrable !

2. C'est-à-dire, « assez régulière » ; par exemple la limite d'une suite de fonctions en escalier est mesurable ; une fonction continue, sauf en sur un ensemble au plus dénombrable est mesurable.

3. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions f_n.

Annexe R

Rappels les espaces de fonctions

On consultera par exemple [BBL12, annexe A]. [Bre83, chap. IV et VII], [RT92, sections 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 1.6] [GW03, leçons 13 à 15] ou [Bal91, chapitre 6].

Pour toute la suite, on suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que toutes les fonctions sont définies de Ω vers $\mathbb{R}$. Les notions présentées dans cette annexe peuvent être étendues au cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et/ou au cas les fonctions sont définies de Ω vers $\mathbb{R}^p$.

R.1. Espaces de fonctions

On généralise la définition Q.1 :

Définition R.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p},$$

qui définit une norme.

Définition R.2. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C\,;\, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

qui définit une norme.

On utilisera très souvent le cas $p = 2$.

On considère aussi la définition suivante (utile quand $\Omega = \mathbb{R}$ seulement) :

Définition R.3. On dit que f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si et seulement si pour tout ouvert borné ω de Ω, $f|_\omega$ appartient à $L^1(\omega)$.

R.2. Espaces de Sobolev

Une fonction de $L^2(\Omega$ peut être considérée comme une distribution. On a donc la définition suivante :

Définition R.4. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega),\, v' \in L^2(\Omega)\right\}. \tag{R.1}$$

Notons aussi que l'on a

Théorème R.5 (Théorème VIII.2 de [Bre83]). *Soit Ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, il existe $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ telle que*

$$u = \tilde{u}, \text{ p.p. sur } \Omega, \tag{R.2a}$$

$$\forall x, y \in \Omega, \quad \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y \tilde{u}'(s)ds \tag{R.2b}$$

On parle alors de représentant continu : on note alors u à la place de $\tilde{u}$ et les égalités p.p. deviennent vraies partout. On en déduit donc que

$$H^1(\Omega) \subset C^0\left(\overline{\Omega}\right). \tag{R.3}$$

On définit de même $H^m(\Omega)$ l'espace des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$.

Grâce au théorème R.5, on peut donc aussi donner la définitions suivante :

Définition R.6. Dans le cas où $\Omega =]a, b[$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, on note

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega),\, v(a) = v(b) = 0.\right\}. \tag{R.4}$$

Rappelons que si E est un espace vectoriel normé notée $\|.\|$ et muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$ (voir par exmple [BBL12, annexe A]), on a

Théorème R.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \tag{R.5}$$

Annexe S

Formulation variationnelle abstraite

Donnons dans cette annexe, quelques résultats théoriques utilisés, entre autres, dans la section 8.5 de la version longue. On pourra consulter pour plus de détails [RT92, section 2.2 ou 3.1].

Toutes les formulations variationnelles de la section 8.5 de la version longue rentrent en fait dans le cadre du théorème suivant

LEMME S.1 (Lemme de Lax-Milgram). *Soit V un espace de Hilbert*[1] *muni de la norme $\|\|$. On se donne :*

— *une forme bilinéaire $(u,v) \mapsto a(u,v)$ continue sur $V \times V$, c'est-à-dire il existe une constante M telle que*

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\| . \tag{S.2}$$

On suppose de plus que a est-V elliptique (ou coercive) : il existe une constante α telle que

$$\forall u \in V, \quad |a(u,u)| \geq \alpha \|u\|^2. \tag{S.3}$$

— *Une forme linéaire $v \mapsto L(v)$ continue sur V, c'est-à-dire il existe une constante m telle que*

$$\forall v \in V, \quad |L(v)| \leq m \|v\| . \tag{S.4}$$

Il existe une unique solution u du problème variationnel général suivant : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = L(v). \tag{S.5}$$

Enfin, la solution de (S.5) *est continue par rapport à la donnée L, c'est-à-dire,*

$$\textit{l'application } L \mapsto u \textit{ est continue de } V' \textit{ dans } V. \tag{S.6}$$

DÉMONSTRATION. Voir [RT92, Théorème 2.2.1, p. 37] ou [Bre83, Corollaire V.8]. □

Il est intéressant de constater que ce problème revient aussi à minimiser une fonctionnelle, qui, dans le cadre mécanique, n'est rien d'autre que l'énergie totale du système ! En effet, une autre vision du lemme S.1 est la suivante :

LEMME S.2 (Minimisation d'énergie). *Sous les hypothèses du lemme S.1 et si on suppose de plus que a est symétrique, l'unique solution u de* (S.5) *est aussi l'unique solution de*

$$\Phi(u) = \min_{v \in V} \Phi(v), \tag{S.7}$$

où

$$\forall v \in V, \quad \Phi(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v). \tag{S.8}$$

DÉMONSTRATION. Voir [Bre83, Corollaire V.8]. □

1. C'est-à-dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est complet. La complétude signifie que toute suite de Cauchy, c'est-à-dire, vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \geq N, \quad \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon, \tag{S.1}$$

admet une limite.

Notons aussi qu'une approximation peut être obtenue de façon suivante : on se donne un sous-espace de dimension finie V_h de V, dépendant d'un paramètre h tendant vers zéro. La dimension de cet espace V_h, approximation de l'espace V, de dimension infinie, tend vers l'infini quand h tend vers zéro.

Au problème (S.5), on associe le problème approché suivant : trouver $v_h \in V_h$ solution de

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h), \tag{S.9}$$

qui admet une unique solution, comme cas particulier du problème (S.5). En fait (voir preuve de [RT92, Théorème 3.1.1, p. 59]), ce problème est équivalent à un système linéaire dont la matrice est symétrique définie positive. Dans le cas où a est bilinéaire, on peut munir V du produit scalaire

$$\forall u \in V, \quad \langle u, v \rangle_a = a(u, v), \tag{S.10}$$

qui définit aussi une structure Hilbertienne. De (S.5) et (S.9), on déduit que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0$$

soit encore

$$\forall v_h \in V_h, \quad \langle u - u_h, v_h \rangle_a = 0. \tag{S.11}$$

Ainsi, $u - u_h$ est perpendiculaire à tout élément de V_h et donc u_h apparaît donc comme la projection orthogonale (pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle_a$) de u sur u_h. Qaund h tend vers 0, cette projection tend vers u et donc u_h tend bien vers u. Voir la figure 8.5 page 150 de la version longue.

Donnons un petit lemme qui sera utilisé en TD :

Lemme S.3. *On se place sous les hypothèses du lemme S.1 et on suppose que l'on se donne une suite d'applications linéaires continues* (L_n) *vérifiant donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m_n \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad |L_n(v)| \leq m_n \|v\|. \tag{S.12}$$

On suppose que cette suite vérifie : il existe L *une application linéaire continue et une suite de réel positifs* $(b_n)_n$ *tendant vers zéro telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m_n \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad |L_n(v) - L(v)| \leq b_n \|v\|. \tag{S.13}$$

On définit la suite des solutions $(u_n)_n$ *des problèmes : trouver* $u_n \in V$ *tel que*

$$\forall v \in V, \quad a(u_n, v) = L_n(v). \tag{S.14}$$

Alors la suite $(u_n)_n$ *converge vers un élément* u *de* V *vérifiant* (S.5).

Démonstration. On peut successivement écrire : pour tout couple d'entiers (n, p)

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_p\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha} |a(u_n - u_p, u_n - u_p)|, \\
&= \frac{1}{\alpha} |(a(u_n, u_n - u_p) - a(u_p, u_n - u_p)||, \\
&= \frac{1}{\alpha} |L_n(u_n - u_p) - L_p(u_n - u_p)|, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} (|L_n(u_n - u_p) - L(u_n - u_p)| + |L(u_n - u_p) - L_p(u_n - u_p)|), \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left(b_n \|u_n - u_p\| + b_p \|u_n - u_p\|\right), \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left(\max(b_p, b_n) \|u_n - u_p\|\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_n - u_p\| \leq \frac{1}{\alpha} \max(b_p, b_n).$$

Comme la suite $(b_n)_n$ tend vers zéro, on sait que pour tout ε, il existe N tel que $\forall n, p \geq N$, $\max(b_p, b_n) \leq \varepsilon$, ce qui implique que la suite $(u_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy (S.1) et donc qu'elle converge vers $u \in V$.

Soit $v \in V$ D'après l'aspect continue de a, on a

$$\lim_{n \to +\infty} a(u_n, v) = a(u, v). \tag{S.15}$$

D'autre part, d'après (S.13),

$$\lim_{n \to +\infty} L_n(v) = L(v). \tag{S.16}$$

D'après (S.15) et (S.16), on peut donc passer à la limite $n \to +\infty$ dans (S.14), à v fixé, ce qui montre que u est solution de (S.5). $\square$

Annexe T

Rappel sur les hyperplans

Proposition T.1. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On a l'équivalence entre les trois assertions suivantes :*

i) Il existe une droite vectorielle D telle que $F \oplus D = E$.

ii) F est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

iii) En dimension finie, $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

Démonstration. On pourra retrouver cette preuve dans [RDO93, p. 304-305].

— Montrons que i) implique ii).

Supposons qu'il existe donc $x \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$F \oplus \mathbb{R}x = E.$$

Soit μ, un réel non nul. On définit l'unique forme linéaire ϕ sur E telle que

$$\phi_{|F} = 0,$$
$$\phi_{|\mathbb{R}x} = \mu I.$$

ϕ est non nulle car $\phi(x) = \mu \neq 0$.

Montrons que $F = \ker \phi$. il est clair que par définition, si y est dans F, $\phi(y)$ est nul. Réciproquement, soit y tel que $\phi(y) = 0$. On sait par hypothèse qu'il existe (un unique) couple $(z, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$ tel que

$$y = z + \lambda x.$$

On a donc

$$0 = \phi(y) = \phi(z) + \lambda\phi(x) = 0 + \lambda\mu = \lambda\mu,$$

puisque ϕ est nulle sur F. On a donc, $\lambda = 0$ et donc $y \in F$.

— Montrons que ii) implique i). Soit donc ϕ une forme linéaire non nulle telle que $F = \ker \phi$. Puisque ϕ est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) \neq 0$.

Remarque T.2. Cette preuve est en fait vraie pour tout $x \in E \setminus \ker \phi$.

Montrons que

$$F \oplus \mathbb{R}x = E,$$

c'est-à-dire que

$$\forall y \in E, \quad \exists!(z, \lambda) \in F \times \mathbb{R}, \quad y = z + \lambda x.$$

— Unicité (ou analyse).

Si l'équation est vérifiée, on a alors, puisque $z \in F = \ker \phi$,

$$\phi(y) = \phi(z) + \lambda\phi(x) = \lambda\phi(x),$$

et donc nécessairement, puisque $\phi(x) \neq 0$,

$$\lambda = \frac{\phi(y)}{\phi(x)},$$
$$z = y - \frac{\phi(y)}{\phi(x)}x.$$

— Existence (ou synthèse)
Considérons, pour y donné, λ et z définis par les deux équations ci-dessus, qui ont un sens car $\phi(x) \neq 0$. On a bien $z + \lambda x = y$ et

$$\phi(z) = \phi(y) - \frac{\phi(y)}{\phi(x)}\phi(x) = 0,$$

et donc $z \in F = \ker \phi$.

— L'équivalence entre iii) et (i) et (ii)) est laissée au lecteur.

□

REMARQUE T.3. Il existe aussi une caractérisation par la codimension, égale à 1, non évoquée ici, puisqu'hors programme. Voir [RDO93, p. 304-305].

On adopte alors la définition suivante :

DÉFINITION T.4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F verifie l'une des trois conditions de la proposition ci-dessus, on l'appelle un hyperplan.

Annexe U

Intégration de distributions

Cette annexe est issue de [Lam08, Section 6.4.1 : Primitive d'une distribution].

Pour toute la suite, $\Omega =]a, b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, où

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty. \tag{U.1}$$

Pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$, puisque ϕ est à support compact, il existe un intervalle $[A, B] \subset]a, b[$ tel que

$$\phi \text{ est nulle sur }]a, A] \text{ et sur } [B, b[, \tag{U.2}$$

et les intégrales suivantes existent

$$\int_a^b \phi(t)dt \text{ et, pour tout } x \in \overline{\Omega}, \int_a^x \phi(t)dt. \tag{U.3}$$

Définition U.1. On dit que $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une primitive de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $S' = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple U.2. Si $I = \mathbb{R}$, une primitive de la distribution δ est H, la fonction de Heaviside, puisque $H' = \delta$. Nous montrerons plus loin que toutes les primitives différent à une constante additive près.

Exemple U.3. Si $I = \mathbb{R}$, une primitive de la distribution-fonction signe est la fonction $|.|$. Nous montrerons plus loin que toutes les primitives différent à une constante additive près.

Exemple U.4. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, une primitive de la distribution-fonction f est donnée par g où, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in I$,

$$g(t) = \int_{x_0}^t f(x)dx.$$

Nous montrerons plus loin que toutes les primitives différent à une constante additive près.

On pourrait, de façon générale, penser à la définition suivante : si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle S, \phi \rangle = -\langle T, \psi \rangle, \text{ où } \psi \text{ est une primitive de } \phi, \tag{U.4}$$

de telle sorte que $S' = T$ puisque

$$\langle S', \psi \rangle = -\langle S, \psi' \rangle = -\langle S, \phi \rangle = \langle T, \psi \rangle. \tag{U.5}$$

Le problème est qu'une primitive ψ de ϕ est bien de classe C^∞ mais son support n'est pas nécessairement borné. En effet, d'après (U.2), il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]a, A], \quad \psi(x) = C. \tag{U.6}$$

On écrit ensuite

$$\psi(B) = \psi(A) + \int_A^B \psi'(t)dt = C + \int_A^B \phi(t)dt,$$

et donc

$$\phi(B) = C + \int_A^B \phi(t)dt,$$

et donc, de nouveau d'après (U.2),

$$\forall x \in [B, b[, \quad \psi(x) = C + \int_A^B \phi(t)dt, \tag{U.7}$$

Quel que soit la valeur de C, si $\int_A^B \phi(t)dt \neq 0$, ce qui est possible, il n'est pas possible, d'après (U.6) et (U.7), que ψ simultanément nulle sur $]a, A[$ et $[B, b[$. Donc, le support de ψ n'est pas borné.

On a tout d'abord

Théorème U.5.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

(1) T admet une primitive S_0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$;

(2) T admet une infinité de primitives et deux primitives quelconques U et V de T vérifient $U - V = c$, où c est une constante.

La preuve se fait en plusieurs étapes.

(1)

Lemme U.6.
On définit l'ensemble H par

$$H = \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \exists \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \psi' = \phi\}. \tag{U.8}$$

Alors H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$ caractérisé par

$$\phi \in H \Longleftrightarrow \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ \text{ et } \int_a^b \phi(t)dt = 0. \tag{U.9}$$

Démonstration.
Démontrons tout d'abord l'équivalence de (U.8) et de (U.9). Si $\phi \in H$ donné par (U.8) on a

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b \psi'(t)dt = \psi(b) - \psi(a) = 0,$$

et donc (U.9) est vérifié. Réciproquement, si (U.9) est vérifié, on considère la fonction ψ définie par

$$\forall t \in \Omega, \quad \psi(t) = \int_a^t \phi(x)dx,$$

qui est bien définie, clairement de classe C^∞. On a bien $\psi' = \phi$. Enfin, ϕ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$; effet, le support de ψ est borné comme le montre (U.6) et (U.7), où par construction $C = 0$ et donc ψ est nulle sur $]a, A[$ et ψ est constante sur $]B, b[$, cette constante valant, par construction :

$$\int_A^B \phi(t)dt = \int_a^b \phi(t)dt = 0.$$

Enfin, l'application F qui à ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ associe $F(\phi)$ défini par

$$\forall \phi, \quad F(\phi) = \int_a^b \phi, \tag{U.10}$$

est une forme linéaire, dont le noyau H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$. □

Rappelons aussi que, grâce à l'exemple 6.7 page 68, on peut définir une fonction $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\int_a^b \phi_0(t)dt = 1. \tag{U.11}$$

Lemme U.7.

Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe un unique $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ tel que

$$\phi = \lambda_\phi \phi_0 + u_\phi, \tag{U.12}$$

ce qui revient à écrire que

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathbb{R}\phi_0 \oplus H. \tag{U.13}$$

Démonstration.

Deux méthodes sont possibles pour démontrer ce lemme. La première se fait à la main, la seconde est une simple réutilisation de la généralisation de ce lemme en utilisant l'annexe T page 262.

(a) On raisonne de façon classique en montrant l'unicité puis l'existence du couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ vérifiant (U.12).

Supposons donc tout d'abord qu'il existe un couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ vérifiant (U.12). On a donc, par intégration

$$\int_a^b \phi = \lambda_\phi \int_a^b \phi_0 + \int_a^b u_\phi,$$

et puisque $u\phi$ appartient à H on a $\int_a^b u_\phi = 0$. D'après (U.11), on a donc nécessairement

$$\lambda_\phi = \int_a^b \phi, \tag{U.14}$$

puis

$$u_\phi = \phi - \lambda_\phi \phi_0. \tag{U.15}$$

Le couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ est donc unique.

Réciproquement, soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Définissons le couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ par (U.14) et (U.15). Par définition, (U.12) est vérifié. Il ne reste plus qu'à montrer que u_ϕ est dans H. Il est clair que u_ϕ est de classe C^∞. Enfin, u_ϕ est dans H puisque d'après (U.11), on a

$$\int_a^b \phi = \int_a^b \phi - \lambda_\phi \int_a^b \phi_0 = \int_a^b \phi - \lambda_\phi \int_a^b \phi_0 = \int_a^b \phi - \lambda_\phi,$$

qui est nul par définition.

(b) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{D}(\Omega)$. D'après la fin de la preuve du lemme U.6, l'application F de E dans $\mathbb{R}$, définie par (U.10), est une forme linéaire dont le noyau est H. F est non nulle d'après (U.11). Ainsi, le résultat (U.13) est une simple application de l'annexe T, dont la preuve fournit l'expression de λ donnée par (U.14).

□

(2) On donne enfin la définition suivante :

Définition U.8. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit ψ_ϕ par

$$\forall x \in \Omega, \quad \psi_\phi(x) = \int_a^x u_\phi(t)dt, \tag{U.16}$$

où u_ϕ est donnée par le lemme U.7. Puisque u_ϕ est dans H, on a

$$\int_a^b u_\phi(t) = 0.$$

On a donc, cette fois-ci, contrairement à ce qui se passait dans l'essai de définition (U.4),

$$\psi_\phi \text{ est nulle sur }]a, A] \cup [B, b[.$$

et donc dans la définition U.8,

$$\psi_\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \psi'_\phi = u_\phi. \tag{U.17}$$

(3) On est donc en mesure, maintenant de démontrer le théorème U.5.

Preuve du théorème U.5. (a) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit S_0 par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle S_0, \phi\rangle = -\langle T, \psi_\phi\rangle, \tag{U.18}$$

où $\psi_\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est donnée par la définition U.8. Puisque $\psi_\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le nombre $\langle T, \psi_\phi\rangle$ existe bien. Par linéarité de $\phi \mapsto \psi_\phi$, il est clair que $\phi \mapsto -\langle T, \psi_\phi\rangle$ est linéaire.
Il reste à vérifier que, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $S'_0 = T$ ce qui est vrai car, pour tout fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle S'_0, \phi\rangle = -\langle S_0, \phi'\rangle,$$

et donc par définition

$$\langle S'_0, \phi\rangle = \langle T, \psi_{\phi'}\rangle. \tag{U.19}$$

D'après la définition (U.16), on a, pour tout x :

$$\begin{aligned}
\psi_{\phi'}(x) &= \int_a^x u_{\phi'}(t)dt,\\
&= \int_a^x (\phi'(t) - \lambda_{\phi'}\phi_0(t))\, dt,\\
&= \phi(x) - \int_a^x \phi_0(t)dt \int_a^b \phi'(t)dt,\\
&= \phi(x) - \int_a^x \phi_0(t)dt\, (\phi(b) - \phi(a)),\\
&= \phi(x),
\end{aligned}$$

et donc, d'après (U.19)

$$\langle S'_0, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle,$$

et donc S_0 est une primitive de T.

(b) Soit S une autre primitive de T et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a successivement

$$\begin{aligned}
\langle S, \phi\rangle &= \langle S, \lambda_\phi\phi_0 + u_\phi\rangle,\\
&= \lambda_\phi\langle S, \phi_0\rangle + \langle S, u_\phi\rangle,\\
&= \lambda_\phi\langle S, \phi_0\rangle + \left\langle S, \psi'_\phi\right\rangle,\\
&= \lambda_\phi\langle S, \phi_0\rangle - \langle S', \psi_\phi\rangle,\\
&= \lambda_\phi\langle S, \phi_0\rangle - \langle T, \psi_\phi\rangle,\\
&= \lambda_\phi\langle S, \phi_0\rangle - \langle S_0, \psi_\phi\rangle,
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\langle S - S_0, \phi\rangle &= \lambda_\phi\langle S, \phi_0\rangle,\\
&= \int_a^b \phi(t)dt\langle S, \phi_0\rangle,\\
&= \int_a^b c\phi(t)dt,
\end{aligned}$$

où la constante c est définie par

$$c = \langle S, \phi_0\rangle.$$

Bref, on a

$$\langle S - S_0, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle .$$

et donc

$$S - S_0 = c, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) .$$

□

REMARQUE U.9. Si on change de fonction ϕ_0, le lecteur vérifiera que S_0 est modifiée à une constante additive près, ce qui est conforme au deuxième point du théorème U.5.

EXEMPLE U.10. Si $\Omega = \mathbb{R}$, grâce au théorème U.5, et notamment la définition (U.18), de S_0, on peut retrouver l'exemple (U.2). En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle S_0, \phi \rangle &= -\langle \delta, \psi_\phi \rangle, \\ &= -\psi_\phi(0), \\ &= -\int_{-\infty}^{0} u_\phi(t)dt,\end{aligned}$$

et puisque $u_\phi \in H$:

$$\begin{aligned}&= \int_{0}^{+\infty} u_\phi(t)dt, \\ &= \int_{0}^{+\infty} \phi(t)dt - \lambda_\phi \int_{0}^{+\infty} \phi_0(t)dt, \\ &= \int_{0}^{+\infty} \phi(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \int_{0}^{+\infty} \phi_0(t)dt,\end{aligned}$$

et en notant la constante indépendante de ϕ :

$$c = \int_{0}^{+\infty} \phi_0(t)dt,$$

on a donc

$$\begin{aligned}\langle S_0, \phi \rangle &= \int_{0}^{+\infty} \phi(t)dt - c \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\phi(t)dt - c \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt, \\ &= \langle H - c, \phi \rangle,\end{aligned}$$

et donc les primitives de δ sont

$$S_0 = H - c.$$

Grâce au corollaire suivant, on peut retrouver les exemples U.3 et U.4 .

COROLLAIRE U.11. *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, les primitives de la distribution-fonction f sont les primitives de la fonction f.*

DÉMONSTRATION. En effet, on sait qu'une primitive F de f est donnée par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

On a $F' = f$ au sens des fonctions et des distributions. Les autres primitives diffèrent de celle-là à une constante près.

□

Corollaire U.12. *Si T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont la dérivée est nulle, alors T est une fonction constante.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème U.5 et le corollaire U.11. □

Annexe V

Quelques calculs explicites de sommes de Séries

Cette annexe est totalement hors programme. La section V.5 est une application directe de la théorie des fonctions holomorphes et pourra être lue, indépendamment des autres sections.

La conclusion que l'on pourra retenir de cette annexe est la supériorité du calcul par la méthode du théorème des résidus sur les autres méthodes !

V.1. Introduction

On cherche à calculer de façon explicite quelques sommes de séries du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)},$$

où P et Q sont des polynômes, de différentes façons :

— par un calcul direct, en utilisant les séries entières (section V.2) ;

— en utilisant les nombres et les polynômes de Bernoulli (section V.3) ;

— en utilisant les distributions périodiques (section V.4) ;

— grâce au théorème des résidus (section V.5) ;

— grâce à des logiciels de calcul formel (section V.6).

V.2. Calcul par les séries entières

Donnons un exemple de calcul de somme de série en utilisant les séries entières.

On a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln(2).} \tag{V.1}$$

Ce résultat est en fait un cas particulier donné par (D.9).

Démonstration de (V.1). Pour démontrer ce résultat, on utilise la série entière

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-)^{n-1}}{n} x^n$$

dont on vérifie que le rayon de convergence est égal à un. Par dérivation, on a, à l'intérieur du disque unité (où S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dérivable terme à terme)

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Cette dernière série est égale à la série géométrique, de raison $-x$; ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1 \Longrightarrow S'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Par intégration, il vient donc, compte tenu de $S(0)=0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|<1 \Longrightarrow S(x)=\ln(x+1). \tag{V.2}$$

D'après le cours, on a aussi

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-, \quad |z|<1 \Longrightarrow S(z)=\operatorname{Ln}(z+1). \tag{V.3}$$

On en déduit donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|<1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(x+1).} \tag{V.4}$$

Formellement, on a donc, en choisissant $x=1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln(2). \tag{V.5}$$

Cette égalité n'est pas justifiée *a priori* car (V.4) n'est pas valable pour $x=1$, puisque le rayon de convergence est égal à 1.

Pour démontrer rigoureusement (V.1), nous ne pouvons utiliser la propriété de convergence normale de la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ qui n'est pas absolument convergente en $x=1$. Néanmons, nous allons tout de même pouvoir majorer uniformément son reste en x.

Pour $x\in[0,1[$, on sait qu'on peut majorer le reste à l'ordre N de série alternée de $\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ par la valeur absolue du premier terme dominé :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1[, \quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| = \frac{x^N}{N+1},$$

ce que l'on peut majorer de façon uniforme en x :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1[, \quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| \leq \frac{1}{N+1}. \tag{V.6}$$

De même, pour la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on a

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| \leq \frac{1}{N+1}. \tag{V.7}$$

On peut conclure de deux façons différentes.

(1) De façon manuelle, on écrit, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[0,1[$ (auquel on peut appliquer (V.4)) par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\ln(2)\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| + \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\ln(2)\right|, \\
&\leq \left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| + |\ln(x+1)-\ln(2)|, \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left|(1-x^n)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| + |\ln(x+1)-\ln(2)|,
\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\ln(2)\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left|(1-x^n)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| + \left|\ln(x+1)-\ln(2)\right|. \quad \text{(V.8)}$$

Majorons chacun des quatre termes de l'inégalité (V.8). Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $x \mapsto \ln(x+1)$ au voisinage de 1 à gauche

$$\exists \eta_1 > 0, \quad \forall x \in [1-\eta_1, 1[, \quad \left|\ln(1-x)-\ln(2)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad \text{(V.9)}$$

Si x appartient à $[0,1[$, les deux restes de l'inégalité (V.8) sont majorés en utilisant (V.6) et (V.7) : on choisit N tel que

$$\frac{2}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad \text{(V.10)}$$

et donc

$$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \leq \frac{\varepsilon}{6}, \quad \text{(V.11)}$$

et

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad \text{(V.12)}$$

Cet entier N étant choisi, on constate que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n}\left|1-(x)^n\right|$ pour $n \in \{1,...,N\}$ sont continues au voisinage de 1 à gauche ; d'où

$$\exists \eta_2 > 0, \quad \forall x \in [1-\eta_2, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left|1-(x)^n\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad \text{(V.13)}$$

Ainsi, compte tenu de (V.9), (V.11), (V.12) et de (V.13), (on l'on prend N défini par (V.10) et $x \in [1-\min(\eta_1,\eta_2), 1[$ où η_1 et η_2 sont définis par (V.9) et (V.13)), il vient :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\ln(2)\right| \leq \varepsilon.$$

Cette égalité, vraie pour tout $\varepsilon > 0$, implique (V.1).

(2) De façon beaucoup plus rapide, on écrit (V.6) et (V.7) sous la forme suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right| \leq \frac{1}{N+1}. \quad \text{(V.14)}$$

Ainsi, le reste de la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ tend vers zéro uniformément sur l'intervalle $[0,1]$. La convergence uniforme entraîne donc la continuité de la somme. Par passage à la la limite $x \to 1$ dans (V.4), on obtient donc le résultat escompté, d'après la continuité du logarithme au voisinage de 2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(1+1),$$

et donc finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \quad \text{(V.15)}$$

□

V.3. Calcul par les nombres et les polynômes de Bernoulli

Cette section correspond à la correction de l'exercice 26 de la page 146 de [AF89, section IV. 3]. Dans la section V.3.1, nous donnons les définitions des nombres et des polynômes de Bernoulli et leurs propriétés élémentaires. Après avoir donné quelques propriétés sur ces polynômes dans la section V.3.2, nous constaterons, dans la section V.3.3, que les polynômes de Bernoulli admettent des développements en série de Fourier particulièrement simples. On appliquera cela, dans la section V.3.4, au calcul des séries harmoniques d'ordre pair.

V.3.1. Définition des nombres et des polynômes de Bernoulli

Définition V.1. Pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$f(t,z) = \frac{te^{tz}}{e^t - 1},$$

et par convention

$$f(0,z) = 1.$$

Ainsi, la fonction f est correctement définie et on a la

Proposition V.2. *Il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \Longrightarrow f(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(z). \tag{V.16}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est à coefficients rationnels et vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = X^n - \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k. \end{cases} \tag{V.17}$$

Définition V.3. Le polynôme B_n est appelé le n-ième polynôme de Bernoulli.

Démonstration de la proposition V.2. Compte tenu du développement en série entière de l'exponentielle à l'origine, on a, pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}},$$

expression encore valable en $t = 0$. Ainsi, cette expression est développable en série entière en zéro et il existe donc $r > 0$ et une suite (a_n) de complexes telle que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \Longrightarrow \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{V.18}$$

Par ailleurs, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n. \tag{V.19}$$

En multipliant les deux séries entières (V.18) et (V.19), on constate qu'il existe une suite de complexes $(B_n(z))$ vérifiant (V.16). Vu l'unicité du développement en série entière, cette suite est unique.

Vérifions maintenant que les complexes $B_n(z)$ sont des polynômes en z de degré n, à coefficients rationnels et qu'ils vérifient (V.17).

Par définition, on a

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \Longrightarrow \frac{e^t - 1}{t} f(t,z) = e^{tz},$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n \ ;$$

ainsi, d'après la règle de multiplication de deux séries, on a

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(z)}{k!} \frac{1}{(n+1-k)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n \ ;$$

En identifiant les deux séries, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(z)}{k!} \frac{1}{(n+1-k)!} = \frac{z^n}{n!},$$

ce qui implique encore

$$B_n(z) = z^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k(z).$$

On déduit de cette relation, pour $n = 0$ que $B_0 = 1$. De cette relation, on déduit aussi par récurrence sur n que $B_n(z)$ sont des polynômes en z de degré n, à coefficients rationnels et qu'ils vérifient (V.17). □

Donnons un moyen de calcul par récurrence plus agréable d'emploi que (V.17). On pose formellement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = B_n. \tag{V.20}$$

Avec cette convention, on réécrit (V.17) sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B^k - B^{n+1} = (n+1)X^n.$$

Or, avec la convention formelle (V.20), on a

$$(1+B)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B^k.$$

Ainsi, on a la relation de récurrence formelle :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+B)^{n+1} - B^{n+1} = (n+1)X^n. \end{array} \right.} \tag{V.21}$$

Si on y fait successivement $n = 0$, 1, 2, 3 et 4, on obtient

$$B_0 = 1, \tag{V.22}$$

$$B_1 = X - \frac{1}{2}, \tag{V.23}$$

$$B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, \tag{V.24}$$

$$B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X, \tag{V.25}$$

$$B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}. \tag{V.26}$$

Informatiquement, si on veut calculer les polynômes de Bernoulli, on utilisera la formule (V.17). On peut aussi faire un développement limités à l'ordre 4 de :

$$\frac{t}{e^t-1}=\frac{1}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}+\frac{t^4}{120}+o(t^4)}.$$

Après calculs, on a

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{12}-\frac{t^4}{720}+o(t^4).$$

Ainsi,

$$\frac{te^{tz}}{e^t-1}=\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{12}-\frac{t^4}{720}\right)\left(1+tz+\frac{t^2z^2}{2}+\frac{t^3z^3}{6}+\frac{t^4z^4}{24}\right)+o(t^4).$$

Soit, après calculs,

$$\frac{te^{tz}}{e^t-1}=1+t\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{t^2}{2}\left(z^2-z+\frac{1}{6}\right)$$
$$+\frac{t^3}{6}\left(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2}z\right)+\frac{t^4}{24}\left(z^4-2z^3+z^2-\frac{1}{30}\right)+o(t^4).$$

Selon la définition des polynômes de Bernoulli, on a

$$\frac{te^{tz}}{e^t-1}=1+tB_1(z)+\frac{t^2}{2}B_2(z)+\frac{t^3}{6}B_3(z)+\frac{t^4}{24}B_4(z)+o(t^4).$$

En identifiant ces deux dernières expressions, on a retrouve donc les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.

Définition V.4. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=B_n(0)$. Le nombre b_n est appelé le n-ième nombre de Bernoulli.

Proposition V.5. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_{2n+1}=0$.*

Démonstration. Par définition, on a, pour t assez petit en module,

$$\forall t\in\mathbb{C},\quad f(t,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}b_n.$$

Compte tenu des calculs faits sur B_0 et B_1, on a $b_0=1$ et $b_1=-1/2$. Ainsi, on a

$$f(t,0)+\frac{t}{2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}b_n.$$

Or, on a

$$f(t,0)+\frac{t}{2}=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}.$$

Ainsi, on a, pour t assez petit en module,

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}b_n=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}.$$

Le résultat provient de la parité de la fonction du membre de droite de cette dernière égalité. □

Si on applique (V.17) pour $X=0$, on a

$$\begin{cases} b_0=1,\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad b_n=-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^k b_k,\end{cases}$$

c'est-à-dire, en utilisant un formalisme similaire à (V.20),

$$\boxed{\begin{cases} b_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+b)^{n+1} - b^{n+1} = 0. \end{cases}} \tag{V.27}$$

Ainsi, on déduit de la proposition V.5 et de (V.27) les premiers nombres de Bernoulli :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= \frac{1}{2}, \\ b_2 &= \frac{1}{6}, \\ b_3 &= 0, \\ b_4 &= -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

V.3.2. Propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli

Donnons quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite :

Proposition V.6.

$$\forall n \geq 2, \quad B_n(0) = B_n(1), \tag{V.28}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad B_n(1-z) = (-1)^n B_n(z), \tag{V.29}$$

$$\forall n \geq 1, \quad B_n' = nB_{n-1}, \tag{V.30}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad B_{n+1}(z) - B_{n+1}(z-1) = (n+1)(z-1)^n. \tag{V.31}$$

Démonstration. On démontre (V.28) par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est vrai. Soit $n \geq 2$; supposons que (V.28) est vraie pour $k \in \{1, ..., n\}$. D'après (V.17) et l'hypothèse de récurrence, on a successivement

$$\begin{aligned} B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) =& 1 - \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^k B_k(1) + \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^k B_k(0), \\ =& 1 - \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=2}^{n} C_{n+2}^k \left(B_k(1) - B_k(0)\right)\right) - \frac{1}{n+2}C_{n+2}^0 B_0(1) - \frac{1}{n+2}C_{n+2}^1 B_1(1) \\ &+ \frac{1}{n+2}C_{n+2}^0 B_0(0) + \frac{1}{n+2}C_{n+2}^1 B_1(0), \\ =& 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer (V.29), on constate que, par définition

$$\begin{aligned} f(t, 1-z) &= \frac{(-t)e^{(-t)z}}{e^{(-t)} - 1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-1)^n B_n(z) \ ; \end{aligned}$$

or

$$f(t, 1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(1-z) \ ;$$

on conclut en utilisant l'unicité du développement en série entière.

Pour démontrer (V.30), on écrit, la fonction $f(t,z)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à ses deux arguments, pour t assez petit en module et la série étant absolument convergente :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n'(z).$$

par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(t,z) &= \frac{t^2 e^{tz}}{e^t - 1}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n B_{n-1}(z). \end{aligned}$$

On conclut par unicité du développement en série entière.

Pour la démonstration de (V.31), on remarque que

$$f(t,z) - f(t,z-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \left(B_{n+1}(z) - B_{n+1}(z-1) \right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f(t,z) - f(t,z-1) &= \frac{te^{tz}}{e^t-1} - \frac{te^{t(z-1)}}{e^t-1}, \\ &= te^{t(z-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} (n+1)(z-1)^n. \end{aligned}$$

On conclut de nouveau par unicité du développement en série entière. □

On peut tirer de (V.31) une propriété qui permet de calculer les sommes de puissances :

Proposition V.7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{1}{n+1} \left(B_{n+1}(N+1) - b_{n+1} \right).$$

Démonstration. On écrit successivement (V.31) pour $z = 1$, $z = 2$, ... jusqu'à $z = N+1$:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(N) &= (n+1)N^n, \\ B_{n+1}(N) - B_{n+1}(N-1) &= (n+1)(N-1)^n, \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\ B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) &= (n+1)0^n. \end{aligned}$$

En sommant ces $N+1$ équations, on peut conclure. □

Par exemple, si on prend $n = 2$, on retrouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} k^2 &= \frac{1}{3} \left(B_3(N+1) - b_3 \right), \\ &= \frac{1}{3} \left((N+1)^3 - \frac{3}{2}(N+1)^2 + \frac{1}{2}(N+1) \right), \\ &= \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1). \end{aligned}$$

V.3.3. Développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli

DÉFINITION V.8. Pour $n \in \mathbb{N}*$, on note $\overline{B}_n$ le n-ième polynôme de Bernoulli périodisé, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodique et définie par

$$\overline{B}_n(x) = \begin{cases} B_n(x) & \text{si } x \in]0,1[, \\ \\ \dfrac{B_n(0)+B_n(1)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a représenté sur les figures V.1 et V.2 les quatre premiers polynômes de Bernoulli périodisés.

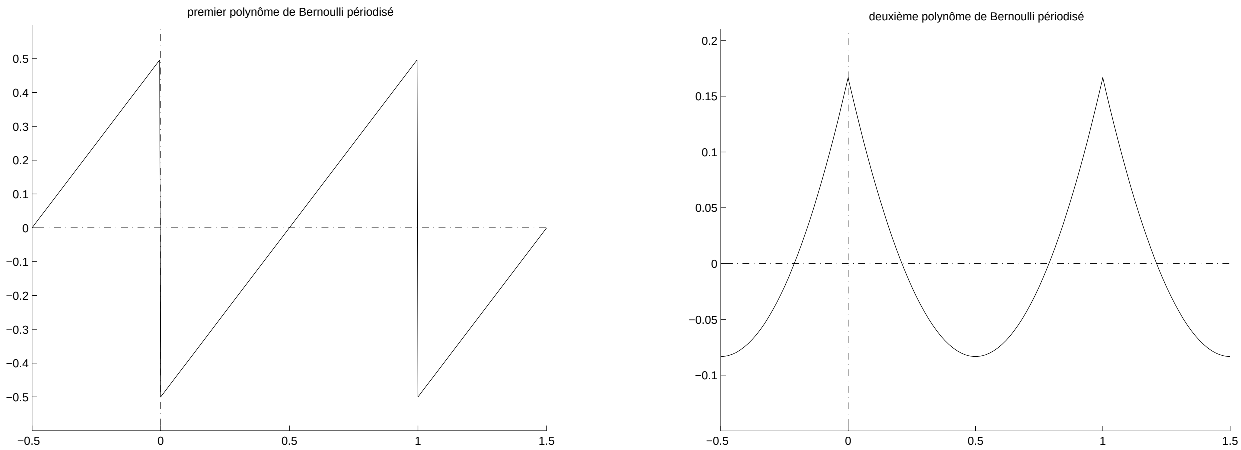


FIGURE V.1. Les polynômes de Bernoulli périodisés $\overline{B}_1$ et $\overline{B}_2$.

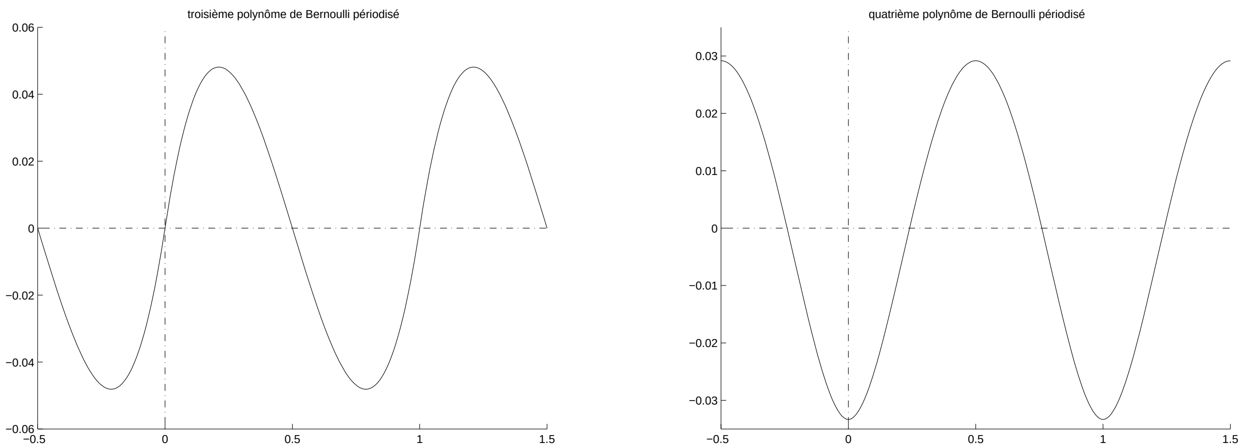


FIGURE V.2. Les polynômes de Bernoulli périodisés $\overline{B}_3$ et $\overline{B}_4$.

On a la propriété de régularité suivante :

PROPOSITION V.9.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{B}_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{B}_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 2$ et est discontinue en tout point entier si $n = 1$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer 1, il suffit de constater que $\overline{B}_{n|]0,1[}$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il est clair que $\overline{B}_1$ est discontinue en zéro car on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} \overline{B}_1(x) = \frac{1}{2},\\
&\lim_{x\to 0^+} \overline{B}_1(x) = -\frac{1}{2},\\
&\overline{B}_1(0) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{B}_1$ est discontinue en tout point entier.

Compte tenu de 1, pour démontrer que $n \geq 2$, $\overline{B}_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de démontrer que, pour tout $k \in \{0,...,n-2\}$, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_n^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_n^{(k)}(1-)$ (ou les valeurs $\overline{B}_n(0+)$ et $\overline{B}_n(1-)$ si $k=0$) existent et sont égales. Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, on peut remarquer que, selon (V.28),

$$\lim_{x\to 0^-} \overline{B}_2(x) = \lim_{x\to 1^-} B_2(x) = B_2(1) = \frac{1}{6}, \tag{V.32}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \overline{B}_2(x) = \lim_{x\to 0^+} B_2(x) = B_2(0) = \frac{1}{6}, \tag{V.33}$$

$$\overline{B}_1(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}. \tag{V.34}$$

Soit $n \geq 2$. On supposons que pour tout $k \in \{0,...,n-2\}$, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_n^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_n^{(k)}(1-)$ (ou les valeurs $\overline{B}_n(0+)$ et $\overline{B}_n(1-)$ si $k=0$) existent et sont égales. Démontrons que cette propriété est vraie à l'ordre $n+1$. Selon (V.28),

$$\lim_{x\to 1^-} \overline{B}_{n+1}(x) = B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0), \tag{V.35}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \overline{B}_{n+1}(x) = B_{n+1}(0), \tag{V.36}$$

$$\overline{B}_1(0) = \frac{1}{2}\left(B_{n+1}(0) + B_{n+1}(1)\right) = B_{n+1}(0). \tag{V.37}$$

Montrons maintenant que pour tout $k \in \{1,...,n-1\}$, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(1-)$ existent et sont égales. On a, selon (V.30),

$$B_{n+1}^{(k)}(0+) = \left(B'_{n+1}\right)^{(k-1)}(0+) = (n+1)(B_n)^{(k-1)}(0+).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, puisque $0 \leq k-1 \leq n$, la dérivée $\overline{B}_n^{(k-1)}(0+)$ existe et vaut $\overline{B}_n^{(k-1)}(1-)$; ainsi, la dérivée $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(0+)$ existe et vaut $(n+1)\overline{B}_n^{(k-1)}(1-)$. Or, selon (V.30),

$$(n+1)\overline{B}_n^{(k-1)}(1-) = (n+1)B_n^{(k-1)}(1-) = B_{n+1}^{(k)}(1-) = \overline{B}_{n+1}^{(k)}(1-).$$

Ainsi, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(1-)$ existent et sont égales. □

Compte tenu de (V.32) et (V.35) on peut remarquer que

$$\forall n \geq 2, \quad \overline{B}_n(0) = B_n(0).$$

Donnons maintenant le principal résultat de cette section : le développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli périodisés :

PROPOSITION V.10. *On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \overline{B}_{2p+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2p+1}}, \tag{V.38}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} \overline{B}_{2p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2p}}. \tag{V.39}$$

DÉMONSTRATION. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le développement en série de Fourier de $\overline{B}_n$ est donné par (V.38) ou (V.39).

Développons tout d'abord $\overline{B}_1$ en série de Fourier. On a, par définition,

$$\forall x \in]0,1[, \quad \overline{B}_1(x) = x - \frac{1}{2} ;$$

cette fonction est impaire et donc les coefficients a_k sont nuls. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_k = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \sin(2k\pi x) dx,$$

et après calculs

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_k = -\frac{1}{k\pi}.$$

D'après la propriété V.9, la fonction $\overline{B}_1$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$; ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} \left(\overline{B}_1(x-) + \overline{B}_1(x+) \right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x),$$

ce qui implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k},$$

ce qui correspond à (V.38) avec $p = 0$. Pour montrer (V.39) avec $p = 1$, on laisse au lecteur le soin d'utiliser un calcul de dérivation, proche de celui qui suit.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que (V.38) ou (V.39) est vérifiée pour $\overline{B}_n$ (selon la parité de n). Calculons $\overline{B}_{n+1}$. D'après la proposition V.9, $\overline{B}_{n+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$; on peut donc écrire, d'après le théorème de Dirichlet, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent les coefficients de Fourier de $\overline{B}_{n+1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}_{n+1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x) + b_k \cos(2k\pi x). \tag{V.40}$$

Remarquons que a_0 est nul ; en effet, selon (V.28) et (V.30), on a successivement,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^1 \overline{B}_{n+1}(t) dt, \\
&= \int_0^1 B_{n+1}(t) dt, \\
&= \int_0^1 \frac{1}{n+2} B'_{n+2}(t) dt, \\
&= \frac{1}{n+2} \left(B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) \right), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, selon (V.40),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x) + b_k \cos(2k\pi x). \tag{V.41}$$

D'autre part, d'après la proposition V.9, $\overline{B}_{n+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$; on peut donc dériver le développement de Fourier de $\overline{B}_{n+1}$ (V.41) terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -2k\pi a_k \sin(2k\pi x) + 2k\pi b_k \cos(2k\pi x),$$

et en particulier,

$$\forall x \in]0,1[, \quad B'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} -2k\pi a_k \sin(2k\pi x) + 2k\pi b_k \cos(2k\pi x).$$

Selon (V.30), on a donc

$$\forall x \in]0,1[, \quad \overline{B}_n(x) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} -k a_k \sin(2k\pi x) + k b_k \cos(2k\pi x). \tag{V.42}$$

Si n est pair, alors $n = 2p$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) et d'après l'hypothèse de récurrence (V.39), on a, en particulier,

$$\forall x \in]0,1[, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} \overline{B}_{2p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2p}}.$$

En identifiant avec (V.42), on a donc, par unicité du développement en série de Fourier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k = 0,$$
$$b_k = \frac{1}{k^{2p+1}} \left((-1)^p 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \right)^{-1}.$$

Ainsi, d'après (V.41), $\overline{B}_{n+1} = \overline{B}_{2p+1}$ obéit bien à (V.38). De même, si $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$, d'après l'hypothèse de récurrence (V.38), on a, en particulier,

$$\forall x \in]0,1[, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \overline{B}_{2p+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2p+1}}.$$

En identifiant avec (V.42), on a donc, par unicité du développement en série de Fourier

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{1}{k^{2p+2}} \left((-1)^p 2^{2p+1} \frac{\pi^{2p+2}}{(2p+2)!} \right)^{-1},$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_k = 0.$$

Ainsi, d'après (V.41), $\overline{B}_{n+1} = \overline{B}_{2p+2}$ obéit bien à (V.39). □

V.3.4. Application : calcul des séries harmoniques d'ordre pair et les séries alternées associées

On peut déduire de la proposition V.10 quelques expressions explicites de séries :

PROPOSITION V.11.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} b_{2p}, \tag{V.43}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2p}} = (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} B_{2p}\left(\frac{1}{2}\right), \tag{V.44}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^{2p+1}} = (-1)^{p-1} 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} B_{2p+1}\left(\frac{1}{4}\right). \tag{V.45}$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer (V.43), il suffit de prendre $x = 0$ dans (V.39) ; on a $2p \geq 2$ ainsi $\overline{B}_{2p}$ est continu sur $\mathbb{R}$ et $\overline{B}_{2p}(0) = B_{2p}(0) = b_{2p}$. Si l'on choisit $x = 1/2$ dans (V.39), on a (V.44). Si l'on choisit $x = 1/4$ dans (V.38), on a (V.45). □

EXEMPLE V.12. Si l'on prend $p = 1$, 2 et 3 dans (V.43) on obtient, puisque $b_2 = 1/6$, $b_4 = -1/30$ et $b_6 = 1/42$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.} \tag{V.46}$$

EXEMPLE V.13. Si l'on prend $p = 1$ et 2 dans (V.44) on obtient, puisque $B_2 = X^2 - X + 1/6$, $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.} \tag{V.47}$$

EXEMPLE V.14. Si l'on prend $p = 0$ et 1 dans (V.45) on obtient, puisque $B_1 = X - 1/2$, $B_3 = X^3 - 3X^2/2 + X/2$,

$$\boxed{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2r+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^3} = \frac{7\pi^3}{96}.} \tag{V.48}$$

Par cette méthode, on ne peut calculer des séries du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p+1}},$$

qui, *a priori* n'ont pas d'expressions explicites connues.

V.4. Calcul par les distributions périodiques

V.4.1. Calcul direct

Pour les définitions, voir l'annexe W.

Ces distributions périodiques nous permettent de retrouver plus naturellement les polynômes de Bernoulli.

EXEMPLE V.15. Cherchons une distribution de $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$ dont les coefficients de Fourier vérifient

$$c_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad c_k = \frac{1}{k^2}. \tag{V.49}$$

On a donc, au sens des distributions périodiques

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi\cdot}.$$

Cette distribution est définie puisque pour tout fonction test ϕ, la somme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} < c_k e^{2i\pi k\cdot}, \phi >$$

est convergente ; en effet,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|< c_k e^{2i\pi k\cdot}, \phi >\right| \leq \|\phi\|_\infty \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \|\phi\|_\infty \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty. \tag{V.50}$$

On pose

$$U = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k e^{2ik\pi\cdot}.$$

Grâce à (V.49), (W.4) et (W.1), on a donc, au sens des distributions périodiques,

$$\begin{aligned}
T^{(2)} &= U^{(2)}, \\
&= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k (2ik\pi)^2 e^{2ik\pi\cdot}, \\
&= -4\pi^2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k k e^{2ik\pi\cdot}, \\
&= -4\pi^2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{2ik\pi\cdot}, \\
&= -4\pi^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2ik\pi\cdot} - 1 \right), \\
&= -4\pi^2 \left(\delta - 1\right).
\end{aligned}$$

On a donc l'équation différentielle suivante

$$\text{dans } \mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad -\frac{1}{4\pi^2} T^{(2)} = \delta - 1. \tag{V.51}$$

Cette équation différentielle se résout presque comme les équations différentielles pour les fonctions ; la discontinuité introduite par la périodisation (voir proposition W.4) introduit des dirac et des dérivées. Si on cherchait une fonction f, deux fois dérivable, vérifiant dans $\mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{4\pi^2} f^{(2)} = -1, \tag{V.52}$$

on aurait

$$f(x) = 2\pi^2 x^2 + ax + b,$$

où a et b sont des constantes. On cherche donc T sous la forme

$$T = \widetilde{f},$$

où $\widetilde{f}$ est la périodisée de f. D'après la proposition W.4, on donc successivement

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= \widetilde{f}' - \big(f(1) - f(0)\big)\delta, \\
&= \widetilde{f}' - (2\pi^2 + a)\delta
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T^{(2)} &= \widetilde{f''} - \big(f'(1) - f'(0)\big)\delta - (2\pi^2 + a)\delta', \\
&= \widetilde{f''} - 4\pi^2\delta - (2\pi^2 + a)\delta'.
\end{aligned}$$

Selon (V.52), on a donc, au sens des distributions périodiques,

$$T^{(2)} = 4\pi^2 - 4\pi^2\delta - (2\pi^2 + a)\delta'.$$

Ainsi, (V.51) a lieu si et seulement si $2\pi^2 + a$ est nul. On choisit donc a égal à $-2\pi^2$. Le coefficient c_0 du développement de T en série de Fourier est nul :

$$c_0 = \int_0^1 \widetilde{f}(x)dx = \int_0^1 2\pi^2 x^2 - 2\pi^2 x + bdx = 0,$$

ce qui nous fournit la valeur de $b = \pi^2/3$. La distribution T est donc la distribution-fonction $\widetilde{f}$ 1-périodique et définie par :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \widetilde{f}(x) = 2\pi^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right). \tag{V.53}$$

On a donc

$$\text{dans } \mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad \widetilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi \cdot}$$

Selon (V.50) la distribution-fonction de droite appartient à $L^2(0,1)$ et l'égalité précédente a lieu dans $L^2(0,1)$; Or $\widetilde{f}$ est continue et dérivable par morceaux ; d'après le théorème de Dirichlet, appliqué en $x = 0$, on a donc

$$\widetilde{f}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k,$$

soit encore, grâce à la définition des c_k

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2\pi^2 \times \frac{1}{6},$$

ce qui nous redonne (V.46). En fait, nous avons fait, sans le savoir, les calculs de la section V.3.4 : à un facteur multiplicatif près, la fonction $\widetilde{f}$, définie par (V.53), est égale à la périodisée du polynôme de Bernoulli B_2, défini par (V.24).

On pourrait retrouver, par récurrence, les différents polynômes de Bernoulli et les résultats de la section V.3.4. On peut aussi déterminer d'autres types de séries, comme le montrent les exemples V.16 et V.17.

Exemple V.16. Comme dans l'exemple V.15, calculons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$

La démarche étant identique, nous n'indiquerons que les détails importants du calcul. Cherchons une distribution de $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$ dont les coefficients de Fourier vérifient

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{1}{1+k^2}. \tag{V.54}$$

On a donc, au sens des distributions périodiques,

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi \cdot}.$$

L'egalité (V.54) peut encore s'écrire

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1+k^2) c_k = 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{dans } \mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad T - \frac{1}{4\pi^2} T^{(2)} = \delta. \tag{V.55}$$

On résout donc l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$:

$$f - \frac{1}{4\pi^2} f^{(2)} = 0, \tag{V.56}$$

dont la solution est

$$f(x) = \lambda e^{2\pi x} + \mu e^{-2\pi x},$$

où λ et μ sont des constantes. On cherche donc T sous la forme

$$T = \widetilde{f}.$$

On a donc, au sens des distributions périodiques,

$$T^{(2)} = \widetilde{f''} - 2\pi \left(\lambda e^{2\pi} - \mu e^{-2\pi} - \lambda + \mu \right) \delta - \left(\lambda (e^{2\pi} - 1) + \mu (e^{-2\pi} - 1) \right) \delta',$$

et donc

$$-\frac{1}{4\pi^2}T^{(2)} = -\frac{1}{4\pi^2}\widetilde{f''} + \frac{1}{2\pi}A\delta + \frac{1}{4\pi^2}B\delta',$$

où

$$\begin{cases} A = \lambda(e^{2\pi} - 1) - \mu(e^{-2\pi} - 1), \\ B = \lambda(e^{2\pi} - 1) + \mu(e^{-2\pi} - 1). \end{cases} \tag{V.57}$$

On a donc, compte tenu de (V.56),

$$T - \frac{1}{4\pi^2}T^{(2)} = \frac{1}{2\pi}A\delta + \frac{1}{4\pi^2}B\delta'.$$

Ainsi, (V.55) a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} A = 2\pi, \\ B = 0. \end{cases} \tag{V.58}$$

On résout le système (V.57) et (V.58) qui fournit les valeurs de λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\pi}{e^{2\pi} - 1}, \\ \mu = -\dfrac{\pi}{e^{-2\pi} - 1}. \end{cases}$$

On a donc, au sens des distributions périodiques

$$\widetilde{f} = \lambda\widetilde{e^{2\pi\cdot}} + \mu\widetilde{e^{-2\pi\cdot}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} e^{2i\pi\cdot}.$$

On vérifie que $\widetilde{f}$ est continue et dérivable par morceaux ; d'après le théorème de Dirichlet, appliqué en $x = 0$, on a donc

$$\frac{1}{2}\left(\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = 2S + 1.$$

On a donc

$$S = \frac{1}{4}\left(\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\lambda e^{2\pi} + \mu e^{-2\pi} + \lambda + \mu\right) - \frac{1}{2},$$

et après calculs,

$$S = \frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2},$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\coth(\pi) - \frac{1}{2}.} \tag{V.59}$$

Exemple V.17. Comme dans les exemples V.15 et V.16, calculons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^2+k^4}.$$

Cherchons une distribution de $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$ dont les coefficients de Fourier vérifient

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{k^2}{1+k^2+k^4}. \tag{V.60}$$

On a

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi\cdot}.$$

L'egalité (V.60) peut encore s'écrire

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1+k^2+k^4)c_k = k^2,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{dans } \mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad (2i\pi)^{-4}T^{(4)} + (2i\pi)^{-2}T^{(2)} + T = (2i\pi)^{-2}\delta^{(2)}. \tag{V.61}$$

On résout donc l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$:

$$(2i\pi)^{-4}f^{(4)} + (2i\pi)^{-2}f^{(2)} + f = 0. \tag{V.62}$$

Son équation caractéristique est

$$(2i\pi)^{-4}r^{(4)} + (2i\pi)^{-2}r^{(2)} + 1 = 0, \tag{V.63}$$

équivalente à

$$s^{(4)} + s^{(2)} + 1 = 0,$$

où l'on a posé $s = (2i\pi)r$. Après calculs, on obtient les solutions de (V.63), notées $(\alpha_l)_{1\leq l\leq 4}$ avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2i\pi j, \\ \alpha_2 &= 2i\pi j^2, \\ \alpha_3 &= \overline{\alpha_1}, \\ \alpha_4 &= \overline{\alpha_2}. \end{aligned}$$

La solution de (V.62) est donc

$$f(x) = ae^{\alpha_1 x} + be^{\alpha_2 x} + ce^{\alpha_3 x} + de^{\alpha_4 x},$$

où a, b, c et d sont des constantes. On a donc

$$T = \widetilde{f}.$$

On pose

$$\begin{aligned} A_0 &= f'(1) - f'(0), \\ A_1 &= f^{(2)}(1) - f^{(2)}(0), \\ A_2 &= f^{(3)}(1) - f^{(3)}(0), \\ A_3 &= f^{(4)}(1) - f^{(4)}(0). \end{aligned}$$

On a, après calculs,

$$\begin{aligned} &(2i\pi)^{-4}T^{(4)} + (2i\pi)^{-2}T^{(2)} + T - (2i\pi)^{-2}\delta^{(2)} \\ &\qquad = -(2i\pi)^{-4}\left(\left(A_3 + (2i\pi)^2 A_1\right)\delta + \left(A_2 + (2i\pi)^2 A_0\right)\delta' + \left(A_1 + (2i\pi)^2\right)\delta^{(2)} + A_0\delta^{(3)}\right). \end{aligned}$$

La nullité des coefficients de δ, δ', $\delta^{(2)}$ et $\delta^{(3)}$ fournit les valeurs des A_l :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= 4\pi^2, \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= 16\pi^4. \end{aligned}$$

En utilisant la définition des A_l, on a donc le système linéaire en a, b, c et d suivant :

$$\begin{aligned} (e^{\alpha_1} - 1)\,a + (e^{\alpha_2} - 1)\,b + (e^{\alpha_3} - 1)\,c + (e^{\alpha_4} - 1)\,d &= A_0, \\ \alpha_1 (e^{\alpha_1} - 1)\,a + \alpha_2 (e^{\alpha_2} - 1)\,b + \alpha_3 (e^{\alpha_3} - 1)\,c + \alpha_4 (e^{\alpha_4} - 1)\,d &= A_1, \\ \alpha_1^2 (e^{\alpha_1} - 1)\,a + \alpha_2^2 (e^{\alpha_2} - 1)\,b + \alpha_3^2 (e^{\alpha_3} - 1)\,c + \alpha_4^2 (e^{\alpha_4} - 1)\,d &= A_2, \\ \alpha_1^3 (e^{\alpha_1} - 1)\,a + \alpha_2^3 (e^{\alpha_2} - 1)\,b + \alpha_3^3 (e^{\alpha_3} - 1)\,c + \alpha_4^3 (e^{\alpha_4} - 1)\,d &= A_3. \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}\widetilde{a} &= (e^{\alpha_1} - 1)\, a,\\ \widetilde{b} &= (e^{\alpha_2} - 1)\, b,\\ \widetilde{c} &= (e^{\alpha_3} - 1)\, c,\\ \widetilde{d} &= (e^{\alpha_4} - 1)\, d,\end{aligned}$$

le système s'écrit matriciellement sous la forme

$$A \begin{pmatrix} \widetilde{a} \\ \widetilde{b} \\ \widetilde{c} \\ \widetilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

où A est la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de l'inverse de cette matrice est classique ; voir par exemple les pages 503 et 504 de [AF87] ou l'exercice 2.5 page 55 de [BM03]. Dans les deux cas, le calcul est fondé sur le polynôme d'interpolation de Lagrange. On trouve après calculs

$$A^{-1} = {}^t\begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{B_1} & -\frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_1}{B_2} & -\frac{\alpha_4\alpha_1\alpha_2}{B_3} & -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{B_4} \\ \frac{\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4}{B_1} & \frac{\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_3\alpha_4}{B_2} & \frac{\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_2}{B_3} & \frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}{B_4} \\ -\frac{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{B_1} & -\frac{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4}{B_2} & -\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}{B_3} & -\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{B_4} \\ \frac{1}{B_1} & \frac{1}{B_2} & \frac{1}{B_3} & \frac{1}{B_4} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} B_1 &= (\alpha_2 - \alpha_1)\,(\alpha_3 - \alpha_1)\,(\alpha_4 - \alpha_1)\,,\\ B_2 &= (\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_3 - \alpha_2)\,(\alpha_4 - \alpha_2)\,,\\ B_3 &= (\alpha_1 - \alpha_3)\,(\alpha_2 - \alpha_3)\,(\alpha_4 - \alpha_3)\,,\\ B_4 &= (\alpha_1 - \alpha_4)\,(\alpha_2 - \alpha_4)\,(\alpha_3 - \alpha_4)\,. \end{aligned}$$

Enfin, on écrit, d'après le théorème de Dirichlet, appliqué en $x = 0$,

$$\frac{1}{2}\left(\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^2+k^4} = 2S,$$

ce qui nous permet de calculer la somme en question. On montrera (voir section V.5) que l'on a, en fait,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n^4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right).} \tag{V.64}$$

V.4.2. Formule sommatoire de Poisson

Il existe une autre méthode, la formule sommatoire de Poisson, que l'on pourra trouver page 128 de [Boc97] ou dans la leçon 37 de [GW03].

V.5. Calcul par l'utilisation du théorème des résidus

Concluons par la méthode qui semble être la plus rapide. Cette section correspond aux pages 129 à 132 de [Boc96].

On utilise un résultat, fondée sur le théorème des résidus.

Rappelons la définition suivante (voir par exemple [Rud92]) :

DÉFINITION V.18. Une f fonction est dite méromorphe dans $\mathbb{C}$ s'il existe un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ tel que

(1) A n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$;
(2) f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus A$;
(3) f a un pôle en tout point de A.

PROPOSITION V.19. *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini de pôles $(z_l)_{1\leq l\leq p}$, aucun de ces pôles ne coïncidant avec un entier. Si*

$$\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0, \tag{V.65}$$

alors, la somme $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{l=1}^{p} \text{Rés}\left(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l\right).} \tag{V.66}$$

REMARQUE V.20. Ce résultat permet d'affirmer que la somme $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini, mais ne permet pas de montrer que famille $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION V.19. Pour N entier non nul, on définit γ_N le chemin carré de $\mathbb{C}$, de centre l'origine et passant par le point d'affixe $N + 1/2$ (voir la figure V.3). On choisit N assez grand de façon que γ_N contiennent tous les pôles de f.

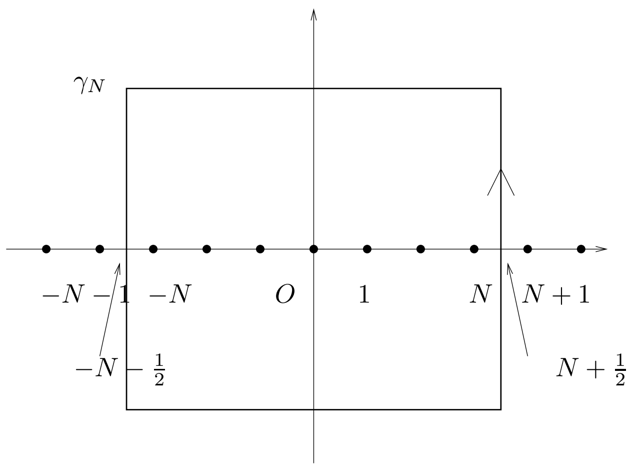


FIGURE V.3. le chemin γ_N

On considère la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left((z_l)_{1\leq l\leq p} \cup \mathbb{Z}\right), \quad g(z) = \pi f(z)\text{cotg}(\pi z) = \pi f(z)\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

La fonction g est correctement définie, est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et l'ensemble de ses pôles est égal à $\Big((z_l)_{1\le l\le p} \cup \mathbb{Z}\Big)$; en effet, $e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 0$ est équivalent à $e^{2i\pi z} = 0$, soit z entier. De plus

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), k) = f(k). \tag{V.67}$$

En effet, d'après le lemme 3.47 page 41, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, qui n'est pas pôle de f :

$$\text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), k) = \pi f(k)\frac{\cos(\pi k)}{[\sin(\pi z)]'_{z=k}} = \pi f(k)\frac{\cos(\pi k)}{\pi\cos(\pi k)}.$$

D'après le théorème des résidus, il vient

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z)\text{cotg}(\pi z)dz = 2i\pi\sum_{n=-N}^{N}\text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), n) + 2i\pi\sum_{l=1}^{p}\text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l)\,,$$

et, d'après (V.67),

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z)\text{cotg}(\pi z)dz = 2i\pi\sum_{n=-N}^{N} f(n) + 2i\pi\sum_{l=1}^{p}\text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l)\,. \tag{V.68}$$

Montrons que sur γ_N, $\text{cotg}(\pi z)$ est borné indépendamment de N. Sur les côtés verticaux du carré, on a $z = \pm(N+1/2) + iy$ où $|y| \le N + 1/2$ et, par conséquent,

$$|\text{cotg}(\pi z)| = |\text{th}(\pi y)| \le \left|\text{th}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|,$$

si $|y| \le 1/2$. Si $|y| > 1/2$, on a

$$\begin{aligned}
|\text{cotg}(\pi z)| &= \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right|,\\
&= \left|\frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}\right|,\\
&= \frac{\left|e^{i\pi x - \pi y}\right| + \left|e^{-i\pi x + \pi y}\right|}{\left|e^{-i\pi x + \pi y}\right| - \left|e^{i\pi x - \pi y}\right|},\\
&\le \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}},\\
&\le \coth(\pi y),
\end{aligned}$$

et on conclut que $|\text{cotg}(\pi z)|$ est majoré par $\coth(\pi/2)$, puisque

$$\coth(\pi y) \le \coth\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{V.69}$$

car $|\text{cotg}(\pi y)|$ décroît avec $|y|$. Sur les côtés horizontaux du carré, $z = \pm(N+1/2)i + x$ avec $|x| \le N + 1/2$. Puisque $|y|$ est supérieur à $1/2$, (V.69) reste valable. On a donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \gamma_N, \quad |\text{cotg}(\pi z)| \le \coth\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{V.70}$$

Par ailleurs, on a, pour tout N assez grand, puisque la longueur de γ_N est égale à $4N+2$,

$$\left|\int_{\gamma_N} \pi f(z)\text{cotg}(\pi z)dz\right| \le \pi(4N+2)\max_{|z|\ge N}|f(z)|\max_{z\in\gamma_N}|\text{cotg}(\pi z)|\,,$$

et, grâce à (V.70),

$$\le \coth\left(\frac{\pi}{2}\right)\pi(4N+2)\max_{|z|\ge N}|f(z)|\,.$$

D'après l'hypothèse (V.65), on a, pour $N \to +\infty$,

$$\max_{|z|\geq N} |f(z)| = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

On a donc

$$\lim_{N\to+\infty} \left|\int_{\gamma_N} \pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z)dz\right| = 0,$$

ce qui implique, selon (V.68), que la somme $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et vérifie (V.66). □

En raisonnant de la même façon (voir page 131 de [Boc96]), on a le résultat suivant :

Proposition V.21. *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini de pôles $(z_l)_{1\leq l\leq p}$, aucun de ces pôles ne coïncidant avec un entier. Si*

$$\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0, \tag{V.71}$$

alors, la somme $\sum_{n=-N}^{N}(-1)^n f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n f(n) = -\sum_{l=1}^{p} \text{Rés}\left(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}, z_l\right).} \tag{V.72}$$

Dans le cas où

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes, on peut donner le corollaire suivant, qui découle du lemme 3.47 page 41.

Corollaire V.22. *Soient P et Q deux polynômes complexes tels que* $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$ *et que Q n'ait que des racines simples, non entières, notées $(z_l)_{1\leq l\leq p}$. Alors, la famille $(P(n)/Q(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ $((-1)^n P(n)/Q(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables et*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\pi \sum_{l=1}^{p} \frac{\cos(\pi z_l)P(z_l)}{\sin(\pi z_l)Q'(z_l)},} \tag{V.73}$$

et

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)} = -\pi \sum_{l=1}^{p} \frac{P(z_l)}{\sin(\pi z_l)Q'(z_l)}.} \tag{V.74}$$

Exemple V.23. Soit $a > 0$. On pose $P(z) = 1$ et $Q(z) = z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai)$. D'après (V.73), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \sum_{l=1}^{2} \frac{\cos(\pi z_l)}{2\sin(\pi z_l)z_l} = -\frac{\pi}{2ai}\left(\frac{\cos(\pi ai)}{\sin(\pi ai)} + \frac{\cos(\pi ai)}{\sin(\pi ai)}\right) = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}.} \tag{V.75}$$

En choisissant $a = 1$, on retrouverait (V.59).

Si on fait tendre a vers 0, on a

$$\lim_{a\to0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{V.76}$$

Cette limite se justifie par la convergence normale de la série de terme général $1/(n^2+a^2)$: si on pose

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad R_N(a) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2},$$

alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout N,

$$|R_N(a)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N assez grand tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Cet entier étant fixé, chacune des fonctions $x \mapsto 1/(n^2+x^2)$, pour $n \in \{1,...,N\}$ est continue, et on peut donc choisir $\eta > 0$ tel que pour tout $a \in [0,\eta]$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+a^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On donc pour tout $a \in [0,\eta]$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+a^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right|,\\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+a^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right| + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + |R_N(a)|,\\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui établit (V.76). $\diamondsuit$

De (V.76), on tire donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}\right)$$

Après calculs, on montre que cette limite vaut $\pi^2/6$ et on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui correspond à (V.46).

Exemple V.24. Soit $a > 0$. On pose $P(z) = 1$ et $Q(z) = z^2 + a^2 = (z-ai)(z+ai)$. D'après (V.74), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = -\pi\sum_{l=1}^{2} \frac{1}{2\sin(\pi z_l)z_l} = -\frac{\pi}{2ai}\left(\frac{1}{\sin(\pi ai)} + \frac{1}{\sin(\pi ai)}\right) = \frac{2\pi}{a}\frac{1}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{1}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.} \tag{V.77}$$

En choisissant $a = 1$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.} \tag{V.78}$$

En faisant tendre a vers 0 et en admettant [1] que

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

1. même justification que (V.76).

on aurait

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{a\to 0} \left(\frac{\pi}{a} \frac{1}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2} \right).$$

Après calculs, on montre que cette limite vaut $-\pi^2/12$ et on a donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.} \tag{V.79}$$

Exemple V.25. On pose

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2, \\ Q(z) &= z^4 + z^2 + 1 = (z-j)(z+j)(z-\overline{j})(z+\overline{j}). \end{aligned}$$

D'après (V.74), on a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n^2}{1+n^2+n^4} = -\pi \sum_{l=1}^{4} \frac{\cos(\pi z_l) z_l^2}{\sin(\pi z_l)\,(4z_l^3 + 2z_l)} = -\pi \sum_{l=1}^{4} \frac{\cos(\pi z_l) z_l}{\sin(\pi z_l)\,(4z_l^2 + 2)}.$$

On pose

$$\alpha = \frac{j}{4j^2+2}.$$

Par conjugaison et opposition des racines de Q, on a

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n^4} = -\pi \left(\frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)}\alpha + \frac{\cos(\pi\overline{j})}{\sin(\pi\overline{j})}\overline{\alpha} - \frac{\cos(-\pi j)}{\sin(-\pi j)}\alpha - \frac{\cos(-\pi\overline{j})}{\sin(-\pi\overline{j})\alpha} \right),$$

ce qui implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n^4} = -\pi \left(\frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)}\alpha + \frac{\cos(\pi\overline{j})}{\sin(\pi\overline{j})}\overline{\alpha} \right)$$

On montre que le terme de droite est égal à

$$-2\pi \mathrm{Re}\left(\alpha \frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)} \right),$$

puis, en utilisant $1 + j + j^2 = 0$, que

$$\alpha = -\left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{12} \right),$$

et que

$$\frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)} = -i\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right).$$

Bref, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n^4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right),$$

ce qui est bien le résultat (V.64) annoncé dans l'exemple V.17 de la section V.4.

V.6. Calculs avec des logiciels de calcul formel

Un certain nombre de logiciels de calcul formel, comme maple, sont capable de donner de tels résultats. On peut retrouver quelques uns des résultats démontrés grâce à matlab symbolique [2]. D'autres sommes sont explicitées à partir de fonctions de références, mais inexprimables analytiquement [3]. Les simulations présentées ci-dessous utilisent la fonction **symsum** de matlab et parlent d'elles-mêmes.

```
>syms k

>symsum(1/k^2,1,Inf)

ans=1/6*pi^2

>symsum(1/k^4,1,Inf)

ans=1/90*pi^4

>symsum(1/k^6,1,Inf)

ans=1/945*pi^6

>symsum((-1)^k/k,1,Inf)

ans=-log(2)

>symsum((-1)^k/k^2,1,Inf)

ans=-1/12*pi^2

>symsum((-1)^k/k^4,1,Inf)

ans=-7/720*pi^4

>symsum(1/(1+k^2),1,Inf)

ans=1/2*i*Psi(1-i)-1/2*i*Psi(1+i)

>symsum((-1)^k/(1+k^2),1,Inf)

ans=-1/2*hypergeom([1, 1+i, 1-i],[2+i, 2-i],-1)
```

2. qui utilise en fait maple.
3. ce qui laisse encore un peu de travail aux professeurs de mathématiques !

Annexe W

Rappels sur les distributions périodiques

On peut utiliser les distributions périodiques pour calculer quelques séries. Faisons quelques rappels sur les distributions périodiques, dont on fixe la période égale à un. On pourra, par exemple, consulter le chapitre 5 de [Boc97]. On pourra aussi avoir une présentation différentes des distribuations périodiques en consultant les leçons 28 et 36 de [GW03].

Définition W.1. On note $\mathcal{D}\left(S^1\right)$ l'ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodiques. On note $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$ l'ensemble des distributions 1-périodiques, c'est-à-dire, le dual topologique de $\mathcal{D}\left(S^1\right)$.

On rappelle que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ le dirac est la distribution notée δ et définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

On rappelle aussi que que la distribution δ est la dérivée au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la distribution de Heaviside H associée à la fonction, notée aussi H et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cette propriété a encore lieu dans $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$. Pour cela, on donne la définition suivante :

Définition W.2 (Coefficients et série de Fourier). Étant donné une distribution T de $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$, on appelle coefficients de Fourier de T les nombres

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(T) =< T, e^{-2i\pi k.} >$$

(où $e^{-2i\pi k.}$ est la fonction de S^1 qui à s associe $e^{-2i\pi ks}$) et la série de Fourier de T la série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T) e^{2i\pi k.}.$$

On rappelle que $< T, \phi >$ désigne l'image de ϕ par T.

Si la distribution est définie à partir d'une fonction intégrable, on retrouve la définition usuelle des coefficients de Fourier et de série de Fourier.

On peut montrer (cf. chapitre 5 de [Boc97], théorème 1 page 122)

$$\delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi k.}. \tag{W.1}$$

On peut aussi définir, pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la périodisée $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, fonction 1-périodique et coïncidant avec f sur $[0, 1[$. Cette fonction périodique définit une distribution T de $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$, aussi notée par abus $\widetilde{f}$. Comme dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on donne

Définition W.3. Si T est une distribution de $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$, on définit sa dérivée T' par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(S^1\right), \quad < T', \phi >= - < T, \phi' > .$$

Si la fonction f est dérivable, la dérivée de la distribution périodique $\widetilde{f}$ est égale à la distribution correspondant à la périodisée de la dérivée, auquel on soustrait un multiple de la distribution δ (puisque la périodisation a introduit une discontinuité aux points entiers) ; plus précisément, on a

Proposition W.4. *Pour toute fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de périodisée $\widetilde{f}$,*

$$\text{dans } \mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad \left(\widetilde{f}\right)' = \widetilde{f'} - \big(f(1) - f(0)\big)\delta. \tag{W.2}$$

Dans cette proposition, $\left(\widetilde{f}\right)'$ désigne la dérivée de la distribution définie par la périodisée de f tandis que $\widetilde{f'}$ désigne la distribution définie par la périodisée de la dérivée de la fonction f.

Démonstration de la proposition W.4. Soit $\phi \in \mathcal{D}\left(S^1\right)$. Par définition, on a

$$< \left(\widetilde{f}\right)', \phi >= - < \widetilde{f}, \phi' > .$$

Les fonctions f et $\widetilde{f}$ sont intégrables (et égales) sur $[0, 1]$; ainsi

$$< \widetilde{f}, \phi' >= \int_0^1 \widetilde{f}(t)\phi'(t)dt = \int_0^1 f(t)\phi'(t)dt.$$

Par intégration par partie, il vient donc, compte tenu de l'aspect 1-périodique de la fonction ϕ

$$< \left(\widetilde{f}\right)', \phi >= -\big(f(1)\phi(1) - f(0)\phi(0)\big) + \int_0^1 f'(t)\phi(t)dt = -\big(f(1) - f(0)\big)\phi(0) + \int_0^1 \widetilde{f'}(t)\phi(t)dt.$$

Par définition, on a

$$-\big(f(1) - f(0)\big)\phi(0) + \int_0^1 \widetilde{f'}(t)\phi(t)dt = -\big(f(1) - f(0)\big) < \delta, \phi > + < \widetilde{f'}, \phi > .$$

On a donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(S^1\right), \quad < \left(\widetilde{f}\right)', \phi >=< -\big(f(1) - f(0)\big)\delta + \widetilde{f'}, \phi >,$$

ce qui équivalent à (W.2). □

Pour la suite, on omettra le symbole ~ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité.P est un polynôme, de dérivé usuelle P', on écrira (W.2) sous la forme :

$$\text{dans } \mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad T_P' = P' - \big(P(1) - P(0)\big)\delta, \tag{W.3}$$

où T_P désigne la distribution associée à la fonction P et T_P' sa dérivée au sens des distributions périodiques.

On peut vérifier que, dans $\mathcal{D}'\left(S^1\right)$, on peut dériver terme à terme une série de Fourier : si,

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2i\pi k \cdot}, \tag{W.4a}$$

alors

$$\mathcal{D}'\left(S^1\right), \quad T' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2i\pi k c_k e^{2i\pi k \cdot}, \tag{W.4b}$$

Bibliographie

[AF03] M. J. Ablowitz et A. S. Fokas. *Complex variables : introduction and applications.* Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.

[AF87] J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques. 1 : Algèbre.* Dunod Université : Ouvrages de Base. [Dunod University : Basic Works]. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.07 ARN, 4^{e} étage). Dunod, Paris, 1987, pages xx+691.

[AF88] J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques. 2.* Dunod Université : Ouvrages de Base. [Dunod University : Basic Works]. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.07 ARN, 4^{e} étage). Dunod, Paris, 1988, pages viii+680.

[AF89] J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques. 3 : Compléments d'analyse.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.07 ARN, 4^{e} étage). Dunod, Paris, 1989, pages vi+522.

[Bal91] M. Balabane. *Théorie élémentaire des distributions. Application à l'équation de Laplace.* École Nationale des ponts et chausssées, 1991.

[Bas11a] J. Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.* Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT25. 2011. 180 pages.

[Bas11b] J. Bastien. *Mathématiques : Applications.* Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31. 2011. 158 pages.

[Bas11c] J. Bastien. *Résistance des Matériaux, Introduction au calcul des structures.* Notes de cours de l'UV MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MQ41. 2011. 251 pages.

[Bas14] J. Bastien. *Vérité mathématique : paradoxe, preuve et conventions. Se méfier de ses réflexes et de ses habitudes.* Transparents de l'UE Zététique de l'INSA de Lyon. 2014. 80 pages.

[Bas15] J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf`. 2015. 73 pages.

[Bas18a] J. Bastien. *Biomécanique du mouvement.* Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca. 2018. 93 pages.

[Bas18b] J. Bastien. *Biomécanique du mouvement.* Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca. 2018. 190 pages.

[Bas21] J. Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3.* Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. Vieille version de cours abandonnée. 2021. 309 pages.

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[BBL12] J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques. Applications aux modèles avec frottement ou impact.* Collection Mécanique des structures. Ouvrage traduit en anglais (voir [BBL13]).Voir `http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html` Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol). Hermès Science Publications/Lavoisier, 2012. 532 pages.

[BBL13] J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems. Applications to Models with Friction or Impact.* Mechanical Engineering and Solid Mechanics Series. Traduction en anglais de [BBL12]. Voir `http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1848215258.html`. Wiley-ISTE, 2013. 512 pages.

[BC04] J. Bastien et D. Chamoret. *Mathématiques : Applications.* Travaux Dirigés de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31. 2004. 47 pages.

[BC18] M. Bousquet et M.-L. Cuzacq. *Magazine Questions Clés Sciences ; 100 théories scientifiques expliquées en un clin d'œil !* Tome 23. Paris : ÉSI, 18 août 2018.

[BC93] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage. *Mathématiques pour la physique. Tomes 1 et 2.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 BEN, 4^{e} étage). Eyrolles, 1993.

[BCL01] J.-M. Bony, G. Choquet et G. Lebeau. “Le centenaire de l’intégrale de Lebesgue”. In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332.2 (2001). https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cuerva/Lebesgue-CRAS.pdf, pages 85–90. doi : 10.1016/S0764-4442(00)01829-2.

[Bie18] H. Biesheuvel. *Mécanique des fluides.* Cours de quatrième année, département Mécanique. Polytech Lyon, 2018.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l’analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[Boc96] N. Boccara. *Fonctions analytiques.* ellipses, 1996.

[Boc97] N. Boccara. *Distributions.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.72 BOC, 4e étage). ellipses, 1997.

[Bod12a] A. Bodin. *Exercices - La règle et le compas. Éléments de géométrie.* http://math.univ-lille1.fr/~bodin/geometrie/exo_compas.pdf. Voir http://math.univ-lille1.fr/~bodin/. Université Lille 1, 2012.

[Bod12b] A. Bodin. *La règle et le compas. Éléments de géométrie.* http://math.univ-lille1.fr/~bodin/geometrie/ch_compas.pdf. Voir http://math.univ-lille1.fr/~bodin/. Université Lille 1, 2012.

[BR] V. Borrelli et J.-L. Rullière. *En cheminant avec Kakeya.* disponible sur le web : http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Kakeya.html.

[Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. [Theory and applications].* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. 515.7 BRE. Paris : Masson, 1983, pages xiv+234.

[Buc92] H. Buchwalter. *Variations sur l’analyse en maîtrise de mathématiques.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 BUC, 4e étage). Ellipses, 1992.

[Car84] J.-C. Carrega. *Théorie des corps. La règle et le compas.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4e étage). Paris : Hermann, 1984.

[Ciu] I. S. Ciuperca. *Méthodes mathématiques pour l’ingénieur 2.* http://math.univ-lyon1.fr/~ciuperca/cours-mmi2.pdf.

[DB22] N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l’UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html. 2022. 326 pages.

[Den09] A. Denèle. “Modélisation, L’omniscience du futur”. In : *Science & Vie, Hors Série* 297 (2021-09), pages 88–91.

[Dol90] P. Dolbeault. *Analyse complexe.* Collection Maîtrise de Mathématiques Pures. [Collection of Pure Mathematics for the Master’s Degree]. http://carlossicoli.free.fr/D/Dolbeault_P.-Analyse_complexe.pdf. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 DOL, 4e étage). Paris : Masson, 1990, pages viii+242.

[Duv90] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 DUV, 4e étage). Masson, 1990.

[EG99] H.-D. Ebbinghaus et F. Guénard. *Les nombres : leur histoire, leur place et leur rôle de l’Antiquité aux recherches actuelles.* Traduction de Zahlen. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 0.8, niveau -1). Paris : Vuibert, 1999.

[Fre03] D. Fredon. *Mathématiques pour les sciences de l’ingénieur. aide-mémoire.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519 FRE, 4e étage). Dunod, 2003.

[Gir04] A. Giroux. *Analyse complexe. Notes de cours.* http://www.dms.umontreal.ca/~giroux/documents/analyseC00.pdf. Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal., 2004.

[Gou20] X. Gourdon. *Les maths en tête : Analyse.* Ellipses, 2020.

[GS86] H. Gié et J.-P. Sarmant. *Mécanique, volume 2.* Paris : Technique et documentation (Lavoisier), 1986.

[Gué+04] R. Guérin, Y. Plusquellec, M. Agullo et R. Boudet. *Que savez-vous de l’outil mathématique ? : mathématiques à l’usage des mécaniciens. Fascicules 1 à 6. Math méca. À l’usage des élèves ingénieurs et des étudiants en mécanique.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 620.001 5 PLU, 5e étage). Cépaduès, 2004.

[GW03] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. filtrage, calcul numérique, ondelettes.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 GAS, 4e étage). Dunod, 2003.

[Har10] J. Harthong. *Cours d’analyse.* http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00519301. 2010.

[Kar13] J. Karczmarczuk. *Chapitre 9 : les transformations conformes.* Notes de cours disponibles sur le web : http://karczmarczuk.users.greyc.fr/TEACH/InfoGeo/Work/conform.pdf. 2013.

[Kib01] M. Kibler. *Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie. avec 230 exemples et 230 exercices et problèmes.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 KIB, 4e étage). scientifiques GB, 2001.

[Lam08] C.-H. Lamarque. “Cours d’Analyse”. Cours de l’École Nationale des Travaux Publics de l’État. 2008.

[LH90] C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (1945).* Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : MATHSI 795, niveau -1). Jacques Gabay, 1990.

[Lim] A. d. Limoge. “Ressources pour le lycée”. disponible sur http://pedagogie.ac-limoges.fr/maths/IMG/pdf/ressources_pour_le_lycee.pdf.

[LT09] Y. Leroyer et P. Tesson. *Mathématiques de l'ingénieur. rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519 LER, 4e étage). Dunod, 2009.

[Mal82] P. Malliavin. *Intégration et probabilités. Analyse de Fourier et analyse spectrale.* Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 515.4 MAL, niveau 0). Paris : Masson, 1982, page 200.

[Pab95] J.-F. Pabion. *Éléments d'analyse complexe. Licence de mathématiques.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.9 PAB, 4e étage). Ellipses-Marketing, 1995.

[Pet98] R. Petit. *L'outil mathématique pour la physique.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 PET, 4e étage). Dunod, 1998.

[RDO79] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 2.* Algèbre et applications à la géométrie. Masson, Paris, 1979, pages viii+297.

[RDO87] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. 4. Séries et équations différentielles.* 2e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 RAM, 4e étage). Paris : Masson, 1987, pages VIII+314.

[RDO88] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse.* 2e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4e étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.

[RDO93] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 1er étage). Masson, Paris, 1993, pages viii+440.

[Roy05] P. Royis. *Mécanique des milieux continus. cours, exercices et problèmes.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 ROY, 4e étage). Presses universitaires de Lyon, 2005.

[RT92] P.-A. Raviart et J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 518.6 RAV, 4e étage). Paris : Masson, 1992.

[Rud92] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* 6e édition. Traduit de l'américain par N. Dhombres et F. Hoffman. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.07 RUD, 4e étage). Paris : Masson, 1992.

[Sai08] J. Saint-Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe.* disponible sous forme de polycopié de cours à l'url `https://webusers.imj-prg.fr/~jean.saint-raymond/preprints/polycop.pdf`. Calvage & Mounet, 2008.

[Sal11] K. Saleh. *Introduction à la méthode des éléments finis.* `http://math.univ-lyon1.fr/~saleh/Docs/MEF/CoursUFE_KhaledSaleh.pdf`. Cours d'introduction à la méthode des éléments finis destiné aux étudiants de troisième année de la Faculté d'ingénierie de l'Université Française d'Egypte. 2011.

[Sch45] L. Schwartz. “Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques”. In : *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)* 21 (1945). `http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AUG/AUG_1945__21_/AUG_1945__21__57_0/AUG_1945__21__57_0.pdf`, pages 57–74.

[Sch66] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 46 SCHWARTZ, niveau -1). Paris : Hermann, 1966, pages xiii+420.

[Sko91] M. Skoda. *Fonctions analytiques.* Cours de la Licence. Université Paris VI, 1991.

[Tos] N. Tosel. *Rampes et théorèmes taubériens.* Revue de Mathématiques Spétiales 128-4.

[Vél00] J. Vélu. *Mathématiques générales : cours et exercices corrigés.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 VEL, 4e étage). Paris : Dunod, 2000.

[ZQ13] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013.