

NOTES DE COURS DE P'UE OMI3

Mécanique 4A

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR 3

2021-2022, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 5 septembre 2021

Le lien original de ce document est le suivant :

<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/coursOMI3.pdf>

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

Table des matières

Avant-propos	v
Introduction	vii
Ouvrages utilisés	ix
partie 1. Analyse complexe	1
Chapitre 1. Fonctions holomorphes	3
1.1. Rappels sur les complexes	3
1.2. Introduction	3
1.3. Dérivation au sens des complexes : fonctions holomorphes	3
Chapitre 2. Séries entières et fonctions usuelles sur \mathbb{C}	13
2.1. Rappels sur les séries et les développements limités	13
2.2. Introduction	13
2.3. Définitions	13
2.4. Fonctions analytiques	16
2.5. Fonctions usuelles sur \mathbb{C}	16
Chapitre 3. Intégration des fonctions complexes, Théorème de Cauchy et Formules des Résidus	29
3.1. Introduction	29
3.2. Intégration des fonctions complexes	29
3.3. Primitive des fonctions complexes et Théorie de Cauchy	33
3.4. Formule des résidus et applications aux calculs d'intégrales	38
3.5. Applications aux calculs d'intégrales	47
3.6. Hommages à Cauchy et à la formule de Cauchy	47
Chapitre 4. Transformations conformes	49
Chapitre 5. Applications de l'analyse complexe	51
5.1. Calculs d'intégrales et de séries	51
5.2. Applications à la mécanique des fluides et transformations conformes	61
partie 2. Distributions	79
Chapitre 6. Introduction aux distributions	81
6.1. Introduction	81
6.2. Pourquoi les distributions ?	81
6.3. Définition des distributions	86
6.4. Limite d'une suite de distributions	95
6.5. Dérivation des distributions	99

6.6.	Retour sur les paradoxes de la RDM et leur levée par les distributions	102
6.7.	Produit de distributions (produit par une fonction indéfiniment dérivable)	102
6.8.	Série de distributions	103
6.9.	Intégration de distributions	106
6.10.	Remarque générale sur le passage fonctions \rightarrow distributions	106
Chapitre 7.	Produit de convolution pour les distributions	107
7.1.	Rappels sur la convolution de fonctions	107
7.2.	Définition de la convolution de fonctions	107
7.3.	Propriété de la convolution de fonctions	107
7.4.	Produit de convolution pour les distributions	109
7.5.	Exemples d'applications	114
Chapitre 8.	Applications des distributions	121
8.1.	Considération de choc en mécanique	121
8.2.	Un petit lemme technique	123
8.3.	Fonctions de Green : résolution d'équations différentielles par la convolution	124
8.4.	Transformation de Laplace des distributions et applications	124
8.5.	Formulations faibles ou énergétiques	124
partie 3.	Annexes	137
Annexe A.	Nombres complexes	139
A.1.	Quelques rappels théoriques	139
A.2.	Quelques exercices	144
A.3.	Plusieurs problèmes de géométrie	147
Annexe B.	Une formule de trigonométrie amusante	161
Annexe C.	Comportement d'une série entière au bord de convergence	167
C.1.	Rappels sur le rayon de convergence	167
C.2.	Rappels sur le comportement d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence	168
C.3.	Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence	168
C.4.	Des faux paradoxes fondés sur l'Abel-sommabilité	183
Annexe D.	Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$ (sous la forme d'un exercice corrigé)	193
Énoncé		193
Corrigé		194
Annexe E.	Définitions des fonctions complexes arcsin et arccos (sous la forme d'un exercice corrigé)	205
Énoncé		205
Corrigé		206
Annexe F.	Calcul d'une intégrale impropre (sous la forme d'un exercice corrigé)	213
Énoncé		213
Corrigé		214
Annexe G.	Calcul d'une intégrale impropre (sous la forme d'un exercice corrigé)	219
Énoncé		219
Corrigé		220

Annexe H. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (sous la forme d'un exercice corrigé)	227
Énoncé	227
Corrigé	228
Annexe I. Calcul de l'intégrale de Fresnel (sous la forme d'un exercice corrigé)	233
Énoncé	233
Corrigé	234
Annexe J. Calcul d'une intégrale (sous la forme d'un exercice et d'un problème corrigés)	237
Énoncé de l'exercice	237
Corrigé de l'exercice	237
Énoncé du problème	239
Corrigé du problème	240
Annexe K. Transformations conformes	251
Annexe L. Topographie et courbes de niveau	255
L.1. Un exercice de rappel	255
L.2. Liens entre potentiels, équipotentielles, altitude et lignes de plus grande pente	256
Annexe M. Rappels sur une poutre droite en flexion	259
M.1. Équation d'équilibre local	259
M.2. Équations donnant la déformée	260
M.3. Poutre encastree libre	260
M.4. Retour sur les équations au sens des distributions	261
Annexe N. Rappels sur les différents modes de convergence de fonctions	263
Annexe O. Rappels sur l'intégration	265
O.1. Intégration de Riemann	265
O.2. Intégration de Lebesgue	265
Annexe P. Rappels les espaces de fonctions	267
P.1. Espaces de fonctions	267
P.2. Espaces de Sobolev	267
Annexe Q. Formulation variationnelle abstraite	269
Annexe R. Rappel sur les hyperplans	273
Annexe S. Intégration de distributions	275
Annexe T. Quelques calculs explicites de sommes de Séries	281
T.1. Introduction	281
T.2. Calcul par les séries entières	281
T.3. Calcul par les nombres et les polynômes de Bernoulli	284
T.4. Calcul par les distributions périodiques	293
T.5. Calcul par l'utilisation du théorème des résidus	299
T.6. Calculs avec des logiciels de calcul formel	304
Annexe U. Rappels sur les distributions périodiques	305
Bibliographie	307

Avant-propos

Ce polycopié constitue les notes de cours de Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3 de Mécanique 4A (2021-2022, Automne).

Ce polycopié de cours et les fichiers matlab donnés en illustration sont normalement disponibles à la fois

- en ligne sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
 - 'Poste de travail',
 - puis sur le répertoire 'P:' (appelé aussi '\\teraetu\Enseignants'),
 - puis 'jerome.bastien',
 - puis 'Polytech',
 - puis 'Mécanique 4A'.
 - enfin sur 'OMI3'.

Des notes en petits caractères comme suit pourront être omises en première lecture :

Attention, passage difficile! ◇

Introduction

La notion « d'outils mathématiques » peut être trompeuse ! Ce ne sont pas, comme on peut le croire de prime abord, de simples recettes qui permettent de résoudre tel ou tel type d'exercice, mais ils renvoient à des concepts parfois profonds. Dans le cours d'OMI 1, les notions d'algèbre linéaires, d'équations différentielles ou d'analyse vectorielles, s'appuient sur une théorie qui peut être abstraite ! Il en est de même du cours d'OMI 2, où les notions de transformés de Fourier et de Laplace, même si elles transforment aisément des équations différentielles en équations algébriques, s'appuient sur un cadre théorique précis.

Un ingénieur mécanicien doit savoir, au cours de sa formation ou dans le cadre de certains calculs, modéliser¹ le comportement des structures qu'il fabrique ou contrôle. Cela implique, d'une part, d'écrire correctement, ces lois de comportement et les équations qui en découlent. Ces équations, très souvent différentielles (ordinaire comme le cas de structure discrète ou aux dérivées partielles, comme le cas de modèles continus, comme par exemple celui d'une membrane souple), sont accompagnées d'un contexte théorique qui permet d'affirmer que ces équations sont bien écrites et que la solution existe et est unique. D'autre part, ces équations ont rarement des solutions connues explicitement et il faudra donc procéder à des calculs permettant d'approcher ces solutions. Ces notions d'analyse numériques sont introduites essentiellement dans le cours de méthodes numériques. Cependant, la théorie et l'analyse numériques sont parfois très liées et l'écriture d'approximations correctes et réalisables à l'aide d'ordinateurs, a besoin d'un cadre rigoureux, précisément étudié. Il est en, par exemple, ainsi pour la résolution de certains problèmes de mécanique (issus de la théorie des poutres ou de l'élasticité tridimensionnelle), qui s'appuient sur une formulation, dite faible, qui permettra à la fois d'obtenir existence et unicité de la solution, mais aussi l'approximation de cette solution, *via* la méthode des éléments finis². Cette formulation faible s'appuie sur la théorie des distributions³ présentée dans la partie 2 de ce cours. Cette théorie, mise au point par Laurent Schwartz⁴, sort de l'analyse ordinaire que vous connaissez, notamment sur la dérivation, et permet de donner un sens plus général à la dérivation, en permettant de dériver toute fonction, même non dérivable ! La notion de fonction de Dirac, introduite par certains physiciens pour pouvoir dériver la fonction de Heaviside, discontinue en zéro, prend alors une véritable existence mathématique et tous les calculs précédemment menés sur ces fonctions, sans rigueur apparente, deviennent tout à fait rigoureux ! Ce formalisme a permis alors l'émergence d'un cadre rigoureux⁵, notamment sur les équations différentielles très utilisées en physique, la théorie abstraite en découlant faisant partie⁶ de ce que l'on appelle les « mathématiques appliquées ». Cette théorie a aussi permis l'émergence de l'analyse numérique, l'écriture de codes de calculs et le développement des simulations sur la mécanique des solides, des fluides, en météorologie ... Cette partie des mathématiques est donc un très bon exemple de la formidable interaction entre mathématiques, physique et

1. À propos de modélisation, notion très à la mode (surtout en période de pandémie), on pourra lire [Bas11c, "Dangers et attraits de la modélisation", page vii] ou bien [Den09], disponible à l'URL suivante <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/denele2021.pdf>.

2. Cette méthode des éléments finis vous sera présentée ultérieurement lors de votre formation, mais peut être considérée comme l'un des points d'orgue de la partie 2 de ce cours.

3. qui elle-même n'aurait pu exister sans la théorie de l'intégration de Lebesgue, qui, au début du vingtième siècle, a complété l'intégration de Riemann. Voir [BCL01].

4. Voir [Sch45], disponible sur Internet : http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AUG/AUG_1945__21_/AUG_1945__21__57_0/AUG_1945__21__57_0.pdf

5. initié par des mathématiciens Français, dans les années 1960-70.

6. Très académique, la distinction entre mathématiques pures et appliquées est parfois très floue !

informatique qui n'ont cessé d'interagir et de se faire progresser mutuellement depuis la création des premiers ordinateurs⁷. Les différentes notions de l'analyse propres aux fonctions (limite, convolution) seront ensuite étendues aux distributions, classe d'objets plus vaste que celle des fonctions et qui les généralise. Bien entendu, de nombreuses applications seront présentées, très utiles en mécanique (résolution d'équation différentielles, notamment avec des chocs, vision de certains principe de la résistance des matériaux, comme le principe des travaux virtuels, comme une simple formulation faible.). Cette partie vous sera donc utile, entre autres, en mécanique des solides, des structures ou des Milieux Continus, et en particulier dans le cours de MNM de quatrième année.

Présentée en partie 1 car plus proche des notions d'analyse que vous connaissez (intégration), la notion de fonctions complexes dérivables (au « vrai » sens que vous connaissez de la dérivée, cette fois-ci.) permettra là encore de prendre de la hauteur et de voir certains résultats totalement inattendus en analyse réelle, puisqu'une fonction dérivable un fois (au sens des complexes), l'est un nombre infini de fois ! Il en découlera aussi le théorème de résidus qui permet de calculer (ou de recalculer) certaines intégrales, très utiles en physique. Enfin, cette notion de fonctions dérivables au sens des complexes, permettra aussi de calculer le champ de vitesses pour des fluides parfaits et d'en faire, très simplement sous matlab, des représentations graphiques. Cette partie vous sera donc utile, entre autres, en mécanique des fluides. Le polycopié de cours [Bie18] contient des résultats d'analyse complexes vus dans cette UE.

Remarquons aussi que ce cours présente deux extensions de la notion de dérivation d'application $x \mapsto f(x)$, la première (celle de la partie 1) est valable pour f allant de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , la seconde (celle de la partie 2) est valable pour f allant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sans être ponctuellement dérivable en tout point.

Pour conclure, tâchez donc de ne pas vous limiter à l'aspect purement utilitaire des mathématiques. Même si ce cours sera assez difficile, il présentera des jolies choses sur le plan mathématique avec de nombreuses applications en mécanique.

Aux dix séances de cours magistraux, s'ajouteront neuf séances de TD, deux séances de TT et une heure(s) de TP ou "info TD".

7. Mot lui même ré-inventé par un Français, Jacques Perret, à l'opposé des allemands, qui n'ont fait que reprendre le mot anglais. Voir par exemple <http://www.presse-francophone.org/apfa/motdor/etymolog/ordinate.htm> ou <http://fr.wiktionary.org/wiki/ordinateur>.

Ouvrages utilisés

Un certain nombre d'ouvrages utilisés seront cités tout au long du texte (voir bibliographie p. 307). Ces ouvrages seront dans la mesure du possible disponibles à la bibliothèque de Lyon I, voire sur Internet.

Les ouvrages de références les plus utilisés dans ce cours sont les suivants :

- Deux petits ouvrages couvrant très largement le domaine des mathématiques pour l'ingénieur (au delà du programme de ce cours) et assez concis : [Gué+04; Fre03];
- Sur les distributions, un ouvrage assez pédagogique : [GW03];
- Sur les distributions, deux ouvrages un peu théoriques mais complets (ces ouvrages contiennent aussi une petite partie sur les fonctions complexes) : [Kib01; Pet98];
- Sur les fonctions complexes, un ouvrage un peu théorique mais complet : [Pab95];
- Sur les fonctions complexes et leurs applications en mécanique des fluides, un ouvrage de référence : [AF03];
- Bonne introduction aux fonctions complexes : [Gué+04, p. 65 à 90, fascicule 5];
- Bonnes introductions aux distributions et aux fonctions complexes : [LT09, chap. 4 et 5];
- Sur le web, vous pourrez trouver de gros ouvrages un peu théoriques (mais accessibles, au sens informatique du terme!) :
 - Quelques rappels sur les nombres complexes, théorie des fonctions holomorphes : [Gir04];
 - Un ouvrage complet sur les fonctions complexes : [Dol90];
 - Éléments sur les fonctions complexes et les distributions : [Har10];
 - Un recueil assez complet sur les distributions : [Ciu];
- En guise de révision (ou d'introduction) à l'intégration de Lebesgue et aux espaces de Hilbert et en guise d'introduction aux distributions : [GW03, chapitres IV, V, VIII et IX];
- Une très bonne introduction simplifiée aux éléments finis : [Sal11]

On pourra aussi consulter Wikipédia aux rubriques suivantes :

- Série Entière : http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_entière
- Fonction holomorphe : http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe
- Exponentielle réelle et complexe : http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle
- Logarithme complexe : http://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_complexe
- Le théorème des résidus : http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus
- Les distributions : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathématiques\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathématiques))

On pourra aussi consulter trois extraits, concis et pédagogiques de la revue [BC18] : Les nombres complexes (pages 70 et 71), Les séries entières (pages 72 et 73) et La théorie des distributions (pages 90 et 91), disponibles sur Internet aux adresses suivantes : http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_complexe.pdf, http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_series_entieres.pdf et http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_distributions.pdf.

D'autres URL sont données dans le polycopié de cours.

Première partie

Analyse complexe

Fonctions holomorphes

Ce chapitre s'appuie sur [Pab95, chap. 1] et [Sko91, chap. II]. On pourra aussi consulter http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe

1.1. Rappels sur les complexes

Nous supposons connues toutes les notions sur le corps \mathbb{C} des complexes. L'annexe A, non traitée en cours, propose quelques rappels. On pourra traiter, à titre de révisions sur les nombres complexes, l'exercice 1.6 du TD 1 et l'exercice 1.1 du TP 1.

1.2. Introduction

Applications de ces notions à la mécanique (cf chapitre 5) :

- Calcul de certaines intégrales (ou séries) utiles à l'ingénieur ;
- Transformations conformes et applications à la mécanique des fluides : étude d'écoulements plans potentiels et maillages automatiques ;

1.3. Dérivation au sens des complexes : fonctions holomorphes

1.3.1. Dérivation dans \mathbb{R}

La notion de dérivée de fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vous est déjà familière. On peut l'approcher par un calcul de pentes moyennes¹ ou alors de façon suivante : en zoomant² à l'infini la courbe représentative d'une fonction dérivable f au voisinage d'un point d'abscisse x_0 , on peut voir apparaître une droite de pente $f'(x_0)$. En terme de notations, on note cela sous la forme : en x_0 , il existe un nombre noté $f'(x_0)$ tel que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1.1)$$

ce qui signifie encore, en x_0

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x - x_0| \leq \eta \implies \left| f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \varepsilon \right) \quad (1.2)$$

Si on traduit (1.2), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sera dérivable en un point x_0 et aura pour nombre dérivé en ce point $f'(x_0)$ ssi "l'écart entre $f'(x_0)$ et le taux d'accroissement de f entre x et x_0 (défini comme $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$) est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que x est suffisamment proche de x_0 ". On peut aussi mettre (1.2) sous la forme équivalente suivante : il existe une fonction ε tendant vers 0 au voisinage de 0 telle que, pour h assez petit,

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h). \quad (1.3)$$

1. Voir par exemple [Bas11b, chap. 1] disponible sur http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf, [Bas18a, section 4.1] ou alors les pages 14 à 21 d'un très bon ouvrage de vulgarisation [BR] disponible sur <http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Kekeya.html>.

2. Voir [Bas15, transparent 23/60], disponible sur http://utbmjb.cher-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf.

1.3.2. Différentiabilité

Si maintenant f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , la définition (1.3) peut s'étendre de la façon suivante : on dit que f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire $df(x_0)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p (appelée différentielle ou application linéaire tangente) et une fonction ε tendant vers 0 au voisinage de 0 telle que, pour h assez petit

$$f(x+h) = f(x) + df(x_0).h + h\varepsilon(h). \quad (1.4)$$

Cette notion de différentielle est liée aux dérivées partielles³.

1.3.3. Dérivation dans \mathbb{C}

On rappelle que, dans \mathbb{C} , muni du module qui est une norme, dire que le complexe z tend vers z_0 revient à dire que $|z - z_0|$ tend vers zéro dans \mathbb{R} , ce qui est aussi équivalent à dire que les parties réelle et imaginaire de z tendent respectivement vers les parties réelle et imaginaire de z_0 . \diamond

On se donne maintenant une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} et on étend la définition (1.1) de la façon suivante

DÉFINITION 1.1 (\mathbb{C} -dérivabilité). Une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dite dérivable en z_0 s'il existe un nombre noté $f'(z_0)$ tel que

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (1.5)$$

ce qui est encore équivalent à

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (1.6)$$

Il suffit de recopier (1.2) en changeant les x en z et \mathbb{R} en \mathbb{C} et de lire $|\cdot|$ comme le module, c'est-à-dire : en z_0 , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z - z_0| \leq \eta \implies \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \varepsilon \right) \quad (1.7)$$

Cela peut aussi s'écrire sous une forme équivalente à (1.3) : il existe une fonction ε (de \mathbb{C} dans \mathbb{C}) tendant vers 0 au voisinage de 0 telle que, pour h de module assez petit

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + h\varepsilon(h). \quad (1.8)$$

REMARQUE 1.2. Cette notion apparemment, identique à celle de \mathbb{R} est en fait, beaucoup plus forte que son analogue réel. Il faut bien comprendre que, contrairement à (1.4), $hf'(z)$ désigne la multiplication complexe de $f'(z)$ par h et non au sens des applications linéaires. Cette spécificité du corps des complexes \mathbb{C} rendra cette définition très puissante : on verra (voir théorème 3.27 page 37) que toute fonction dérivable est de classe C^∞ et développable en série entière, ce qui est tout à fait faux pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Cette particularité provient entre autre du fait que la définition de la dérivabilité dans \mathbb{C} est plus forte que la simple différentiabilité. La déformation locale par f des grilles autour d'un point où elle est dérivable (voir section 1.3.5) fait qu'elle se déforme de façon « très régulière ».

On pourra consulter [Har10, section III.1].

EXEMPLE 1.3. Montrer que la fonction $z \mapsto z^2$ est dérivable de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de dérivée $2z$.

DÉMONSTRATION. On calcule, pour h complexe non nul :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = 2z + h,$$

ce qui tend vers $2z$ quand h tend vers zéro. Ce calcul est identique au cas réel. \square

³. Voir votre cours de MOI1 ou [Bas11b, section 2.4.1] ou [Bas11a, chap. 4] disponible sur http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/54/85/PDF/coursMT25_P07.pdf.

EXEMPLE 1.4. On montrera dans l'exercice 1.2 des TD que, de façon plus générale, pour tout n entier, la fonction $z \mapsto z^n$ est dérivable de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de dérivée nz^{n-1} . De façon plus générale, comme dans \mathbb{R} , toute fonction polynomiale ou rationnelle est dérivable, avec les mêmes règles de calcul que dans \mathbb{R} .

EXEMPLE 1.5. Montrer que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point.

DÉMONSTRATION. On calcule, pour h complexe non nul :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Si on écrit $h = \rho e^{i\theta}$, on a donc

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

Quand h tend vers 0, ρ tend vers 0, mais la fonction $e^{-2i\theta}$ n'a pas de limite (puisque dépend de θ). \square

EXEMPLE 1.6. On peut introduire la fonction exponentielle de la façon suivante (comme dans [Kib01, chap. 9]) : on suppose connues les fonctions sin et cos et on pose

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x) (\cos y + i \sin y). \quad (1.9)$$

On peut montrer à la main que cette fonction est dérivable et égale à sa dérivée. Mais on préférera la démarche inverse : on définit la fonction exponentielle comme série entière (voir section 2.5.1) généralisant la somme infinie vue dans \mathbb{R} , définition dont on peut déduire les lignes trigonométriques comme séries et en déduire ensuite (1.9).

1.3.4. Règles de calculs pour la dérivation dans \mathbb{C}

Donnons deux propositions et qui généralisent deux résultats pour la dérivabilité dans \mathbb{R} . La preuve de la première, facile et identique au cas réel, est laissée au lecteur.

PROPOSITION 1.7. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et g et f deux fonctions dérivables respectivement en z_0 et $g(z_0)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 et

$$(f \circ g)'(z_0) = (f' \circ g)(z_0)g'(z_0). \quad (1.10)$$

PROPOSITION 1.8. Soient $\xi_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction dérivable en ξ_0 . On suppose de plus que f est inversible sur un voisinage⁴ de ξ_0 et que $f'(\xi_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $z_0 = f(\xi_0)$ et

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(z_0)}. \quad (1.11)$$

DÉMONSTRATION. Comme dans le cas réel, il suffit d'appliquer la proposition 1.7 à f et f^{-1} , dont la composée vaut l'identité, de dérivée égale à 1. \square

Les autres règles de dérivation habituelles (produit, rapport, combinaison linéaire, mais pas la puissance et la racine carrée, non encore formellement définies dans \mathbb{C} ; voir par exemple [Bas19, Chapitre "Fonctions (de \mathbb{R} dans \mathbb{R})"].) s'appliquent de façon absolument identique au cas réel.

DÉFINITION 1.9 (Holomorphie). Soient U un ouvert⁵ de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur U . On dit que f est holomorphe sur U si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point de U .

Naturellement, l'holomorphie entraîne la continuité.

4. ou sur une boule ouverte de centre ξ_0 .

5. ou, pour simplifier, une boule ouverte

1.3.5. Représentation de fonctions complexes

Une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} peut se représenter par une image bidimensionnelle et une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} peut se représenter par une image tridimensionnelle. Si on identifie \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 , une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} peut se représenter dans ... \mathbb{R}^4 , ce qui n'est pas très aisé !

Une première possibilité est de séparer partie réelle et partie imaginaire ou module et argument et de tracer chacun d'eux comme fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Il existe aussi une façon de traiter par des couleurs, plus ou moins proches du bleu et du rouge, plus ou moins délavée. Ces représentations ne montrent pas le côté spécifiques des fonctions holomorphes.

REMARQUE 1.10. Toutes les fonctions matlab citées dans ce cours sont disponibles sur le web à l'adresse habituelle de ce cours.

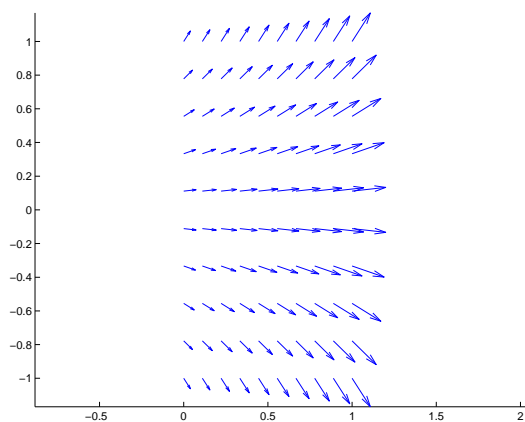


FIGURE 1.1. La représentation de la fonction $z \mapsto \exp(z)$ comme champ de vecteurs.

Une autre façon de faire est de représenter une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , par un champ de vecteurs, comme le montre par exemple la figure 1.1 où a été représentée la fonction $z \mapsto \exp(z)$ (cette fonction sera introduite en section 2.5.1) et qui a été obtenue en tapant sous matlab

```
trace_complexe_champ(0,1,10,-1,1,10,inline('exp(x)'))
```

Une autre façon est de représenter dans \mathbb{C} une grille avec des segments d'équations $\operatorname{Re} z = \text{constante}$ et $\operatorname{Im} z = \text{constante}$ (en coordonnées cartésiennes) ou $r = \text{constante}$ et $\theta = \text{constante}$ (en coordonnées polaires) et l'image de cette grille par la fonction f . Voir par exemple la figure 1.2 où a été représentée la fonction $z \mapsto \exp(z)$ qui a été obtenue en tapant sous matlab

```
trace_complexe(0,1,10,0,0.5,20,1000,inline('exp(x)'))
trace_complexe(0,1,10,30,60,10,1000,inline('exp(x)'),[],1)
trace_complexe(0,1,10,30,60,10,1000,inline('exp(x)'),[],2)
```

Une autre jolie figure est disponible aux adresses suivantes :

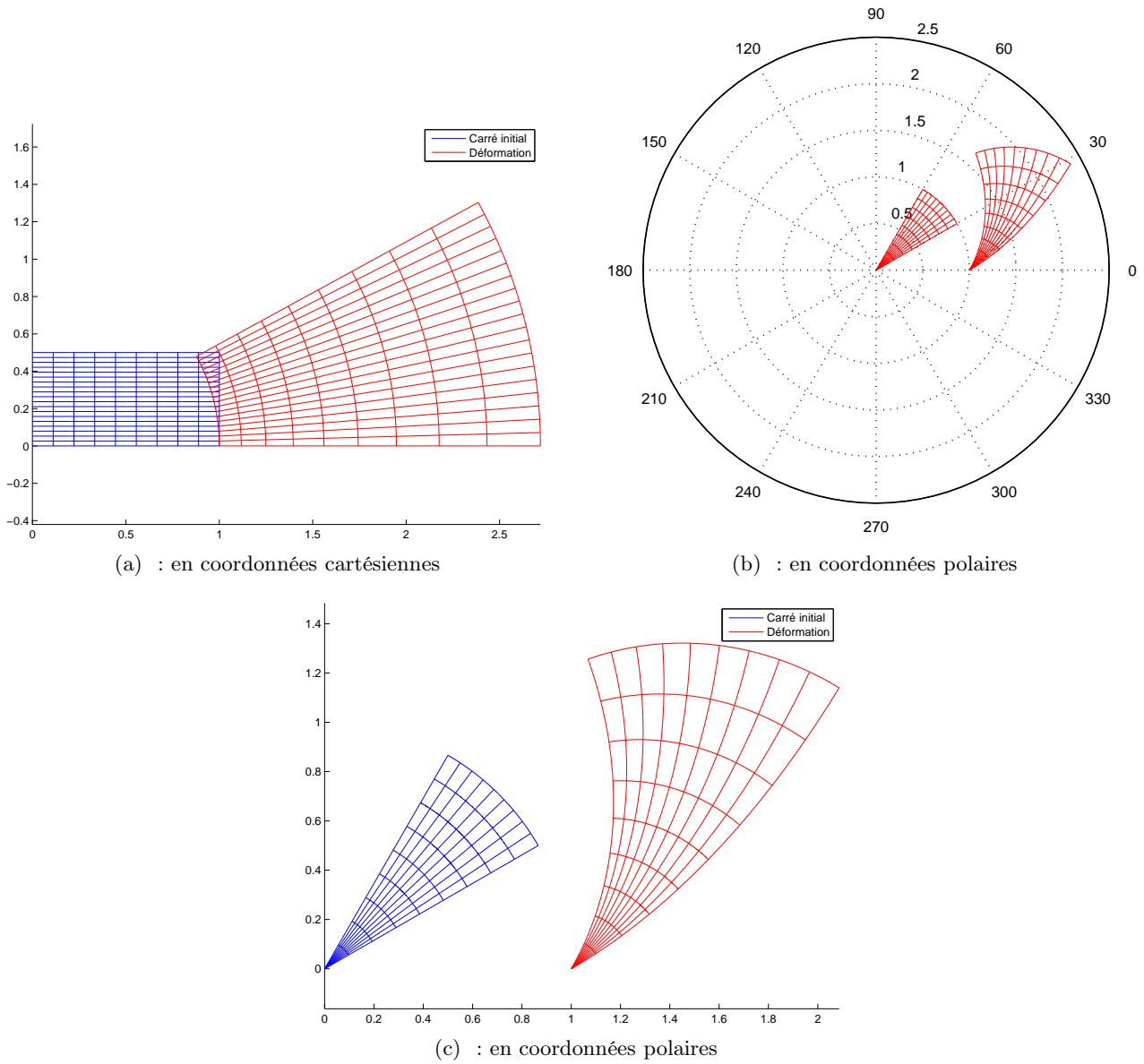
http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conformal_map.svg

Elle est représentée en figure 1.3 : elle correspond à la fonction

$$f(z) = (1 + 2i) \left((z + z_0)^2 + a(z + z_1)^3 + b(z + z_2)^4 \right), \quad (1.12)$$

et a été obtenue en tapant sous matlab

FIGURE 1.2. La représentation de la fonction $z \mapsto \exp(z)$ comme déformée d'une grille.

```

xmin=-1;
xmax=1;
nx=15;
ymin=-1;
ymax=1;
ny=15;
nfin=1000;
z0 = 1+ 2*i;
z1 = 0.1+ 0.2*i;
z2 = 0.2+ 0.3*i;

```

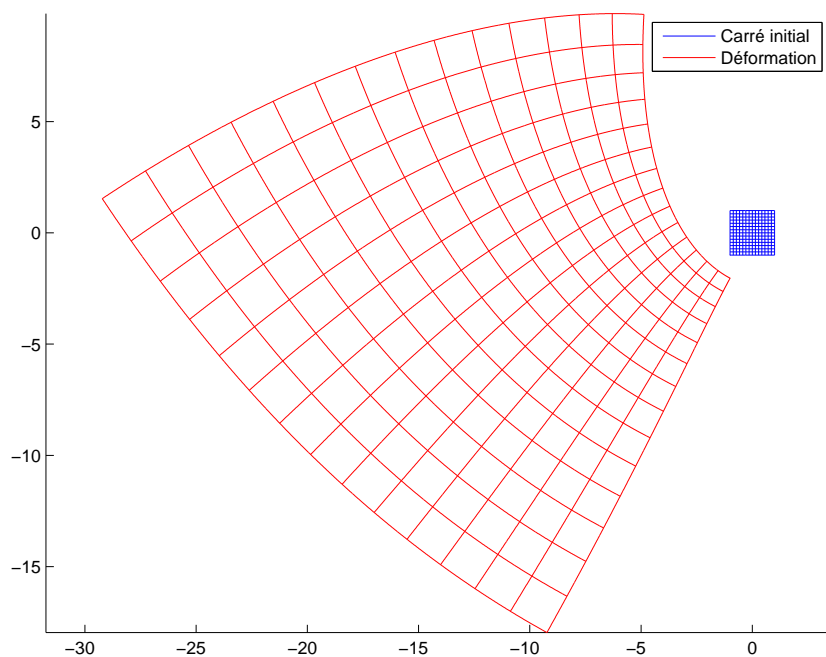


FIGURE 1.3. La représentation de la fonction f définie par (1.12).

$a = 0.01;$

$b = 0.02;$

```
F=inline(' (1+2*i)*((Z+z0).^2+a*(Z+z1).^3+b*(Z+z2).^4 ) ', 'Z', 'z0', 'z1', 'z2', 'a', 'b');
trace_complexe(xmin, xmax, nx, ymin, ymax, ny, nfin, F, 1, 0, z0, z1, z2, a, b);
```

REMARQUE 1.11. Sur les figures 2(a) et 1.3, on constate que les déformées des grilles semble se faire à angle constant. On peut montrer que si une fonction f est holomorphe et si $f'(z)$ est non nul, la déformée locale des grilles correspond à celle donnée par une similitude du plan et conserve donc les angles droits. On renvoie aux exercices de TD 1.10 et 1.11, où l'on montre cela. On pourra aussi regarder l'exercice 1.2 ou la section 1.3 des TP. Une définition plus précise de cela est donnée au cours du chapitre 4.

Au début de la section 1.3.1, nous avons rappelé que dans le cadre de l'analyse réelle, la dérivée d'une fonction peut être mise en évidence par un zoom à l'infini en un point de la courbe. Dans le cas de l'analyse complexe, on peut aussi zoomer à l'infini au voisinage d'un point la grille initiale et sa déformée et si la dérivée en ce point est non nulle, on peut voir la déformée locale de la grille comme une simple application d'une similitude. Voir l'exercice facultatif 1.10 des TD et l'exercice 1.2 des TP.

Voir par exemple la figure 1.4 qui montre des simulations pour la fonction \exp autour de $1+i$: différents carrés de cotés $h > 0$ sont tracés autour de $1+i$ et leurs déformées par f et leur approximation par la linéarisée de f définie grâce à f' , et ce, pour des valeurs de h de plus en plus petites.

1.3.6. Conditions de Cauchy-Riemann

Une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} peut aussi être vue comme fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} en considérant la fonction $(x, y) \mapsto f(x + iy)$, que l'on note $f(x, y)$ par abus de notation. On peut donc parler de différentielle (sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2) et de dérivées partielles de f par rapport à x et y (voir section 1.3.2).

Une fonction \mathbb{C} -dérivable est différentiable mais la réciproque n'est vraie que si les conditions dites de Cauchy-Riemann sont vérifiées.

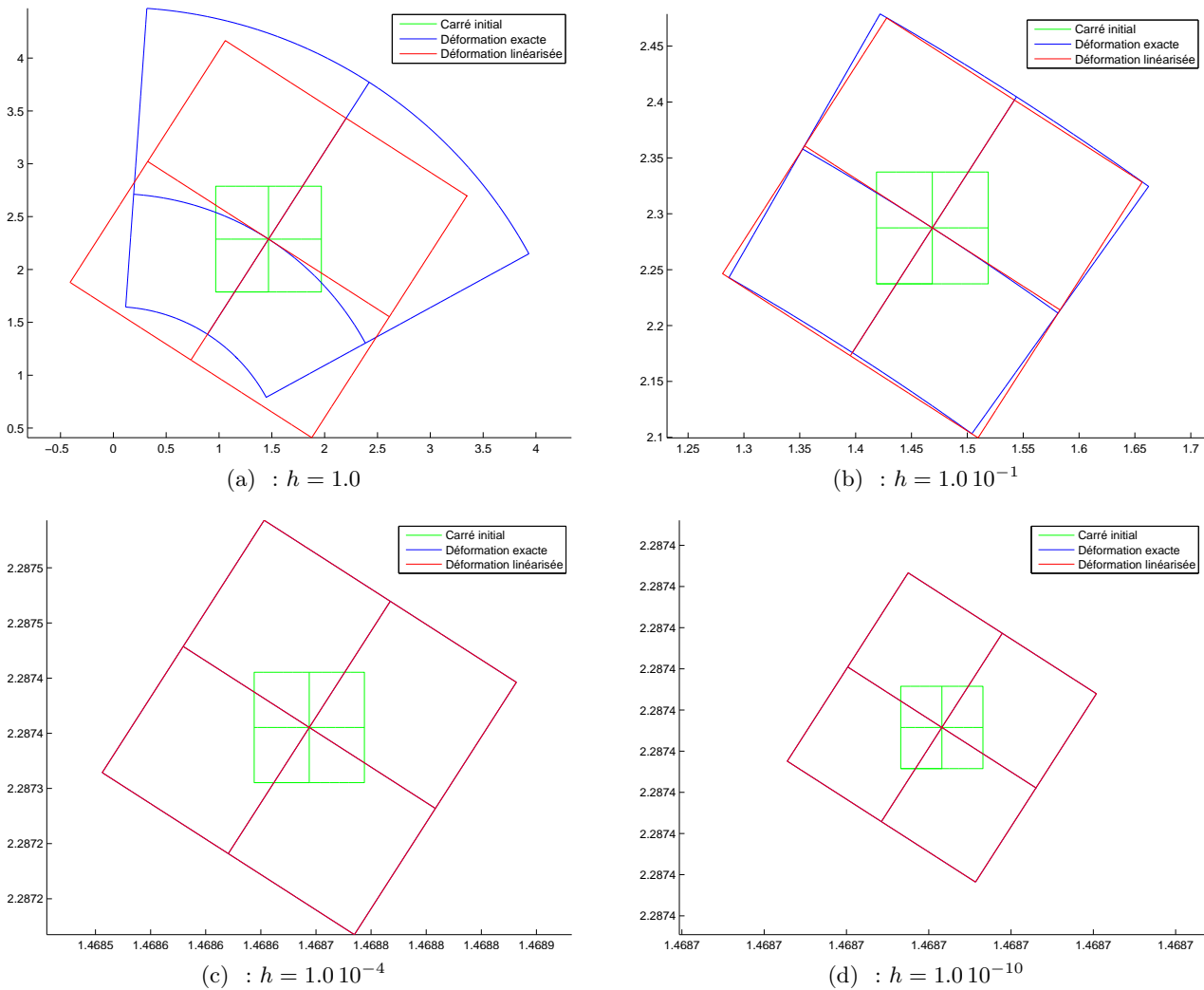


FIGURE 1.4. La représentation de la fonction $z \mapsto \exp(z)$ comme déformée d'une grille autour de $1 + i$

On rappelle que f est \mathbb{R}^2 -différentiable au point $z_0 = (x_0, y_0)$ (voir équation (1.4)) ssi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que si h et k sont des réels assez petits, on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right). \quad (1.13)$$

De plus, les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) existent et

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.14)$$

REMARQUE 1.12. Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour que f soit \mathbb{R}^2 -différentiable en z_0 est que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au voisinage de z_0 et qu'elles soient continues en z_0 (on dit dans ce cas que f est \mathcal{C}^1). Cette condition sera souvent vérifiée en pratique, de telle sorte que *dans ce cas*, f est dérivable en z_0 ssi sont vérifiées les conditions de Cauchy-Riemann (1.15).

PROPOSITION 1.13 (Conditions de Cauchy-Riemann). *Soit f une fonction définie au voisinage de z_0 . Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(1) f est dérivable en z_0 ;

(2) f est \mathbb{R}^2 -différentiable en z_0 et on a, en ce point, les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \quad (1.15)$$

Dans ce cas, on a de plus

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \quad (1.16)$$

DÉMONSTRATION.

- Démontrons le sens $1 \implies 2$.

On admet que f est \mathbb{R}^2 -différentiable en z_0 . Démontrons donc (1.15) et (1.16).

Supposons donc f dérivable en $z_0 = (x_0, y_0)$. D'après (1.6), on a donc

$$f'(z_0) = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + H) - f(z_0)}{h}. \quad (1.17)$$

Si dans (1.17), on choisit $H = h \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

soit donc

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0). \quad (1.18)$$

De même, si dans (1.17), on choisit $H \in i\mathbb{R}$, on a $H = ih$ où $h \in \mathbb{R}$ et

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{ih},$$

et donc

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (1.19)$$

En comparant (1.18) et (1.19), il vient donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{i \partial y}(z_0)$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Enfin, (1.16) provient de (1.18) et (1.19). On admet que, dans ce cas, f est \mathbb{R}^2 -différentiable.

- La preuve du sens $2 \implies 1$ sera proposée dans l'exercice de TD facultatif 1.9.

□

EXEMPLE 1.14. Si on reprend l'exemple 1.3, la fonction f est évidemment \mathbb{R}^2 -différentiable (car de classe \mathcal{C}^1) et les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x + iy), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2i(x + iy) = 2iz, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2z, \quad (1.20a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2iz, \quad (1.20b)$$

$$(1.20c)$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 2z + i(2iz) = 2z(1 - 1) = 0.$$

Donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées et f est donc \mathbb{C} -dérivable. De plus, d'après (1.16) et (1.20a),

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2z,$$

Bref, la fonction f est \mathbb{C} -dérivable, de dérivée $2z$.

EXEMPLE 1.15. Si on reprend l'exemple 1.5, la fonction est évidemment différentiable et les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + i(-i) = 1 - i^2 = 2,$$

et donc la fonction n'est pas dérivable.

En notant les parties réelles et imaginaires de f sous la forme

$$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y), \quad (1.21)$$

on a

LEMME 1.16 (Autres expressions des conditions de Cauchy-Riemann). *Les conditions de Cauchy-Riemann (1.15) sont équivalentes à*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (1.22a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.22b)$$

De plus, si f est \mathbb{C} -dérivable, on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.23)$$

DÉMONSTRATION. On a, grâce à $f = P + iQ$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}, \end{aligned}$$

et donc, les conditions de Cauchy-Riemann donnent

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

De plus, si f est \mathbb{C} -dérivable, on a, d'après (1.16) :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(P + iQ), \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y}, \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x}, \end{aligned}$$

ce qui montre (1.23). □

REMARQUE 1.17. On annonce le lien avec la mécanique des fluides et le chapitre 5, en remarquant que la seconde des conditions de Cauchy-Riemann est

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

On admet le lemme suivant en considérant qu'une fonction de z est aussi une fonction de z et de \bar{z} .

LEMME 1.18 (Autres expressions des conditions de Cauchy-Riemann). *Les conditions de Cauchy-Riemann (1.15) sont équivalentes à*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (1.24)$$

De plus, pour une fonction dérivable, on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.25)$$

REMARQUE 1.19. On rappelle qu'une fonction dont les dérivées partielles existent et sont continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2 est différentiable sur cet ouvert. Ainsi, en pratique, quand on étudie une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , elle est souvent régulière en ses deux arguments x et y et donc différentiable. Mais pour qu'elle soit \mathbb{C} -dérivable, il faut examiner ensuite si les conditions de Cauchy-Riemann (1.15) ou (1.22) sont vérifiées. On pourra consulter par exemple l'exercice 1.3 des TD.

Donnons une dernière propriété, admise :

PROPOSITION 1.20. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de \mathbb{C} . Si $f' = 0$ sur U , alors f est constante.*

Séries entières et fonctions usuelles sur \mathbb{C}

Ce chapitre s'appuie sur [Pab95, chap. 2] et [Sko91, chap. I]. On pourra aussi consulter : http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_entière

2.1. Rappels sur les séries et les développements limités

Nous supposons connues toutes les notions sur les développements limités de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et qui constituent une approche locale d'une fonction f : sous certaines hypothèses de régularité, on a¹ :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + h^n \frac{f^n(a)}{n!} + o(h^n). \quad (2.2)$$

On pourra par exemple consulter http://fr.wikipedia.org/wiki/Développement_limité

Les notions sur les série à valeurs dans \mathbb{R} sont connues : on rappelle que par définition

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n. \quad (2.3)$$

On pourra par exemple consulter [http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_\(mathématiques\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_(mathématiques))

Les séries entières sur \mathbb{R} généralisent les deux notions précédentes : Sous certaines hypothèses, on a, pour (certains) x réels,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n. \quad (2.4)$$

2.2. Introduction

Les séries entières constituent un puissant moyen de définir des fonctions holomorphes. Elles permettront par exemple de définir la fonction exponentielle sur \mathbb{C} . Elles généralisent la définition (2.3) puisque l'on étudiera des sommes du type $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, ce qui constitue aussi une généralisation des développements limités (2.2) : a et h sont cette fois-ci à valeurs complexes et la somme est infinie. Elles constituent aussi une généralisation de (2.4).

2.3. Définitions

2.3.1. Définitions

DÉFINITION 2.1. Une série entière à coefficients complexes est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (2.5)$$

1. Pour les notations o , on rappelle que (2.2) est équivalent à

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + h^n \frac{f^n(a)}{n!} + h^n \varepsilon(h), \quad (2.1)$$

où h est une fonction tendant vers 0 au voisinage de 0.

dont on dit qu'elle converge (à z fixé) s'il existe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n z^n. \quad (2.6)$$

2.3.2. Convergence d'une série entière

La définition du rayon de convergence est donnée en annexe C page 167. Voir section C.1 page 167.

DÉFINITION 2.2. Pour tout complexe z_0 et pour tout réel $r \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on note $D_f(z_0, r)$, le disque fermé de centre 0 et de rayon r et $D(z_0, r)$, le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r .

On a alors le lemme suivant :

LEMME 2.3. *Le nombre R vérifie :*

- (1) *Si $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente.*
- (2) *Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ ne tend pas vers zéro et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est divergente.*
- (3) *Pour tout réel r tel que $0 < r < R$, la série converge normalement sur $D_f(0, r)$. Cela signifie qu'il existe une série numérique convergente $\sum u_n$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ telle que*

$$\forall z \in D_f(0, r), \quad |a_n z^n| \leq u_n. \quad (2.7)$$

Voir preuve en sections C.1 page 167 et C.2 page 168.

En pratique, pour déterminer le rayon de convergence, on utilise plutôt les deux formules suivantes, admises (fondées respectivement sur les règles de Cauchy et de d'Alembert sur les séries ; voir par exemple preuve dans [RDO88]) :

LEMME 2.4 (Formule d'Hadamard). *Définissons le nombre $R \in \overline{\mathbb{R}}$ par la "formule d'Hadamard"*

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}, \quad (2.8a)$$

où \limsup désigne la limite supérieure, c'est-à-dire la plus grande des valeurs d'adhérences et

$$R = \frac{1}{L}. \quad (2.8b)$$

Le nombre R est égal au rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Un autre moyen de déterminer R est d'utiliser la "formule de D'alembert" :

LEMME 2.5 (formule de D'alembert). *Le rayon de convergence R peut être obtenu par :*

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad (2.9)$$

et (2.8b).

Attention, au bord du disque de convergence (si $|z| = R$), tout peut arriver : convergence ou divergence. On consultera l'annexe C page 167 et en particulier la section C.3 page 168.

EXEMPLE 2.6. On pose $a_n = 1$. On a $R = 1$ et l'expression explicite de la série entière

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z| < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad (2.10)$$

DÉMONSTRATION.

- Pour montrer que $R = 1$ et retrouver l'expression (2.10), on raisonne à la main. On pose, classiquement, pour tout entier n ,

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n.$$

Pour expliciter S_n , on écrit classiquement, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} S_n(z) &= 1 + z + z^2 + \dots + z^n, \\ zS_n(z) &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n+1}, \end{aligned}$$

et par différence

$$(z - 1)S_n(z) = z^{n+1} - 1. \quad (2.11)$$

Si $z = 1$, on a

$$S_n(z) = n + 1,$$

et cette somme diverge. Si $z \neq 1$, on déduit de (2.11), l'expression usuelle

$$S_n(z) = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}. \quad (2.12)$$

Si $|z| < 1$, on sait que z^{n+1} tend vers zéro et donc la somme converge et on a

$$S_n(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

La rayon est donc égal à 1, puisque la série diverge en $z = 1$ et est convergente pour tout z tel que $|z| < 1$.

- Pour montrer seulement que $R = 1$, on peut utiliser le critère 2.9. En effet, on a $a_{n+1}/a_n = 1$, ce qui tend vers 1 en l'infini. □

EXEMPLE 2.7. On pose $a_n = 1/n$. Ainsi $a_{n+1}/a_n = (n+1)/n$, qui tend vers 1. On a ainsi $R = 1$. De plus, la série est convergente en $z = -1$ et divergente en $z = 1$. En effet, pour $z = 1$, la somme $\sum 1/n$ est divergente et en $z = -1$, la somme $\sum (-1)^n/n$ (série alternée) est convergente.

En fait, la série converge partout sur le cercle de centre O et de rayon 1 sauf en 1. Voir l'exemple C.8 page 170 ou [Pab95, exemple 1.3 p. 13]

EXEMPLE 2.8. On pose $a_n = 1/n!$. On a $R = +\infty$. C'est la série correspondant à l'exponentielle que l'on étudiera en section 2.5.1.

EXEMPLE 2.9. On pose $a_n = n!$. On a $R = 0$.

La grande force des série entières est que l'on peut les dériver (au sens complexe) autant de fois que l'on veut, terme à terme, dans le disque de convergence :

PROPOSITION 2.10 (Dérivation des séries entières). *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La somme de cette série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2.13)$$

est indéfiniment dérivable (au sens de la définition 1.1) dans le disque $|z| < R$. Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}, \quad (2.14)$$

de sorte que

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (2.15)$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < R \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \quad (2.16)$$

Le rayon de convergence de toutes les séries entières $f^{(k)}$ est égal à celui de f .

DÉMONSTRATION. Admise. Voir [RDO87, section 3.2.1.2], [Pab95, chap. 2, p 15] et [Sko91, chap. I, p. 2] ou encore la page 18 de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf>, elle-même issue de [Sai08]. \square

REMARQUE 2.11. La formule (2.16) généralise donc la notion de développements limités.

REMARQUE 2.12. Remarquons que

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2.4. Fonctions analytiques

DÉFINITION 2.13 (Fonction développable en série entière (ou analytique) en un point). Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage U d'un point z_0 de \mathbb{C} . La fonction f est dite développable en série entière (ou analytique) au point z_0 s'il existe

- un nombre r tel que $D(z_0, r) \subset U$;
- une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.17)$$

LEMME 2.14. Toute fonction analytique en un point est dérivable en ce point.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de la proposition 2.10. \square

DÉFINITION 2.15 (Fonction analytique sur un ouvert). Une fonction f est dite analytique dans U si elle est développable en série entière (ou analytique) en tout point de U .

On en déduit donc :

LEMME 2.16. Sur un ouvert, l'analyticité entraîne l'holomorphie.

Le gros résultat (très surprenant !) de l'analyse complexe est la réciproque du lemme 2.16 : toute fonction holomorphe est analytique (voir théorème 3.27 page 37).

2.5. Fonctions usuelles sur \mathbb{C}

Cette section s'appuie sur [Pab95, chap. 3] et [Sko91, chap. II, section 4].

Nous allons pouvoir maintenant définir la plupart des fonctions complexes et qui généralisent à \mathbb{C} , les fonctions déjà connues² sur \mathbb{R} .

2.5.1. Fonction exponentielle

Reprenons l'exemple 2.8 page 15 Si on pose $a_n = 1/n!$. On a $R = +\infty$. On pose donc (nous verrons plus tard (voir remarque 2.21) pourquoi on l'appelle et on la note ainsi).

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \quad (2.19)$$

Voir les graphiques 1.1 page 6 et 1.2 page 7

LEMME 2.17. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}. \quad (2.20)$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que le conjugué de la somme est la somme du conjugué et que le conjugué du produit est le produit du conjugué; il vient donc

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{z}^n = e^{\overline{z}}$$

□

LEMME 2.18. La fonction exponentielle est C^∞ sur \mathbb{C} et elle est égale à sa dérivée.

DÉMONSTRATION. Puisque le rayon de convergence de cette série est égal à $+\infty$, d'après la proposition 2.10, elle est C^∞ sur \mathbb{C} et on a, en dérivant terme à terme, au sens des complexes

$$(\exp(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z).$$

□

On a la proposition suivante qui généralise la propriété bien connue³ de l'exponentielle sur \mathbb{R} :

2. Nous supposons connus les résultats suivants : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.18a)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (2.18b)$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.18c)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (2.18d)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.18e)$$

et pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (2.18f)$$

Ces formules peuvent se démontrer à partir de la formule de Taylor.

3. qui est

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}. \quad (2.21)$$

PROPOSITION 2.19. *On a*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (2.22)$$

DÉMONSTRATION. On donne une preuve, fondée sur les familles sommables, qui généralise la notion de série et qui permet, pour simplifier, de sommer une somme infinie comme les sommes finies, en utilisant la notion d'associativité bien connue pour les sommes finies, mais nullement évidentes pour les sommes infinies. Pour plus de détails, voir par exemple http://fr.wikipedia.org/wiki/Famille_sommable ou [Sko91, chap. 0].

Si on développe le produit $e^{z_1} e^{z_2}$ en prenant les seuls premiers termes on a donc, sans se soucier de l'ordre (et on raisonnant donc comme si l'on développait un polynôme) :

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1^3}{6} + \dots\right) \left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{6} + \dots\right), \\ &= 1 + z_1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + z_1 z_2 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^3}{6} + z_1 \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_1^2}{2} z_2 + \frac{z_1^3}{6} + \dots, \\ &= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{1}{2} (z_2^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2) + \frac{1}{6} (z_2^3 + 3z_1 z_2^2 + 3z_1^2 z_2 + z_1^3) + \dots, \\ &= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{1}{2} (z_1 + z_2)^2 + \frac{1}{6} (z_1 + z_2)^3 + \dots \end{aligned}$$

On reconnaît dans ce développement le début de $e^{z_1+z_2}$ et on admet qu'il est de même pour tous les résultats.

Un raisonnement plus rigoureux, en admettant toujours que l'on peut sommer dans « n'importe quel ordre » permet d'écrire :

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{z_1^n}{n!} \frac{z_2^m}{m!}$$

soit

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{z_1^n}{n!} \frac{z_2^m}{m!}.$$

Cette façon de faire généralise en fait ce que l'on écrit sur les sommes finies

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \sum_i a_i \sum_j b_j.$$

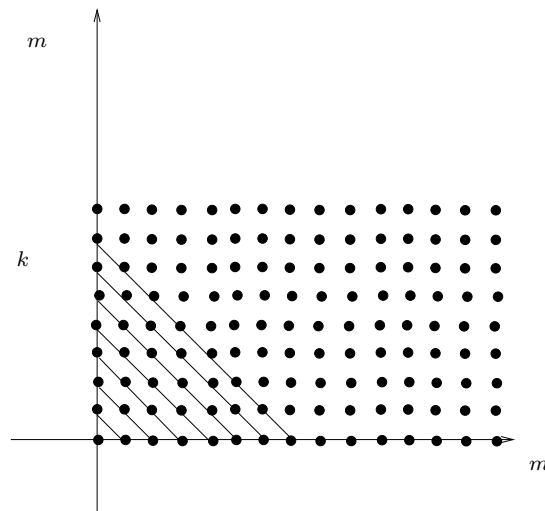


FIGURE 2.1. Partition de $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p + q = k\}$.

Pour calculer la somme $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$, on réalise une partition de \mathbb{N}^2 en sommant « en diagonale » (voir figure 2.1). On a donc, par associativité (c'est-à-dire, en sommant dans « n'importe quel ordre »)

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=k}} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^q}{q!}. \quad (2.23)$$

On réécrit la seconde somme en posant $l = p \in \{0, \dots, k\}$ et $q = k - p = k - l$:

$$\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=k}} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^q}{q!} = \sum_{l=0}^k \frac{z_1^l}{l!} \frac{z_2^{k-l}}{(k-l)!}.$$

On en déduit

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} z_1^l z_2^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k C_k^l z_1^l z_2^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z_1 + z_2)^k,$$

d'après la formule du binôme de Newton. Bref, de (2.23), on déduit

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z_1 + z_2)^k = e^{z_1 + z_2}.$$

◇

□

On a aussi

PROPOSITION 2.20. *On a*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{nz} = (e^z)^n. \quad (2.24)$$

DÉMONSTRATION. Laissée au lecteur, elle se démontre par récurrence sur n grâce à la propriété 2.19. □

REMARQUE 2.21. La notation $\exp(z) = e^z$ se justifie donc *a posteriori* de deux façon différentes : la propriété (2.22) est l'analogie de

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \quad (2.25)$$

De plus, en comparant (2.19) et (2.18a), on constate donc que l'exponentielle sur \mathbb{C} est une extension de l'exponentielle sur \mathbb{R} et coïncide avec celle-ci sur l'axe réel.

REMARQUE 2.22. La fonction exponentielle peut se définir de multiple façon : voir par exemple

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle

<http://megamaths.perso.neuf.fr/Annales/capesexterne2004comp1e.pdf>

<http://megamaths.perso.neuf.fr/Annales/capesexterne2004comp1s.pdf>.

Historiquement, il semblerait que, pour concevoir les règles à calculs permettant de calculer des produits, on ait cherché des fonctions transformant le produit en somme, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad F(ab) = F(a) + F(b). \quad (2.26)$$

On peut alors montrer que la dérivée de cette fonction est l'hyperbole $t \mapsto 1/t$. Cette fonction est le logarithme. Par calcul approché de l'aire sous l'hyperbole, les premières règles à calcul sont créées. D'autres calculs sont aussi exécutés en utilisant le développement en série entière (2.18f) du logarithme (réel) en 1. La fonction réciproque du logarithme est ensuite introduite ; elle est appelée exponentielle et alors la propriété (2.21) n'est qu'une conséquence de (2.26).

Voir par exemple

<http://tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc5/exp.html>

http://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles

Une autre façon de procéder, plus mathématique et fondamentale est de tout oublier, l'exponentielle et la trigonométrie réelle ! On définit ensuite les séries entières comme dans ce cours, puis l'exponentielle complexe par la formule (2.19). On définit alors le cosinus et le sinus comme étant la partie réelle de $e^{i\theta}$ (comme plus loin

dans le lemme 2.23) et on aboutit aux formules (2.18d) et (2.18e). Enfin, par un raisonnement géométrique, on montre que ces lignes correspondent bien aux définitions à partir de l'angle et du cercle trigonométrique.

LEMME 2.23. On retrouve la formule classique

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (2.27)$$

dont on peut déduire les formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad (2.28a)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (2.28b)$$

On retrouve aussi la formule de Moivre : pour tout entier n , pour tout réel θ

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (2.29)$$

Enfin, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2.30)$$

DÉMONSTRATION. Pour montrer (2.27), on écrit, par associativité⁴

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

dans lequel on reconnaît sin et cos :

$$= \cos \theta + i \sin \theta.$$

Pour montrer (2.29), on écrit alors, en utilisant (2.24),

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Enfin, (2.30) est une conséquence de (2.22) et (2.27). \square

REMARQUE 2.24. Comme annoncé dans l'exemple 1.6, l'équation (2.30) est parfois prise comme définition de l'exponentielle complexe (comme dans [Kib01, chap. 9]).

Cette définition permet aussi de retrouver directement que la dérivée de l'exponentielle est elle-même. Voir exercice de TD 2.5.

On a aussi le résultat suivant :

LEMME 2.25.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}. \quad (2.31)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser d'après (2.30) : pour $z = x + iy$, on a

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| |e^{iy}|.$$

Puisque x et y sont réels, on a

$$|e^x| = e^x, \quad (2.32a)$$

$$|e^{iy}| = 1. \quad (2.32b)$$

4. toutes les sommes existent et on admet cette propriété.

On a donc

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

□

REMARQUE 2.26. *Attention*, à ne pas être tenté d'écrire comme dans le cas réel (2.32) si x ou y ne sont pas réels. On se convaincra en prenant un bon contre-exemple que (2.32) n'est pas toujours vrai!

2.5.2. Extension des lignes trigonométrique à \mathbb{C}

PROPOSITION 2.27. *On définit les fonctions cos et sin sur \mathbb{C} , en posant pour z complexe*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (2.33a)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (2.33b)$$

qui définissent des fonctions analytiques sur \mathbb{C} , prolongent le cosinus et le sinus réels, vérifient pour z complexe

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (2.34a)$$

$$(\sin z)' = \cos z \quad (2.34b)$$

et admettent les développements en série entière qui généralisent (2.18d) et (2.18e) : pour z complexe

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (2.35a)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.35b)$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que les formules d'Euler (2.28) valables pour θ peuvent être formellement utilisées pour définir (2.33). Puisque les fonctions e^{iz} et e^{-iz} sont analytiques sur \mathbb{C} , il en est de même des fonctions sinus et cosinus. Pour montrer (2.34a), il suffit d'écrire

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

On montre (2.34b) de la même façon. Enfin, les développements en série entière (2.35a) s'obtiennent en écrivant comme dans la preuve de (2.27) :

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a alors

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

et on déduit alors

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

et

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

dont (2.35) découle. □

On peut aussi retrouver cela à partir des lignes trigonométriques hyperboliques comme [Pab95, p. 115]. \diamond

2.5.3. Trigonométrie et trigonométrie hyperbolique dans \mathbb{C}

Des tas d'autres formules sont relatives aux liens profonds qui unissent les lignes trigonométriques (cos et sin) à leurs homologues hyperboliques (cosh et sinh). Par exemple, on peut poser, en généralisant (2.18b) et (2.18c), pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

et remarquer que dans \mathbb{C} , $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. Voir [Pab95, section 3, chap. 3]. Le lien entre trigonométrie et exponentielle est très profond. Un des exemples classique déjà connu et la preuve des formules de l'exemple A.6 page 143 par exemple. Une autre formule « amusante » est donnée en annexe B.

De même, que l'exponentielle et le logarithme sont deux fonctions réciproques sur \mathbb{R} , nous allons pouvoir maintenant de définir le logarithme complexe, à condition de prendre certaines précautions.

2.5.4. Détermination du logarithme et des fonctions puissances sur \mathbb{C}

Nous allons chercher dans cette section à définir le logarithme complexe, c'est-à-dire la fonction réciproque de l'exponentielle. On se donne donc $z \in \mathbb{C}$ et on cherche ξ tel que

$$e^{\xi} = z. \tag{2.36}$$

2.5.4.1. Détermination continue de l'argument.

Le problème de l'argument d'un nombre complexe est qu'il n'est pas unique.

DÉFINITION 2.28 (Détermination continue de l'argument). Soit U un ouvert de \mathbb{C}^* . Soit $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. On dit que θ est une détermination continue de l'argument si, pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ est un argument de z , c'est-à-dire $z = \rho(z)e^{i\theta(z)}$ où $\rho(z) > 0$, soit encore $z/|z| = e^{i\theta(z)}$.

Sur un ouvert connexe⁵, deux déterminations continues de l'argument différent d'un multiple de 2π .

DÉFINITION 2.29 (La détermination principale de l'argument). Soit U , le complémentaire de l'axe négatif (autrement appelé le plan fendu),

$$U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-. \tag{2.37}$$

L'application qui à $z \in U$ associe l'unique argument de z , $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ est continue. On l'appelle la détermination principale de l'argument et on la note \arg .

REMARQUE 2.30 (La détermination de l'argument sur \mathbb{C}^* ou sur \mathbb{C}). On peut, comme le fait matlab, définir aussi \arg égal à π sur \mathbb{R}_-^* :

$$\forall z \in \mathbb{R}_-^*, \quad \arg(z) = \pi. \tag{2.38}$$

Dans ce cas, θ est discontinue sur le demi axe \mathbb{R}_- . Voir l'exercice 1.3 du TP 1. De plus, on peut comme le fait matlab, définir aussi \arg égal à 0 pour $z = 0$ de sorte que \arg est cette fois-ci définie sur \mathbb{C} tout entier.

\diamond

5. c'est-à-dire, s'il est « d'un seul tenant ». soit encore si pour tout couple de points de cet ouvert, il existe un chemin continue reliant z_1 et z_2 et inclus dans U .

2.5.4.2. Détermination continue du logarithme.

On pourra consulter http://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_complexe

On cherche à définir le logarithme comme la fonction inverse de l'exponentielle. On se donne donc $z \in \mathbb{C}$ et on cherche ξ vérifiant (2.36).

De (2.31), on déduit que cette équation n'est possible que si z est non nul. On peut donc écrire

$$z = r e^{i\theta(z)} \quad (2.39)$$

où $\theta(z)$, noté pour simplifier θ , est un argument de z (il n'est bien sûr pas unique, selon la section 2.5.4.1). Si on écrit $\xi = x + iy$, alors (2.39) est équivalent à

$$e^x e^{iy} = r e^{i\theta}, \quad (2.40)$$

soit donc

$$x = \ln r, \quad (2.41a)$$

$$y = \theta + 2k\pi, \quad (2.41b)$$

où k appartient à \mathbb{Z} , soit en revenant à ξ

$$\xi = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad (2.42)$$

où k appartient à \mathbb{Z} .

DÉFINITION 2.31 (La détermination continue et principale du logarithme). On appelle alors toute application qui à z associe un nombre complexe de la forme (2.42) une détermination du logarithme.

D'après la définition 2.29, les déterminations continues du logarithme sur l'ouvert U sont du type

$$z \mapsto \ln |z| + i\theta(z), \quad (2.43)$$

où $\theta(z)$ est une détermination continue de l'argument.

Enfin, si θ est la définition principale de l'argument sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction définie par

$$z \mapsto \ln |z| + i \arg(z), \quad (2.44)$$

est appelée la détermination principale du logarithme et est noté Ln : on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \text{Ln}(z) = \ln |z| + i \arg(z). \quad (2.45)$$

Voir l'exercice 1.3 du TP 1.

REMARQUE 2.32. De façon mnémotechnique, on pourra retenir cette formule en écrivant formellement, comme dans le cas réel,

$$\text{Ln}(z) = \text{Ln}(|z| e^{i \arg(z)}) = \text{Ln}(|z|) + \text{Ln}(e^{i \arg(z)}) = \text{Ln}(|z|) + i \arg(z). \quad (2.46)$$

REMARQUE 2.33. Il existe d'autres déterminations du logarithme en otant à \mathbb{C} une demi-droite quelconque, issue de l'origine.

En effet, pour tout α fixé, on peut définir une détermination continue de l'argument sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$ vers $]2\pi - \alpha, \alpha[$. \diamond

Puisque le logarithme n'est pas unique, on parle parfois de fonctions multiformes.

Voir l'exercice 1.3 du TP 1.

REMARQUE 2.34 (La détermination du logarithme sur \mathbb{C}^*). Il est en fait impossible d'avoir une détermination continue du Ln sur \mathbb{C}^* (voir exemple 3.21 page 34). Cependant, comme dans la remarque 2.30, on peut définir conventionnellement définir le Ln sur \mathbb{C}^* tout entier en utilisant la convention (2.38), qui donne

$$\forall z \in \mathbb{R}_-^*, \quad \text{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\pi. \quad (2.47)$$

On pourra aussi consulter l'exercice de TD 2.1.

Cette convention est aussi utilisée par matlab. Dans ce cas, Ln est discontinue (et à plus forte raison, non dérivable) sur le demi axe \mathbb{R}_- .

◇

Enfin, on retrouve les propriétés usuelles du logarithme réel qui ne se généralisent pas aussi simplement, à cause de l'aspect multiforme du logarithme :

PROPOSITION 2.35. *On considère la détermination principale du logarithme Ln , définie sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On a alors*

(1) *Sa dérivée est $1/z$;*

(2) *Elle coïncide avec \ln sur \mathbb{R}_+^* ;*

(3) *Comme dans la remarque 2.17 page 17, on a*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \overline{\text{Ln}(z)} = \text{Ln}(\bar{z}). \quad (2.48)$$

(4) *On a*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad z = \exp(\text{Ln}(z)), \quad (2.49)$$

(5) *Soit \mathcal{F} défini par*

$$\mathcal{F} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y \equiv 0 [\pi] \text{ et } \cos(y) \leq 0\}. \quad (2.50)$$

On a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}, \quad -\pi < \text{Im}(z) < \pi \implies z = \text{Ln}(\exp(z)). \quad (2.51)$$

(6) *Soit \mathcal{F} défini par (2.50). On a*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \text{Ln}(\exp(z)) + 2ik\pi. \quad (2.52)$$

(7) *On a*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \implies \text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2) + 2ik\pi, \quad (2.53)$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$.

(8) *On a*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \text{ et } \arg(z_1) + \arg(z_2) \in]-\pi, \pi[\implies \text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2). \quad (2.54)$$

DÉMONSTRATION.

(1) Pour montrer le point 1, on écrit, en utilisant (par anticipation) le point 4 qui permet d'écrire $z = \exp(\text{Ln}(z))$:

$$\frac{\text{Ln } z - \text{Ln } z_0}{z - z_0} = \frac{\text{Ln } z - \text{Ln } z_0}{\exp(\text{Ln}(z)) - \exp(\text{Ln}(z_0))} = \frac{1}{\frac{\exp(\text{Ln}(z)) - \exp(\text{Ln}(z_0))}{\text{Ln } z - \text{Ln } z_0}}$$

Si z tend vers z_0 , $\text{Ln}(z)$ tend vers $\text{Ln}(z_0)$ et donc $\frac{\exp(\text{Ln}(z)) - \exp(\text{Ln}(z_0))}{\text{Ln } z - \text{Ln } z_0}$ tend vers $[e^Z]'_{Z=\text{Ln}(z_0)} = e^{\text{Ln}(z_0)} = z_0$. Ainsi, le terme de droite tend vers $1/z_0$.

Il est encore plus rapide d'utiliser la proposition 1.8. On pose $f = e \cdot$. Ainsi $f' = e \cdot$. Par définition $f^{-1} = \text{Ln}$ et (1.11) donne

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(z_0)} = \frac{1}{e^{\text{Ln}(z_0)}},$$

qui est égal à $1/z_0$, en utilisant (par anticipation) le point 4.

(2) Le point 2, vient du fait que, sur \mathbb{R}_+^* , en vertu du point 1, $(\ln z)' = 1/z$. On peut aussi écrire que $\text{Ln}(x) = \ln x + i \times 0$.

(3) le point 3 ne peut se montrer comme dans la preuve de la remarque 2.17, car on ne peut développer le logarithme complexe sur \mathbb{C} tout entier. Il suffit d'utiliser la définition (2.45) et de remarquer que, si z appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, alors il est de même de \bar{z} et on a

$$\overline{\text{Ln}(z)} = \overline{\ln |z| + i \arg(z)} = \ln |z| + i \arg(z) = \ln |z| - i \arg(z) = \ln |\bar{z}| + i \arg(\bar{z}) = \text{Ln}(\bar{z}).$$

(4) On utilise la définition :

$$\begin{aligned}\exp(\operatorname{Ln}(z)) &= \exp(\ln |z| + i \arg z), \\ &= \exp(\ln |z|) \exp(i \arg z), \\ &= |z| \exp(i \arg z), \\ &= z.\end{aligned}$$

(5) On écrit $z = x + iy$.

On vérifie tout d'abord que si $z \notin \mathcal{F}$, alors $\exp(z)$ n'est pas un réel négatif ou nul et donc $\operatorname{Ln}(\exp(z))$ est défini. En effet supposons que $\exp(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$ soit un réel négatif, ce qui est équivalent à $\cos(y) + i \sin(y)$ est réel négatif, soit encore $\sin(y) = 0$ et $\cos(y) \leq 0$, ce qui est donc équivalent à $z \in \mathcal{F}$.

On a donc

$$\operatorname{Ln}(\exp(z)) = \operatorname{Ln}(\exp(x + iy)) = \operatorname{Ln}(\exp(x)e^{iy}).$$

Si on pose $Z = \exp(x)e^{iy}$, on a bien $|Z| = \exp(x)$. En revanche, l'argument de Z n'est égal à y que si $-\pi < y < \pi$. Dans ce cas,

$$\operatorname{Ln}(\exp(z)) = \ln(\exp(x)) + iy = x + iy = z$$

(6) Si on reprend le calcul qui précède, dans le cas général, $\arg Z = y + 2k\pi$ où k est un entier, ainsi

$$\operatorname{Ln}(\exp(z)) = \ln(\exp(x)) + i(y + 2k\pi) = x + iy + 2ik\pi = z + 2ik\pi.$$

ce qui montre (2.52).

(7) Pour $l \in \{1, 2\}$, on écrit $z_l = \rho_l e^{i\theta_l}$ où $\theta_l \in]-\pi, \pi[$. On a donc

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln}(\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}),$$

et puisque $\theta_1 + \theta_2$ n'est pas nécessairement dans $]-\pi, \pi[$, d'après les points 5 et 6

$$\begin{aligned}&= \ln(\rho_1 \rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2) + 2ik\pi, \\ &= \ln(\rho_1) + i\theta_1 + \ln(\rho_2) + i\theta_2 + 2ik\pi, \\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2ik\pi.\end{aligned}$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned}-\pi &< \theta_1 < \pi, \\ -\pi &< \theta_2 < \pi,\end{aligned}$$

et donc

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi.$$

Examinons les différents cas. Si

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 < -\pi,$$

on a donc

$$0 < \theta_1 + \theta_2 + 2\pi < \pi,$$

et

$$\arg(\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi,$$

avec $k = 1$. De même, si

$$\pi < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi,$$

on a $k = -1$. Enfin, si

$$-\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi,$$

on a $k = 0$. Dans tous les cas, on a donc montré que k était dans $\{-1, 0, 1\}$.

(8) Enfin, si $\theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ appartient à $] - \pi, \pi[$, d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \operatorname{Ln}(\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}), \\ &= \ln(\rho_1 \rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2), \\ &= \ln(\rho_1) + i\theta_1 + \ln(\rho_2) + i\theta_2, \\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2. \end{aligned}$$

□

Voir l'exercice 2.2 du TD 1 et l'exercice 1.3 du TP 1.

REMARQUE 2.36. Le point 3 de la proposition 2.35 donne le lien entre $\overline{\operatorname{Ln}(z)}$ et $\operatorname{Ln}(\bar{z})$. On peut aussi déterminer de même le lien entre les logarithmes de z et z' le symétrique de z par rapport à l'axe de y . Voir exercice de TD 2.4.

REMARQUE 2.37. Formalisons maintenant rigoureusement l'équation (2.46) de la remarque 2.32 page 23.

(1) On a tout d'abord

$$\operatorname{Ln}\left(|z|e^{i\arg(z)}\right) = \operatorname{Ln}(|z|) + \operatorname{Ln}\left(e^{i\arg(z)}\right). \quad (2.55)$$

En effet, le complexe $|z|$ appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. De même, le complexe $e^{i\arg(z)}$ appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On raisonne en effet comme dans le point 5 de la preuve de la proposition 2.35. Raisonnons par l'absurde et supposons $e^{i\arg(z)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On écrit

$$Z = i\arg(z) = X + iY,$$

avec

$$X = 0 \text{ et } Y = \arg(z).$$

Si $e^{i\arg(z)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$\sin(\arg(z)) = 0 \text{ et } \cos(\arg(z)) \leq 0,$$

et donc

$$\arg(z) = 0 \text{ et } \cos(\arg(z)) \leq 0,$$

ce qui n'est pas possible. Ainsi d'après (2.53)

$$\operatorname{Ln}\left(|z|e^{i\arg(z)}\right) = \operatorname{Ln}(|z|) + \operatorname{Ln}\left(e^{i\arg(z)}\right) + 2ik\pi.$$

Or $\theta_1 + \theta_2 \in] - \pi, \pi[$ et d'après (2.54), on a $k = 0$.

(2) Montrons maintenant que

$$\operatorname{Ln}\left(e^{i\arg(z)}\right) = i\arg(z). \quad (2.56)$$

On a $i\arg(z) \notin \mathcal{F}$. Sinon, on aurait $i\arg(z) = X + iY$ dans \mathcal{F} et donc on aurait avec $X = 0$ et $Y = -\arg(z)$ et comme précédemment, on aurait $Y = 0$ et $\cos(Y) \leq 0$, ce qui n'est pas possible. Puisque $\operatorname{Im}(i\arg(z)) = \arg(z) \in] - \pi, \pi[$, (2.56) est une conséquence de (2.51).

L'équation (2.46) provient donc de (2.55) et de (2.56).

◇

On a aussi :

PROPOSITION 2.38.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \implies \left(1 + z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \text{ et } \operatorname{Ln}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n\right). \quad (2.57)$$

DÉMONSTRATION. Un argument géométrique simple permet de montrer que si $|z| < 1$ alors $1 + z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Par ailleurs, considérons la série entière définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n. \quad (2.58)$$

D'après le lemme 2.5, son rayon de convergence est 1 et d'après la proposition 2.10, f est holomorphe (même analytique) sur le disque de centre 0 et de rayon 1 et, en dérivant terme à terme,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}.$$

selon l'exemple 2.6. De plus, selon la proposition 2.35 (point 1), on a

$$(f(z) - \text{Ln}(1+z))' = 0.$$

On conclue alors en utilisant la proposition 1.20. \square

2.5.4.3. Détermination principale de la puissance (z^α).

Comme dans le cas réel, où x^α a un sens pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, en posant $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, on définit z^α par

$$\forall \alpha, z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \implies z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln} z}. \quad (2.59)$$

REMARQUE 2.39. Il est intéressante de voir comment successivement les mathématiciens ont donné un sens à la quantité z^α pour z réel et α entier strictement positif, puis nul, puis négatif, puis rationnel, puis réel, puis complexe et enfin z et α complexes. On pourra consulter [Bas14] ou [Bas18c, Annexe "Calcul de a^0 et redéfinition de l'exponentielle"].

Nous avons aussi la propriété suivante qui généralise le cas réel :

PROPOSITION 2.40.

$$\forall \alpha, \beta, z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \implies z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}. \quad (2.60)$$

De même, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad (e^{i\theta})^\alpha = e^{i\alpha\theta}. \quad (2.61)$$

Enfin,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad |z^\alpha| = |z|^\alpha. \quad (2.62)$$

DÉMONSTRATION.

- On a

$$z^\alpha z^\beta = \exp(\alpha \text{Ln}(z)) \exp(\beta \text{Ln}(z)) = \exp((\alpha + \beta) \text{Ln}(z)) = z^{\alpha+\beta},$$

ce qui montre (2.60)

- On a, par définition,

$$(e^{i\theta})^\alpha = e^{\alpha \text{Ln}(e^{i\theta})},$$

et donc d'après (2.51), (puisque $\theta \in]-\pi, \pi[$).

$$(e^{i\theta})^\alpha = e^{\alpha i\theta}.$$

- On a

$$\begin{aligned} |z^\alpha| &= \left| e^{\alpha \text{Ln}(z)} \right|, \\ &= \left| e^{\alpha \ln |z| + i\alpha \arg(z)} \right|, \\ &= \left| e^{\alpha \ln |z|} \right| \left| e^{i\alpha \arg(z)} \right|, \end{aligned}$$

et, en utilisant le fait que $\alpha \ln |z|$ est réel et que $\alpha \arg(z)$ est réel, on a donc :

$$\begin{aligned} &= \left| e^{\alpha \ln |z|} \right|, \\ &= |z|^\alpha, \end{aligned}$$

ce qui montre (2.62). \square

REMARQUE 2.41. Notons que pour n entier et z complexe, l'écriture z^n contient en fait deux définitions. La première correspond à la définition usuelle de z^n , la seconde correspondant à la définition (2.59). Ces deux écritures sont en fait équivalentes. Voir l'exercice de TD 2.6.

REMARQUE 2.42 (La détermination des puissances sur \mathbb{C}^*). Comme pour la remarque 2.34, on peut définir une puissance z^α , pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ en utilisant (2.47). De plus, si α est réel, d'après (2.62), on a donc cette fois-ci :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad |z^\alpha| = |z|^\alpha.$$

Si, de plus, α est un réel strictement positif, on a

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} |z|^\alpha = 0,$$

et donc

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} z^\alpha = 0.$$

On posera donc par convention, comme dans le cas réel :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0^\alpha = 0. \quad (2.63)$$

◇

Enfin, comme dans le cas réel, on a :

PROPOSITION 2.43. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et sa dérivée est donnée par*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad (z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}. \quad (2.64)$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.35, le logarithme complexe est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de dérivée $1/z$. Ainsi, d'après la proposition 1.7 page 5, $z \mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et sa dérivée est donnée par

$$(z^\alpha)' = \left(e^{\alpha \operatorname{Ln}(z)} \right)' = (\alpha \operatorname{Ln}(z))' \left(e^{\alpha \operatorname{Ln}(z)} \right) = \frac{\alpha}{z} z^\alpha.$$

On vérifie que $1/z = z^{-1}$ et donc, d'après (2.60), on a

$$(z^\alpha)' = z^{\alpha-1}.$$

□

2.5.5. Expression des développements en série entières des fonctions usuelles

Ces développements en série entières sur \mathbb{C} peuvent être définis à partir des développements limités de leurs homologues réels. On consultera par exemple [Bas19, l'annexe "Quelques développements limités usuels"].

2.5.6. Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$

Voir annexe D page 193.

2.5.7. Définitions des fonctions complexes arcsin et arccos

Voir annexe E page 205.

Intégration des fonctions complexes, Théorème de Cauchy et Formules des Résidus

3.1. Introduction

Ce chapitre pourrait se faire en une quinzaine d'heures, ce qu'on ne fera pas du tout ! Le but de ce chapitre est surtout de comprendre les choses suivantes :

- Comment intégrer une fonction complexe le long d'un chemin.
- En déduire le théorème de Cauchy et l'une de ses conséquences importante et surprenante : l'analyticité des fonctions complexes est équivalente à l'holomorphie !
- En déduire aussi le théorème des résidus, très utile pour le calcul de certaines intégrales ou de sommes infinies.

Ce chapitre s'appuie sur [Pab95, chap. 4 à 10] et [Sko91, chap. III et IV].

On pourra aussi consulter

http://fr.wikipedia.org/wiki/Th or me_des_r sidus

3.2. Intégration des fonctions complexes

Vous avez d  voir en mécanique qu'un champ de vecteur conservatif (qui dérive d'un potentiel) a une circulation sur une courbe fermée égale à zéro (voir par exemple [Bas11b, Annexe E et (E.20) p. 118]). Vous connaissez aussi le calcul suivant, qui nous montre qu'un champ de force dérivant d'un potentiel est conservatif : Si $\vec{F} = \nabla\phi$, on a

$$\begin{aligned}\int \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int \nabla\phi \cdot d\vec{l}, \\ &= \int d\phi, \\ &= \phi(b) - \phi(a),\end{aligned}$$

et donc

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \phi(b) - \phi(a). \tag{3.1}$$

Nous allons retrouver formellement cette propriété pour des fonctions complexes.

3.2.1. Intégration des fonctions complexes le long d'un chemin

Les pages 30 à 35 de [Pab95] définissent rigoureusement la notion d'intégration des fonctions complexes le long d'un chemin. Nous allons donner directement :

DÉFINITION 3.1. On appelle arc toute application continue γ d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} dans $\mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t)$. $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité de l'arc γ . On appelle chemin dans un ouvert Ω de \mathbb{C} , un arc de classe C^1 par morceaux dont l'image est incluse dans Ω . Soit enfin f une application continue sur l'image de γ . L'intégrale de f sur γ est définie par l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \tag{3.2}$$

REMARQUE 3.2. Ici, la dérivée utilisée est la dérivée usuelle sur \mathbb{R} , et non celle du chapitre 1 ! C'est-à-dire, que si

$$\gamma(t) = X(t) + iY(t), \quad (3.3)$$

alors

$$\gamma'(t) = X'(t) + iY'(t). \quad (3.4)$$

REMARQUE 3.3.

- Cette intégrale est l'intégrale d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et peut se calculer en intégrant séparément partie réelle et imaginaire ou en intégrant directement les fonctions complexes.
- Cette définition ressemble beaucoup à celle d'une intégrale curviligne (voir [Bas11b, section E.1.2]).
- De façon mnémotechnique, il suffit de poser de façon formelle $z = \gamma(t)$ et de faire un changement de variable : $z = \gamma(t)$ et donc $dz = \gamma'(t)dt$.

EXEMPLE 3.4. Calculer l'intégrale de $f = z$ sur le chemin $\gamma(t) = e^{it}$, pour $t \in [0, \pi/2]$. Pour dériver γ , on peut utiliser la formule suivante : d'après (2.27), pour a est un réel, on a

$$e^{ait} = \cos(at) + i \sin(at). \quad (3.5)$$

D'après (3.3) et (3.4), on a donc

$$(e^{ait})' = -a \sin(at) + ia \cos(at) = ia (\cos(at) + i \sin(at)) = aie^{ait},$$

et donc

$$(e^{ait})' = aie^{ait}. \quad (3.6)$$

Cette formule peut aussi vue comme une conséquence du lemme 2.18 page 17. On a $\gamma(t) = e^{it}$ et donc $\gamma'(t) = ie^{it}$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{it}ie^{it}dt, \\ &= i \int_0^{\pi/2} e^{2it}dt, \\ &= \frac{i}{2i} [e^{2it}]_{t=0}^{t=\pi/2}, \\ &= \frac{1}{2} (-1 - 1), \\ &= -1. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.5. Un chemin fermé est tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

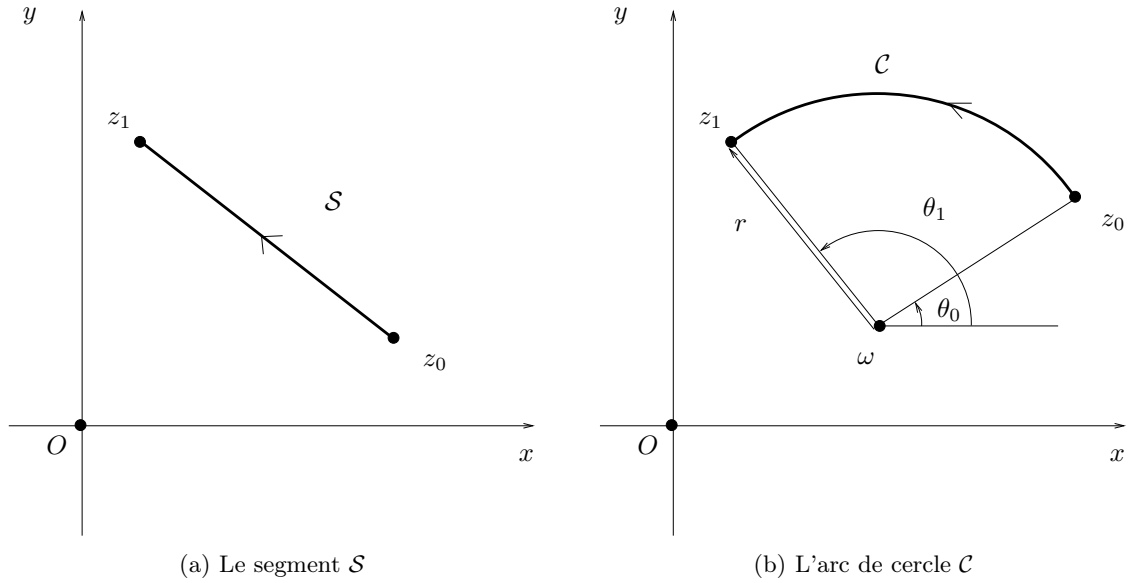
PROPOSITION 3.6. L'intégrale le long d'un chemin est indépendante du paramétrage (c'est-à-dire de la fonction γ) choisi.

DÉMONSTRATION. Soient γ et γ_1 deux chemins. Il existe donc ϕ , continue, croissante et C^1 par morceaux, de $[a, b]$ dans $[a_1, b_1]$ telle que ϕ^{-1} est C^1 par morceaux avec $\gamma = \gamma_1 \circ \phi$. On fait le changement de variable $t = \phi(\tau)$ avec $t \in [a_1, b_1]$ et $\tau \in [a, b]$. On a donc $dt = \phi'(\tau)d\tau$ et

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) = \gamma_1 \circ \phi(\tau) = \gamma(\tau),$$

et donc

$$\gamma_1'(t) = \gamma_1'(\phi(\tau))\phi'(\tau).$$

FIGURE 3.1. La paramétrisation générale d'un segment $\mathcal{S} = [z_0, z_1]$ ou d'un arc de cercle \mathcal{C} .

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt &= \int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma_1'(\phi(\tau))\phi'(\tau)d\tau, \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau))(\gamma_1(\phi(\tau)))'d\tau, \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 3.7.

- (1) On considère le segment $\mathcal{S} = [z_0, z_1]$ comme indiqué sur la figure 1(a). Le paramétrage de ce segment est donné par

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{cases}, \quad (3.7a)$$

avec

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t. \quad (3.7b)$$

Voir preuve dans l'exercice de TD 3.4.

- (2) On considère l'arc de cercle \mathcal{C} comme indiqué sur la figure 1(b). Le paramétrage de cet arc de cercle est donné par par

$$\gamma : \begin{cases} [\theta_0, \theta_1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{cases}, \quad (3.8a)$$

avec

$$\forall t \in [\theta_0, \theta_1], \quad \gamma(t) = re^{it} + \omega, \quad (3.8b)$$

où r est le rayon de l'arc de cercle et ω l'affixe de son centre.

Voir preuve dans l'exercice de TD 3.4.

Trois résultats immédiats sont donnés sans preuve :

LEMME 3.8 (Juxtaposition de chemins). Si $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$, alors

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

LEMME 3.9 (Chemin opposé).

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

LEMME 3.10 (Majoration). Avec les notations de la définition 3.1

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

On a facilement le lemme suivant :

LEMME 3.11 (Inégalité de Darboux). Si γ est un chemin défini sur $[a, b]$ et M un majorant de $|f|$ sur l'image de γ , alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML, \quad (3.9)$$

où L est la longueur du chemin.

DÉMONSTRATION. Elle résulte du lemme 3.10 et de la définition de la longueur d'un chemin (voir [Bas11a, section 3.2.1] et est donnée dans [Pet98, p. 180]. \square

3.2.2. Indice d'un chemin

DÉFINITION 3.12. Soient γ un chemin fermé et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. Pour tout $z \in \Omega$, on définit l'indice de γ par rapport à z par l'intégrale

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (3.10)$$

C'est intuitivement le « nombre de tours » décrit par γ autour de $z \notin \gamma$ quand t décrit $[a, b]$ et c'est un entier relatif.

THÉORÈME 3.13. Ind_{γ} est une fonction à valeurs dans \mathbb{Z} , constante sur chaque composante connexe de Ω^1 et nulle sur la composante non bornée de Ω .

DÉMONSTRATION. Admise. \square

PROPOSITION 3.14. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r , décrit dans le sens trigonométrique. Alors $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$ si $|z - a| < r$ et $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ si $|z - a| > r$.

DÉMONSTRATION. Calculons $\text{Ind}_{\gamma}(z)$, pour $|z - a| < r$. Il suffit de choisir d'après le théorème 3.13, $z = a$. On choisit le paramétrage suivant du cercle : $\zeta = re^{i\theta} + a$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On a $d\zeta = ire^{i\theta} d\theta$ et par définition,

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1$$

Si a est à l'extérieur du cercle, on est sur la composante non bornée et Ind_{γ} y est nulle, d'après le théorème 3.13. \square

1. C'est-à-dire, les parties du plan « séparées » par le chemin γ . Voir la figure 3.2.

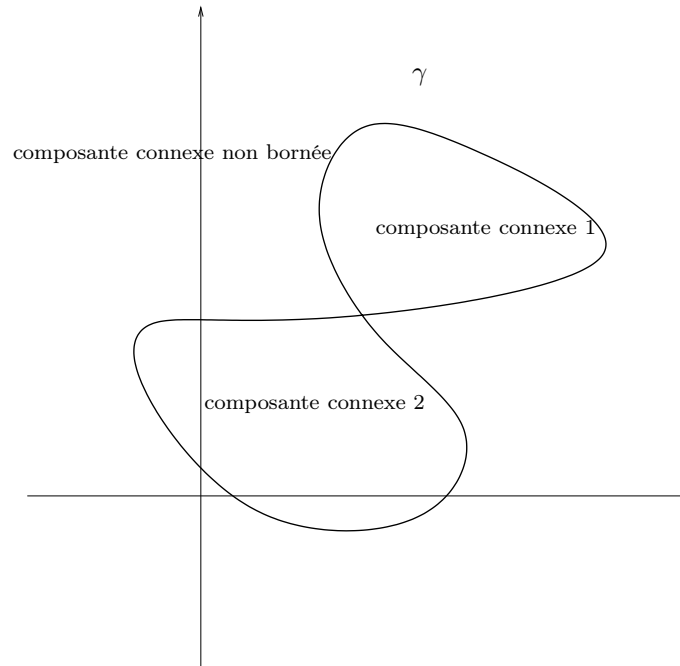


FIGURE 3.2. Les composantes connexes définies par γ . Voir aussi la note 5 page 22.

REMARQUE 3.15. Attention, si le cercle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, alors $\text{Ind}_\gamma(z) = -1$ si $|z - a| < r$. En effet, le calcul précédent donne cette fois-ci :

$$\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2i\pi} \int_{2\pi}^0 \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = -\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = -1.$$

Il en est de même pour tout chemin tournant autour de z : l'indice est 1 si il est parcouru dans le sens trigonométrique et -1 sinon.

3.3. Primitive des fonctions complexes et Théorie de Cauchy

On renvoie à [Pab95, chap. 5 et 6] et [Sko91, chap. III].

3.3.1. Primitive des fonctions complexes

Comme dans le cas réel, on donne

DÉFINITION 3.16. Soit f une fonction complexe définie dans un ouvert Ω de \mathbb{C} . On appelle primitive de f dans Ω toute fonction F définie et holomorphe dans Ω telle que $F' = f$.

Comme dans le cas réel, on a

PROPOSITION 3.17. Soient f une fonction complexe continue dans un ouvert Ω et F une primitive de f . Étant donné un chemin γ dans Ω , d'origine z_0 et d'extrémité z_1 , on a

$$\int_\gamma f(z) dz = F(z_1) - F(z_0). \quad (3.11)$$

DÉMONSTRATION. On retrouve donc bien formellement (3.1). Il suffit d'écrire les définitions. En effet, on a successivement

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \\ &= \int_a^b (F(\gamma(t)))'dt, \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \\ &= F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 3.18. Comme dans \mathbb{R} , pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et $a \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto (z - a)^n$ admet pour primitive $z \mapsto (z - a)^{n+1}/(n + 1)$.

EXEMPLE 3.19. Comme dans \mathbb{R} , la fonction $z \mapsto 1/z$ définie sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ a pour primitive la détermination principale du logarithme Ln , selon la proposition 2.35.

On déduit de la proposition 3.17 que

PROPOSITION 3.20. *Si la fonction continue f admet une primitive dans l'ouvert Ω , on a pour tout chemin fermé γ à valeurs dans Ω ,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.12)$$

Nous verrons dans le théorème 3.22 la réciproque, aussi vraie.

EXEMPLE 3.21. Puisque, d'après la proposition 3.14, on a

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi, \quad (3.13)$$

et puisque cela est non nul, la fonction $1/z$ n'a pas de primitive dans \mathbb{C}^* et *a fortiori*, il n'existe aucune détermination (continue) du logarithme dans \mathbb{C}^* .

Une preuve alternative sera proposée dans l'exercice de TD facultatif 3.6.

THÉORÈME 3.22. *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . Pour que f admette une primitive dans Ω , il faut et il suffit que, pour tout chemin fermé γ dans Ω , on ait (3.12).*

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire résulte de la proposition 3.20. La condition suffisante est admise. □

3.3.2. Théorie de Cauchy

Nous allons maintenant admettre, sans preuve, le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème 3.22 :

THÉORÈME 3.23 (Théorème de Cauchy). *Soient Ω un ouvert², f une fonction continue sur Ω , holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$. Alors, f admet une primitive dans Ω et pour tout chemin fermé γ dans Ω , on a (3.12).*

REMARQUE 3.24. Souvent présentée dans le cas d'un ouvert Ω convexe³, cette formule est en fait souvent vraie dans le cas d'un d'un ouvert Ω connexe⁴. Par la suite, pour simplifier, on oubliera la notion de convexe ou de connexe, en retenant que les cas présentés dans ce cours obéissent à l'une de ces hypothèses.

-
2. vérifiant les hypothèse de la remarque 3.24.
 3. C est un convexe ssi pour tout $(a, b) \in C^2$, $[a, b]$ est inclus dans C .
 4. Pour simplifier, c'est-à-dire, "d'un seul tenant".

◇

THÉORÈME 3.25 (Formule de Cauchy). Soient Ω un ouvert et γ un chemin fermé dans Ω . Soit f holomorphe sur Ω . Si $z \in \Omega$ et $z \notin \gamma$, alors

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.14)$$

En particulier, si z est intérieur à γ et d'indice égal à 1,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.15)$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction f définie par

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(\zeta), & \text{si } \zeta = z \end{cases}$$

qui est continue dans Ω et holomorphe dans $\Omega \setminus \{z\}$. D'après le théorème 3.23, on a

$$\int_\gamma g(z) dz = 0$$

et donc

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

ce qui implique

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

et d'après la définition (3.10) de l'indice,

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2i\pi \text{Ind}_\gamma(z).$$

En particulier, si z est intérieur à γ et d'indice égal à 1, on a bien (3.15). □

EXEMPLE 3.26. Voyons maintenant comment la formule de Cauchy (3.14) permet de calculer des intégrales. Montrons que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

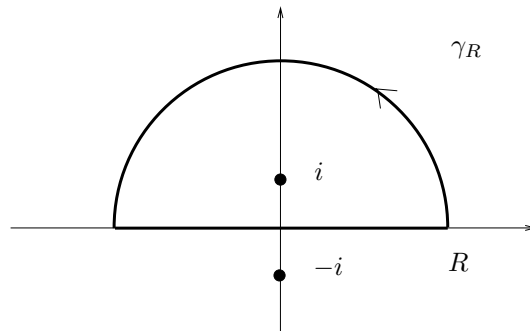


FIGURE 3.3. le chemin γ_R : réunion d'un segment et d'un demi-cercle.

On définit γ_R , le chemin fermé comme indiqué figure 3.3, R étant choisi assez grand, de telle sorte que $\pm i$ soient à l'intérieur de ce chemin.

Nous procédons en plusieurs étapes :

(1) Calculons

$$I_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz. \quad (3.16)$$

(a) D'une part, on remarque que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ et d'après la décomposition en éléments simple, il existe A et B tels que

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{A}{z - i} + \frac{B}{z + i}.$$

En multipliant respectivement cette expression par $z - i$ et $z + i$ et en faisant tendre z vers i et $-i$, on obtient $A = 1/(2i)$ et $B = -1/(2i)$. On a donc

$$\frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{iz}}{z - i} - \frac{e^{iz}}{z + i} \right).$$

On intègre cela sur γ_R (les deux fonctions y sont holomorphes) :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z - i} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z + i} dz. \quad (3.17)$$

(b) On applique la formule de Cauchy (3.15) pour $z = i$ à l'intérieur de γ_R à la fonction $f(z) = e^{iz}$:

$$f(i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta - i} d\zeta,$$

et donc

$$2i\pi e^{i^2} = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z - i} dz. \quad (3.18)$$

De même, si on applique la formule de Cauchy (3.15) pour $z = -i$, à l'extérieur de γ_R :

$$0 = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z + i} dz. \quad (3.19)$$

(c) De (3.17), (3.18) et (3.19), on déduit

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i} (2i\pi e^{i^2}) = \pi e^{-1},$$

et donc

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}. \quad (3.20)$$

(2) D'autre part, on utilise la propriété 3.8. Le chemin Γ_R est composé du segment $[-R, R]$ où $z = x$ et $x \in [-R, R]$ avec $dz = dx$ et du demi-cercle \mathcal{C} paramétré par $z = Re^{i\theta}$ et $\theta \in [0, \pi]$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz, \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz, \end{aligned}$$

et par symétrie

$$= 2 \int_0^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz.$$

On a donc

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2 \int_0^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz. \quad (3.21)$$

(3) Enfin, sur \mathcal{C} , on a⁵, d'après (2.31) : pour $z = R \cos \theta + iR \sin \theta$

$$|e^{iz}| = e^{\operatorname{Re}(iz)} = e^{-R \sin \theta} \leq 1,$$

puisque θ appartient à $[0, \pi]$. On a aussi, pour $R > 1$

$$|1 + z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$$

Bref, sur \mathcal{C} ,

$$\left| \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}.$$

On applique le lemme 3.11 :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq (\pi R) \frac{1}{R^2 - 1},$$

et donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz = 0. \quad (3.22)$$

(4) Finalement, les résultats (3.20), (3.21) et (3.22) donnent pour R tendant vers l'infini : la limite de $2 \int_0^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ existe (ce que l'on savait déjà!) et vérifie

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx + 0 = \frac{\pi}{e}$$

et donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}. \quad (3.23)$$

Ce calcul est plus rapide que l'habituelle intégration de la décomposition en éléments simples que vous aviez apprise plus jeune, et qui, de plus, obligeait à expliciter les différentes intégrales obtenues. Nous généraliserons cela en section 3.4.1.

3.3.3. Analyticité des fonctions holomorphes

Déduisons enfin de la formule de Cauchy, le résultat tant attendu : l'analyticité des fonctions complexes est équivalente à l'holomorphicité!

THÉORÈME 3.27. *Toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω est analytique dans Ω .*

DÉMONSTRATION. On pourra en trouver une preuve directe de ce résultat, non fondée sur la théorie de Cauchy dans les pages 19 à 21 de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf>, elle-même issue de la proposition 1.18, pages 10 et 11 de <https://www.math.u-psud.fr/~hulin/poly-holo.pdf>.

Une preuve de ce théorème (fondé sur le théorème 3.25) et du théorème 3.28 utilisant la théorie de Cauchy est donnée page 38. \square

Enfin, on conclut par la proposition suivante qui permet de calculer les coefficients du développement en série entière de f :

PROPOSITION 3.28. *Sous les hypothèses du théorème 3.27, on considère $a \in \Omega$. Le rayon de convergence de la série de Taylor⁶ de f en a est supérieur ou égal à la distance de a au complémentaire de Ω . De plus, si γ un chemin fermé dans Ω tel que l'indice de a par rapport à γ soit égal à 1, alors pour tout $n \geq 0$,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.24)$$

5. Ne pas appliquer cela brutalement comme dans \mathbb{R} !

6. fourni par (2.17).

Enfin, le coefficient a_n de la série de Taylor de f en a est donné par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.25)$$

PREUVE FORMELLE. Nous ne donnons qu'une preuve qui permette de justifier de façon non rigoureuse, les égalités (3.24) et (3.25). La dérivée n -ième de $a \mapsto 1/(\zeta - a)$ vaut $n!/(\zeta - a)^{n+1}$ et donc, par dérivation sous le signe somme de (3.15), on a

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n}{da^n} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Enfin, (3.25) vient de (3.24) et de (2.15). \square

PREUVE PLUS RIGOREUSE DES THÉORÈME 3.27 ET DE LA PROPOSITION 3.28. On peut utiliser la formule (3.14) et développer de la façon suivante en série entière, pour $|v| < |u|$:

$$\frac{1}{u - v} = \frac{1}{u} \frac{1}{1 - v/u} = \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{u^n}$$

et donc en déduire

$$\frac{1}{u - v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{u^{n+1}}$$

On peut donc développer en série $1/(\zeta - z)$ sous la forme (si $|z - a| < |\zeta - a|$)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

De (3.14), on déduit donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta.$$

On admet qu'il est légitime d'invertir la somme et l'intégrale et donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right) (z - a)^n,$$

dont on déduit l'analyticité de f et les expressions de a_n en comparaison avec (2.17). \square

◇

3.4. Formule des résidus et applications aux calculs d'intégrales

Entrons maintenant dans la dernière section où est énoncé le résultat principal, la formule des résidus, qui n'est autre que la Formule de Cauchy (3.14), elle-même conséquence du Théorème de Cauchy 3.23.

On renvoie à [Pab95, chap. 8 et 9] et [Sko91, chap. III section 4].

3.4.1. Singularités illusoire et théorèmes des résidus

DÉFINITION 3.29. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $a \in \Omega$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. On dit que f a une singularité isolée en a si on peut prolonger f en a en une fonction holomorphe au voisinage de a . On admet que ce prolongement est unique. On dit alors que la singularité de f en a est illusoire (ou apparente ou inexistante) ou encore est une fausse singularité. On dit encore que a est un point régulier de f .

On admet le résultat suivant

THÉORÈME 3.30 (Classification des singularités isolées). Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Alors, f vérifie l'une (et l'une seulement) des propriétés suivantes :

- (1) f a une singularité illusoire en a ;

(2) Il existe des nombres complexes uniques a_{-1}, \dots, a_{-m} avec $m \geq 1$ et $a_{-m} \neq 0$ tels que la fonction g définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} \quad (3.26)$$

ait une singularité illusoire en a ;

(3) Pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \setminus \{a\}$ soit inclus dans Ω , l'image par f de $D(a, r) \setminus \{a\}$ est dense⁷ dans \mathbb{C} . On dit que a est une singularité essentielle.

On peut montrer que, dans le cas 3 de ce théorème, f admet le développement dit de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}. \quad (3.27)$$

◇

EXEMPLE 3.31. Par exemple, la fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ admet une singularité illusoire en zéro.

DÉFINITION 3.32. Sous les hypothèses du théorème 3.30, dans le cas 2, on dit que f a un pôle d'ordre m en a . Le polynôme en $(z-a)^{-1}$

$$\sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}.$$

est appelée la partie principale de f en a .

Donnons le petit lemme technique suivant :

LEMME 3.33. Soient un entier $m \geq 1$ et f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Il existe H holomorphe en a telle que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k (z-a)^k + (z-a)^m H(z), \quad (3.28)$$

avec

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \quad (3.29)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire que l'holomorphie de f entraîne son analyticité et d'en déduire :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k,$$

où a_k vérifie (3.29). On tronque alors la somme à ses m premiers termes :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k (z-a)^k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-a)^k, \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k (z-a)^k + (z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-a)^{k-m}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$H(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-a)^{k-m},$$

dont on admet que le rayon de convergence est strictement positif, ce qui entraîne son holomorphie. □

On déduit le lemme suivant :

7. Une partie A de \mathbb{C} est dense dans \mathbb{C} ssi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $|z-a| \leq \varepsilon$.

LEMME 3.34. a est un pôle d'ordre m de f si et seulement si il existe $D(a, r) \subset \Omega$ et g holomorphe sur $D(a, r)$ tels que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \quad (3.30)$$

avec $g(a)$ non nul. On a aussi l'expression de a_{-1} :

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a). \quad (3.31)$$

DÉMONSTRATION. Si a est un pôle d'ordre m de f , alors d'après point 2 du théorème 3.30, il existe des nombres complexes uniques a_{-1}, \dots, a_{-m} avec $m \geq 1$ et $a_{-m} \neq 0$ tels que la fonction g définie par (3.26) (notée ici \tilde{g}) ait une singularité illusoire en a . On pourra donc supposer sans perte de généralité que \tilde{g} est holomorphe. Notons que (3.26) entraîne

$$f(z) = \tilde{g}(z) + \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}, \quad (3.32)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sum_{k=1}^m a_{-k} (z-a)^{m-k}}{(z-a)^m} + \tilde{g}(z), \\ &= \frac{\sum_{k=1}^m a_{-k} (z-a)^{m-k} + (z-a)^m \tilde{g}(z)}{(z-a)^m}. \end{aligned}$$

On peut conclure en posant

$$g(z) = \sum_{k=1}^m a_{-k} (z-a)^{m-k} + (z-a)^m \tilde{g}(z),$$

qui est holomorphe. De plus, $g(a) = a_{-m}$ est non nul.

Réciproquement, supposons que (3.30) ait lieu. On applique le lemme 3.33 à la fonction g . On a donc

$$f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \tilde{a}_k (z-a)^k + (z-a)^m H(z)}{(z-a)^m},$$

avec $\tilde{a}_0 = g(a) \neq 0$ et H holomorphe. On a aussi

$$\tilde{a}_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a). \quad (3.33)$$

Il vient alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{a}_k (z-a)^{k-m} + H(z),$$

on change d'indice et on pose $k' = m - k$:

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{a}_{m-k}}{(z-a)^k} + H(z),$$

et en posant $a_{-k} = \tilde{a}_{m-k}$, on a donc

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + H(z),$$

ce qui entraîne que a est un pôle d'ordre m de f , puisque $a_{-m} = \tilde{a}_0 \neq 0$. Enfin, (3.31) provient de (3.33) qui entraîne : $a_{-1} = \tilde{a}_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a)$. \square

DÉFINITION 3.35. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $D(a, r)$ privé de a avec $r > 0$ telle que f ait un pôle d'ordre m en a de partie principale

$$Q(z) = \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}.$$

Le coefficient a_{-1} de $1/(z-a)$ est appelé résidu de f en a et est noté

$$\text{Rés}(f, a) = a_{-1}. \quad (3.34)$$

Une conséquence immédiate des définitions précédentes est :

LEMME 3.36. Si

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} + h(z),$$

où g et h sont holomorphes au voisinage de a , avec $g(a)$ non nul, alors

$$\text{Rés}(f, a) = g(a). \quad (3.35)$$

3.4.2. Formule des résidus

Donnons finalement le résultat principal, la formule des résidus, qui n'est autre qu'une conséquence du Théorème de Cauchy 3.23.

THÉORÈME 3.37 (Formule des résidus). Soit Ω un ouvert⁸ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des points distincts de Ω . Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et dont chaque point α_k est un pôle d'ordre fini. Soit γ un chemin fermé ne passant pas par les points α_i . On a alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Rés}(f, \alpha_k) \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_k). \quad (3.36)$$

En particulier, si γ sépare le plan en deux régions, l'intérieur et l'extérieur (voir figure 3.4, où à l'intérieur,

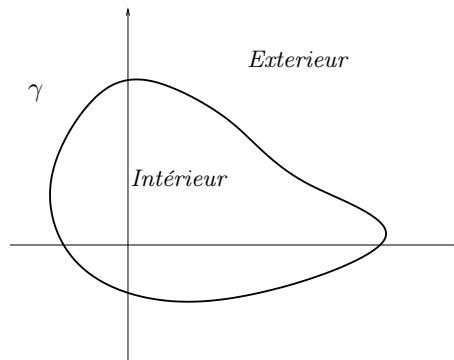


FIGURE 3.4. L'intérieur et l'extérieur de γ .

les indices sont égaux à ± 1), on a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \pm 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k), \quad (3.37)$$

8. qui doit être en principe convexe ou connexe.

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ . Si le chemin est parcouru dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k), \quad (3.38)$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ .

DÉMONSTRATION. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note Q_k la partie principale de f en α_k . Ainsi, la fonction $g = f - (Q_1 + \dots + Q_n)$ a une singularité illusoire en chaque point α_k et se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω . Le Théorème de Cauchy 3.23 appliqué à g donne donc

$$\int_{\gamma} f(z) - (Q_1 + \dots + Q_n)(z) dz = 0, \quad (3.39)$$

et donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (Q_1 + \dots + Q_n)(z) dz. \quad (3.40)$$

Or, pour tout k , on a

$$\int_{\gamma} Q_k(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{l=1}^{m_k} a_l (z - \alpha_k)^{-l} dz = a_{-1} \int_{\gamma} (z - \alpha_k)^{-1} dz + \sum_{l=2}^{m_k} \int_{\gamma} a_l (z - \alpha_k)^{-l} dz. \quad (3.41)$$

En utilisant l'exemple 3.18 et de nouveau le théorème 3.23, on constate que le second terme de la somme (3.41) est nul. Par définition $a_{-1} = \text{Rés}(f, \alpha_k)$ et $\int_{\gamma} (z - \alpha_k)^{-1} dz = 2i\pi \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_k)$. Bref, selon (3.39), (3.40) et (3.41), on a bien

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_k) \text{Rés}(f, \alpha_k).$$

dont on déduit (3.37) et (3.38) (voir remarque 3.15). \square

EXEMPLE 3.38. Reprenons l'exemple 3.26 en appliquant directement le théorème 3.37. On applique ce théorème à la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}. \quad (3.42)$$

L'utilisation de ce théorème permet d'obtenir une méthode plus générale et plus brève. Ω est aussi choisi égal à \mathbb{C} et le chemin γ est égal à Γ_R , donné sur la figure 3.3. L'unique pôle de la fonction f dans Ω est égal à $\alpha_1 = i$. Ainsi, la formule (3.37) fournit

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2i\pi \text{Rés}(f, \alpha_1). \quad (3.43)$$

Comme dans l'exemple 3.26 (étape 2), on montre l'égalité (3.21).

On montre comme dans l'exemple 3.26 (étape 3), l'égalité (3.22).

On n'a plus besoin de faire l'étape 1 (calcul des éléments simples et utilisation de la formule de Cauchy (3.15)) et on obtient directement, en utilisant (3.43), (3.21) et (3.22), avec $R \rightarrow \infty$:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = 2i\pi \text{Rés}(f, \alpha_1),$$

ce qui permet de conclure, comme dans à l'étape 4, en rajoutant le calcul de $\text{Rés}(f, \alpha_1) = \text{Rés}(f, i)$. Cela est traité dans l'exemple 3.43 page 45, où l'on montre que $\text{Rés}(f, i) = -\frac{i}{2e}$ et on obtient donc

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = -2i\pi \frac{i}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

et l'on retrouve donc (3.23).

3.4.3. Calcul de résidus

Dans le cas d'un pôle simple (d'ordre $m = 1$), souvent présent, le résidu est facile à obtenir :

LEMME 3.39. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Supposons que f s'écrive $f = g/\phi$ où g est holomorphe sur un ouvert Ω , avec $g(\alpha) \neq 0$, et que ϕ est holomorphe et admet en α un zéro d'ordre un⁹. Alors, f admet un pôle simple en α et*

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{\phi'(\alpha)}. \quad (3.45)$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où ϕ est polynômiale, d'après la théorie de la décompositions en éléments simples [RDO79, proposition p. 227], on sait que la décomposition en éléments simples de $1/\phi$ relative au pôle α est $1/((z - \alpha)\phi'(a))$, dont on déduit qu'au voisinage de α ,

$$f(z) = \frac{g(z)}{\phi'(\alpha)(z - \alpha)} + Q(z),$$

où Q est une fonction holomorphe au voisinage de α et donc on déduit le résultat, grâce au lemme 3.36, puisque g et Q sont holomorphes au voisinage de α .

Dans le cas général, on renvoie à la preuve du lemme 3.41. □

Dans le cas d'un dénominateur polynomial, il vient

LEMME 3.40. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soient $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$, deux à deux distincts. Supposons que f s'écrive $f = g/\phi$ où g est holomorphe sur un ouvert Ω , avec $g(\alpha_k) \neq 0$, et que ϕ vérifie*

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k). \quad (3.46)$$

Alors, f admet un pôle simple en α_k et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{Rés}(f, \alpha_k) = \frac{g(\alpha_k)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\alpha_k - \alpha_l)}. \quad (3.47)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que l'on est dans le cadre du lemme 3.39 avec

$$\phi'(z) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z - \alpha_l).$$

□

Le lemme 3.39 se généralise au cas d'un pôle multiple (d'ordre $m \geq 1$); en effet, il se généralise¹⁰ de la façon suivante (voir aussi [Buc92, proposition 3.6.8 p. 116]) :

LEMME 3.41. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Supposons que f s'écrive $f = g/\phi$ où g est holomorphe sur un ouvert Ω , avec $g(\alpha) \neq 0$, et que ϕ admette en α un zéro d'ordre m , entier supérieur à un¹¹. Alors, f admet un pôle d'ordre*

9. ce qui peut se traduire par

$$\phi(\alpha) = 0, \quad \phi'(\alpha) \neq 0. \quad (3.44)$$

10. Cette formule m'a été suggérée en 2013 par l'étudiant Hazem Ben Aissia que je remercie vivement !

11. ce qui peut se traduire par

$$\phi(\alpha) = 0, \quad \phi'(\alpha) = 0, \quad \phi''(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad \phi^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad \phi^{(m)}(\alpha) \neq 0. \quad (3.48)$$

m en α et le résidu de f en α se calcule avec l'une des deux formules

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-\alpha)^m f(z)) \right]_{z=\alpha}, \quad (3.49a)$$

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\frac{g(z)}{F(z)} \right) \right]_{z=\alpha}, \quad (3.49b)$$

où la fonction holomorphe F au voisinage de α est définie par

$$\phi(z) = (z-\alpha)^m F(z), \quad (3.50)$$

avec $F(\alpha) \neq 0$.

REMARQUE 3.42. La formule (3.49b) est à privilégier dans le cas de calcul à la main, tandis que la formule (3.49a) est utilisée plutôt dans un cadre informatique. Voir par exemple la fonction matlab `residu` disponible sur le web. Dans ce cas, la formule (3.49a) sera remplacée par

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-\alpha)^m f(z)), \quad (3.51)$$

pour éviter que n'interviennent des valeurs indéterminées si, dans le résultat de la dérivée $m-1$ -ième, les simplifications n'ont pas été faites.

Par exemple, si $m=1$, on a d'après (3.51) :

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} ((z-\alpha)f(z)).$$

Or on a

$$(z-\alpha)f(z) = (z-\alpha) \frac{g(z)}{\phi(z)} = \frac{g(z)}{\frac{\phi(z)-\phi(\alpha)}{z-\alpha}},$$

qui tend vers $g(\alpha)/\phi'(\alpha)$ quand z tend vers α et on retrouve donc le résultat du lemme 3.39 page précédente.

Notons aussi que ces deux formules supposent connue la valeur de l'ordre m . En fait, l'équation (3.48) permet de déterminer automatiquement la valeur de m , par dérivation successive, ce qui est exploité par la fonction `residu`, qui, outre le résidu, calcule automatiquement l'ordre m .

On renvoie aussi aux deux exemples 3.43 et 3.44.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.41.

Ce lemme est en fait une conséquence du lemme 3.34.

On applique dans un premier temps le lemme 3.33 à la fonction ϕ :

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(\alpha)}{k!} (z-\alpha)^k + (z-\alpha)^m F(z),$$

Les hypothèses (3.48) entraînent que la somme $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(\alpha)}{k!} (z-\alpha)^k$ est nulle. De plus, puisque $\phi^{(m)}(\alpha) \neq 0$, on a $F(\alpha) \neq 0$. Il vient donc

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m F(z)}$$

et en posant $J = g/F$:

$$f(z) = \frac{J(z)}{(z-\alpha)^m},$$

où J est holomorphe au voisinage de α (puisque $H(\alpha) \neq 0$) et $J(\alpha) \neq 0$ (puisque $g(\alpha) \neq 0$). Ainsi, d'après le lemme 3.34, α est un pôle d'ordre m de f . De plus, l'équation (3.31) fournit l'expression de a_{-1} et donc

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, \alpha) &= \frac{1}{(m-1)!} J^{(m-1)}(\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{g}{F} \right)^{(m-1)}(\alpha), \\ &= \frac{1}{(m-1)!} (f(z)(z-\alpha)^m)^{(m-1)}(\alpha). \end{aligned}$$

□

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.39. On utilise alors le lemme 3.41 avec $m = 1$ pour démontrer le lemme 3.39. En effet, il vient selon (3.49b)

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{F(\alpha)}. \quad (3.52)$$

Si on dérive (3.50) (avec $m = 1$), une fois, on a

$$\phi'(z) = F(z) + (z - \alpha)F'(z),$$

et donc

$$\phi'(\alpha) = F(\alpha)$$

et donc (3.52) entraîne

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{\phi'(\alpha)},$$

avec

$$f = \frac{g}{\phi},$$

ce qui est exactement la conclusion du lemme 3.39. □

Traisons maintenant deux exemples de calcul de résidu, l'un d'ordre 1 et le second d'ordre deux.

EXEMPLE 3.43 (Détermination d'un résidu d'ordre un). Déterminons la valeur du résidu de f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}, \quad (3.53a)$$

en

$$\alpha = i. \quad (3.53b)$$

- On est dans le cas du lemme 3.39 puisque $f = g/\phi$ où $g(z) = e^{iz}$ est holomorphe, $\phi(z) = z^2 + 1$, dont $\alpha = i$ est un zéro d'ordre un. On a donc, d'après (3.45)

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{\phi'(\alpha)} = \left[\frac{e^{iz}}{2z} \right]_{z=i} = \frac{e^{i^2}}{2i} = -\frac{i}{2e},$$

et bref

$$\text{Rés}(f, \alpha) = -\frac{i}{2e}. \quad (3.54)$$

- Si on utilise la fonction `residu` et que l'on tape

`[res ,m]=residu('exp(i*z)', '(1+z^2)', i)`

on obtient bien $\text{Rés}(f, \alpha) = -1/2ie^{-1}$ avec un ordre $m = 1$.

EXEMPLE 3.44 (Détermination d'un résidu d'ordre deux). Déterminons la valeur du résidu de f définie par

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \quad (3.55a)$$

en

$$\alpha = i. \quad (3.55b)$$

Remarquons que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ et donc que

$$f(z) = \frac{1}{(z + i)^2} \frac{1}{(z - i)^2} \quad (3.56)$$

Le pôle i est donc d'ordre deux.

- La première méthode consiste à faire un développement limité de la fonction f au voisinage de $z = i$. On pose donc $z = i + u$ avec $u \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{((i+u)^2 + 1)^2}, \\ &= \frac{1}{(-1 + 2iu + u^2 + 1)^2}, \\ &= \frac{1}{(2iu + u^2)^2}, \\ &= \frac{1}{(2iu)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{2i}\right)^2}, \\ &= \frac{1}{-4u^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{2i}\right)^2}. \end{aligned}$$

Or, en 0, on a, comme dans \mathbb{R}

$$(1 + Z)^{-2} = 1 - 2Z + o(Z),$$

ce qui signifie :

$$(1 + Z)^{-2} = 1 - 2Z + Z\varepsilon(Z),$$

avec $\varepsilon(Z)$ quand Z tend vers 0. On a donc, quand $Z = u/(2i)$ avec u tendant vers 0 :

$$\left(1 + \frac{u}{2i}\right)^{-2} = 1 - \frac{2u}{2i} + o(u) = 1 + ui + o(u),$$

et donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{-4u^2} (1 + ui + o(u)), \\ &= \frac{1}{-4u^2} (1 + ui + u\varepsilon(u)), \\ &= -\frac{1}{4u^2} - \frac{i}{4u} + \frac{\varepsilon(u)}{u}, \end{aligned}$$

et par identification, on en déduit que le terme a_{-1} est donc égal à $-i/4$ et bref

$$\text{Rés}(f, \alpha) = -\frac{i}{4}. \quad (3.57)$$

- La seconde méthode, plus rapide, consiste à utiliser la formule (3.49b). D'après (3.56), on a donc avec $m = 2$:

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, \alpha) &= \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\frac{g(z)}{F(z)} \right) \right]_{z=\alpha}, \\ &= \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)', \\ &= ((z+i)^{-2})'_{z=i}, \\ &= -2((z+i)^{-3})'_{z=i}, \\ &= -\frac{2}{(2i)^3}, \\ &= -\frac{i}{4}, \end{aligned}$$

et l'on retrouve bien (3.57).

- Si on utilise la fonction **residu** et que l'on tape

$$[\text{res}, m] = \text{residu} ((1+z^2)^{-2}, i)$$

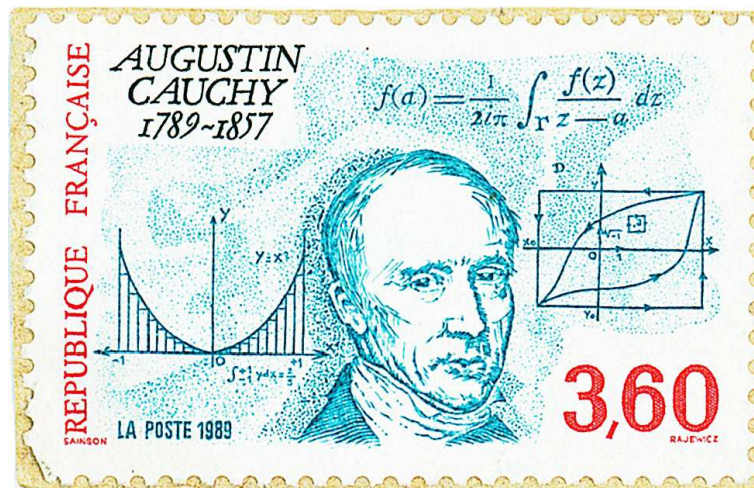
on obtient bien $\text{Rés}(f, \alpha) = -1/4i$ avec un ordre $m = 2$.

3.5. Applications aux calculs d'intégrales

On renvoie à [Pab95, chap. 10].

On renvoie pour plus d'exemples à la section 5.1.1 page 51.

3.6. Hommages à Cauchy et à la formule de Cauchy



Quelle est le nom de la formule? Quelles sont les hypothèses nécessaires?

Chapitre 4

Transformations conformes

Ce chapitre, désormais non traité, est présenté dans l'annexe K.

Applications de l'analyse complexe

5.1. Calculs d'intégrales et de séries

5.1.1. Calculs d'intégrales

Outre les techniques usuelles d'intégration par partie et de changement de variables, le théorème des résidus ouvre de très nombreuses portes pour le calcul d'intégrales usuelles.

On renvoie à

— [Pab95, chap. 10].

— http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus

On prendra garde au fait que la définition des intégrales des troisièmes et quatrième type n'est pas tout à fait la même dans ces deux références!

On admettra que les différentes intégrales existent (on pourra le montrer sur les exemples traités)!

L'utilisation du théorème des résidus permet d'éviter les fastidieuses décompositions en éléments simples déjà utilisées pour calculer des intégrales indéfinies, voire de traiter des cas que l'on ne peut traiter autrement!

5.1.1.1. Calculs d'intégrales du premier type.

PROPOSITION 5.1 (Intégrales du premier type). *Soit \mathcal{C} le cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 1$. On considère $R(X, Y) = P(X, Y)/Q(X, Y)$ une fraction rationnelle en X et Y telle que*

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{C}, \quad Q(X, Y) \neq 0. \quad (5.1)$$

Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \quad (5.2)$$

L'intégrale I définie par

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \quad (5.3)$$

est égale à

$$I = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k), \quad (5.4)$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur du disque de frontière \mathcal{C} .

DÉMONSTRATION. On considère le couple $(\cos t, \sin t)$ comme une représentation du cercle unité \mathcal{C} . On pose

$$z = \gamma(t), \quad (5.5)$$

où

$$\gamma(t) = e^{it} \text{ pour } t \in [0, 2\pi[. \quad (5.6)$$

On a donc, puisque $|z|^2 = z\bar{z} = 1$,

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \\ \sin t &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\end{aligned}$$

ainsi que

$$dz = ie^{it} dt$$

qui fournit

$$dt = \frac{dz}{iz}.$$

On a

$$\int_{\mathcal{C}} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

et donc

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt. \quad (5.7)$$

On considère donc la fonction f définie par (5.2) D'après (5.1), f n'a pas de pôles sur \mathcal{C} . En effet, on a par définition de f :

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{P\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}.$$

Les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto 1/z$ sont holomorphe sur \mathbb{C}^* . Par composition, $z \mapsto P\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* . $z \mapsto Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* et ne peut s'annuler sur \mathcal{C} . Sinon, cela contredirait l'hypothèse (5.1). Ainsi, f est holomorphe sauf en ses pôles, en nombre finis et aucun d'eux n'est sur \mathcal{C} . La fonction $t \mapsto R(\cos t, \sin t)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ car elle vaut

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}. \quad (5.8)$$

et d'après (5.1), $Q(\cos t, \sin t)$ est strictement non nul sur \mathcal{C} . Ainsi cette fonction est bien intégrable sur $[0, 2\pi]$. Le théorème des résidus et (5.7) fournissent enfin le résultat. \square

REMARQUE 5.2. En fait, le fait que f n'a pas de pôles sur \mathcal{C} est équivalent à (5.1). Donc, l'hypothèse (5.1) peut se vérifier *a posteriori* en vérifiant que :

$$\text{aucun pôle de } f \text{ n'est de module 1.} \quad (5.9)$$

EXEMPLE 5.3 (Exemple du premier type).

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4 \cos t} = \frac{2\pi}{3}$$

DÉMONSTRATION. On a ici

$$R(X, Y) = \frac{1}{-4X + 5}.$$

Vérifions que (5.1) a lieu. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + Y^2 = 1$. Si $-4X + 5 = 0$, alors $X = 5/4$, ce qui n'est pas possible car $|X| \leq 1$. On peut donc appliquer la proposition 5.1. On considère donc

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{-4\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) + 5}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-i}{z} \frac{1}{-2\left(z + \frac{1}{z}\right) + 5}, \\ &= \frac{-i}{-2z^2 - 2 + 5z}, \\ &= \frac{i}{2z^2 - 5z + 2}, \end{aligned}$$

et donc

$$f(z) = \frac{i}{(z-2)(2z-1)}.$$

f a donc deux pôles simples qui sont 2 et $1/2$. D'après la remarque 5.2 et (5.9), on peut donc vérifier (5.1) aussi *a posteriori*. Le seul pôle de f situé à l'intérieur du disque de frontière \mathcal{C} est donc $1/2$ et on a, d'après (3.45),

$$\text{Rés}(f, 1/2) = \frac{i}{[(z-2)(2z-1)]'_{z=1/2}} = \frac{i}{[(2z-1) + 2(z-2)]_{z=1/2}} = \frac{i}{2(1/2-2)} = -\frac{i}{3},$$

et donc

$$I = \frac{2\pi}{3}.$$

□

REMARQUE 5.4. On peut aussi déterminer la primitive de la fonction $t \mapsto 1/(5-4\cos t)$, en utilisant la technique, plus longue, présentée dans [RDO88, section 7.1.4] ou [Bas19, annexe "Quelques calculs de primitives"]. On fait, à cet effet, le changement de variable suivant : $u = \tan(t/2)$. On a donc¹ $\cos(t) = (1-u^2)/(1+u^2)$ et $dt = 2du/(1+u^2)$. Il vient donc

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{dt}{5-4\cos t}, \\ &= \int \frac{2du}{1+u^2} \frac{1}{5-4\frac{1-u^2}{1+u^2}}, \\ &= 2 \int \frac{2du}{9u^2+1}. \end{aligned}$$

On pose alors $u = v/3$ et alors $du = dv/3$ et

$$I = \frac{2}{3} \int \frac{1}{v^2+1} dv = \frac{2}{3} \arctan(3u).$$

Il faut prendre soin de distinguer les différents intervalles d'intégration. Sur $[-\pi, \pi]$, on a $t/2 = \arctan u$ et donc $u = \tan(t/2)$ et

$$J(t) = \frac{2}{3} \arctan(3 \tan(t/2)). \quad (5.10)$$

Sur $[\pi, 3\pi]$, on a avec les notations de la section 7.1.4 de [RDO88] : $t/2 = \arctan u + 2\pi$, avec $m = 1$ et donc $t = 2 \arctan u + 2\pi$ et $u = \tan((t-2\pi)/2)$ et

$$J(t) = \frac{2}{3} \arctan(3 \tan((t-2\pi)/2)). \quad (5.11)$$

1. cela est montré dans [Bas19, annexe "Trigonométrie"].

Compte tenu de (5.10) et de (5.11), il vient alors

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}, \\
 &= \int_0^\pi \frac{dt}{5-4\cos t} + \int_\pi^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}, \\
 &= \left[\frac{2}{3} \arctan(3 \tan(t/2)) \right]_0^\pi + \left[\frac{2}{3} \arctan(3 \tan((t-2\pi)/2)) \right]_\pi^{2\pi}, \\
 &= \frac{2}{3} \arctan(3 \tan(\pi/2)) + 0 + 0 - \frac{2}{3} \arctan(3 \tan(-\pi/2)), \\
 &= \frac{2}{3} \arctan(+\infty) - \frac{2}{3} \arctan(-\infty), \\
 &= \frac{2}{3}(\pi/2 + \pi/2),
 \end{aligned}$$

et on retrouve donc $I = 2\pi/3$, mais beaucoup plus longuement !

◇

EXEMPLE 5.5 (Exemple du premier type (bis)). Cet exemple est en fait le calcul général de l'exemple 5.3 page 52 correspondant à la valeur particulière de $x = 2$. On montre que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{x^2 - 2x \cos t + 1} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-x^2}, & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{2\pi}{x^2-1}, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On a ici, pour la valeur du paramètre x fixé,

$$R(X, Y) = \frac{1}{x^2 - 2xX + 1}.$$

Vérifions que (5.1) a lieu. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + Y^2 = 1$. Si $x^2 - 2xX + 1 = 0$, alors puisque $x \neq 0$, on a $X = (x^2 + 1)/2x$. Or, $|(x^2 + 1)/2x| > 1$ puisque que c'est successivement équivalent à

$$\begin{aligned}
 |x^2 + 1| > 2|x| &\iff x^2 + 1 > 2|x|, \\
 &\iff -x^2 - 1 < 2x < x^2 + 1, \\
 &\iff x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ et } x^2 + 2x + 1 > 0, \\
 &\iff (x-1)^2 > 0 \text{ et } (x+1)^2 > 0,
 \end{aligned}$$

ce qui est vrai puisque x est différent de ± 1 . Puisque $|X| \leq 1$, l'égalité $x^2 - 2xX + 1 = 0$ ne peut donc avoir lieu.

On peut donc appliquer la proposition 5.1. On considère donc

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{x^2 - 2x \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) + 1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{-i}{z} \frac{1}{x^2 - x \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}, \\
 &= \frac{-i}{z(x-z) \left(x - \frac{1}{z}\right)},
 \end{aligned}$$

et donc

$$f(z) = \frac{i}{(z-x)(zx-1)} = \frac{i}{x(z-x)(z-1/x)}.$$

x étant non nul et différent de ± 1 , f a donc deux pôles simples qui sont x et $1/x$. Supposons $|x| < 1$. Le seul pôle de f situé à l'intérieur du disque de frontière \mathcal{C} est donc x et d'après (5.4)

$$I = 2i\pi \operatorname{Rés}(f, x).$$

D'après (3.47), on a donc

$$\operatorname{Rés}(f, x) = \frac{i}{[x(z-1/x)]_{z=x}} = \frac{i}{x(x-1/x)} = \frac{i}{x^2-1}$$

Ainsi,

$$I = \frac{2\pi}{1-x^2}.$$

Si $|x| > 1$, le seul pôle de f situé à l'intérieur du disque de frontière \mathcal{C} est donc $1/x$ et un calcul similaire donne

$$\text{Rés}(f, 1/x) = \frac{i}{[x(z-x)]_{z=1/x}} = \frac{i}{x(1/x-x)} = \frac{i}{(1-x^2)},$$

et donc

$$I = \frac{2\pi}{x^2 - 1}.$$

□

◇

5.1.1.2. Calculs d'intégrales du second type.

Avant de passer au calcul, on donne le lemme suivant :

LEMME 5.6 (Lemme de Jordan). Soient θ_1 et θ_2 deux réels tels que $\theta_1 \leq \theta_2$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $R_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et U un voisinage de R_0 (du type $[0, a[$, si R_0 est nul, $]R_0 - a, R_0 + a[$ si $R_0 \neq 0$ est fini et $]a, +\infty[$ sinon). Soit f une fonction continue sur l'ensemble S des complexes de la forme

$$S = \{z \in \mathbb{C}, \exists r \in U, \theta_1 \leq \arg(z - z_0) \leq \theta_2 \text{ et } |z - z_0| = r.\} \quad (5.12)$$

On note γ_r l'arc de cercle de centre z_0 et de rayon r paramétré par $\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$ où $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ (voir figure

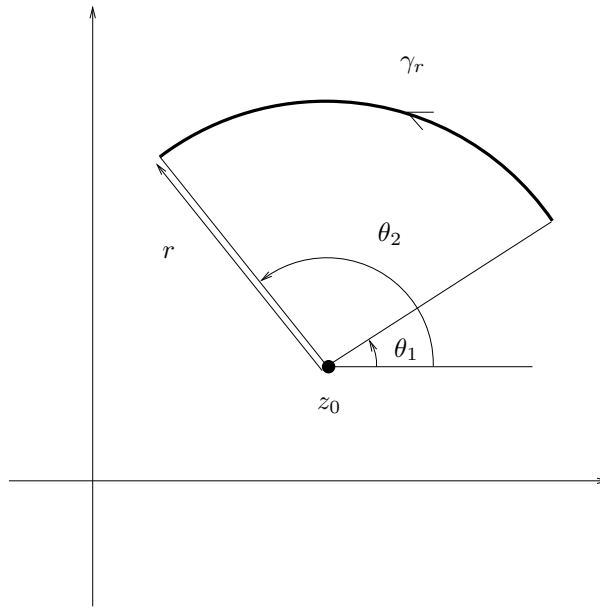


FIGURE 5.1. Le secteur angulaire S .

5.1). Supposons que l'on ait

$$\lim_{\substack{R=|z-z_0| \rightarrow R_0 \\ z \in S}} |(z - z_0)f(z)| = 0. \quad (5.13)$$

Alors

$$\lim_{r \rightarrow R_0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0 \quad (5.14)$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage de R_0 tel que pour tout r dans ce voisinage

$$z \in S \text{ et } |z - z_0| = r \implies |(z - z_0)f(z)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.11,

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq r(\theta_2 - \theta_1) \frac{\varepsilon}{|z - z_0|} = r(\theta_2 - \theta_1) \frac{\varepsilon}{r} = (\theta_2 - \theta_1)\varepsilon.$$

□

On en déduit en particulier la forme usuelle du Lemme de Jordan correspondant à $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$:

LEMME 5.7 (Lemme de Jordan (forme usuelle)). Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et f continue sur \mathbb{C} . Soit γ_R le chemin défini comme le cercle de centre z_0 et de rayon R . Soit $R_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Si $|(z - z_0)f(z)|$ tend vers zéro, quand R tend vers R_0 , uniformément par rapport à l'argument de $z - z_0$, alors $\int_{\gamma_R} f(z) dz$ tend vers zéro quand R tend vers R_0 .

PROPOSITION 5.8 (Intégrales du second type). Soit \mathcal{R} une fraction rationnelle sans pôle réel. On suppose que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |z\mathcal{R}(z)| = 0, \quad (5.15)$$

ce qui sera vrai si

$$R = \frac{A}{B}, \quad (5.16a)$$

avec A et B polynomiales telles que

$$\deg(B) \geq \deg(A) + 2. \quad (5.16b)$$

L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx, \quad (5.17)$$

existe² et est égale à

$$I = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k), \quad (5.18)$$

où la somme est étendue aux pôles de \mathcal{R} situés au dessus de l'axe des x .

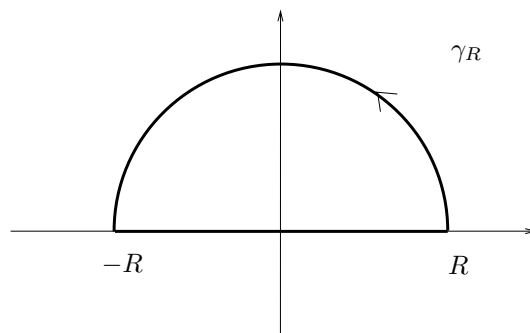


FIGURE 5.2. le chemin γ_R : réunion d'un segment et d'un demi-cercle.

2. C'est en fait la limite donnée par (5.19c) qui existe.

DÉMONSTRATION. On laisse au lecteur le soin de vérifier que (5.16) implique (5.15) (voir remarque 5.9).

On considère le chemin γ_R , défini comme la réunion du demi-cercle de centre l'origine de rayon R , noté $\tilde{\gamma}_R$, et du segment $[-R, R]$ (voir figure 5.2), R étant choisi assez grand, pour que tous les pôles de \mathcal{R} , situés au dessus de l'axe des x , soient à l'intérieur de γ_R . On pose

$$I(R) = \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z) dz.$$

D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de \mathcal{R} situés à l'intérieur de γ , et donc au dessus de l'axe de x . On en déduit³ donc

$$\int_{\tilde{\gamma}_R} \mathcal{R}(z) dz + \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k). \quad (5.19a)$$

L'hypothèse (5.15) et le lemme 5.6 avec $R_0 = +\infty$ impliquent que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} \mathcal{R}(z) dz = 0, \quad (5.19b)$$

et donc à la limite $R \rightarrow \infty$ dans (5.19a), on constate que

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx, \quad (5.19c)$$

existe et vérifie

$$I = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k), \quad (5.19d)$$

où la somme est étendue aux pôles de \mathcal{R} situés au dessus de l'axe des x . \square

REMARQUE 5.9. Notons qu'en fait, les deux hypothèses (5.15) et (5.16b) sont équivalentes et elles-même équivalentes à l'existence de l'intégrale I . En effet, en reprenant les notations (5.16), en notant p et q les degrés respectifs de A et B , et a_p et b_q les coefficients dominant (non nuls) de A et B , il est aisé de vérifier que, quand $|z|$ tend vers l'infini

$$|z\mathcal{R}(z)| \sim \frac{|a_p||z|^{p+1}}{|b_p||z|^q}$$

et donc

$$|z\mathcal{R}(z)| \sim \frac{|a_p|}{|b_p|} |z|^{p-q+1}. \quad (5.20)$$

Donc (5.15) est vraie si et seulement si $p - q + 1 \leq -1$, soit encore

$$p + 2 \leq q, \quad (5.21)$$

soit (5.16b). Sous cette hypothèse, la proposition 5.8 nous montre l'existence de l'intégrale I . Mais, on peut l'affirmer *a priori* que I existe (au sens de Riemann comme celui de Lebesgue), puisque, d'après (5.20), on a pour x tendant vers $+\infty$

$$|\mathcal{R}(x)| \sim \frac{|a_p|}{|b_p|} \frac{1}{|x|^{q-p}},$$

et l'intégrale impropre donnée par

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx,$$

3. Notons que les deux intégrales intervenant dans (5.19a) sont définies. En effet, d'une part, l'hypothèse de l'absence de pôles réels de \mathcal{R} implique que la fraction \mathcal{R} a un dénominateur strictement positif sur \mathbb{R} ; elle y est donc continue. Ainsi, pour tout $R \geq 0$, l'intégrale $\int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx$ existe. D'autre part, d'après le choix de R , \mathcal{R} est dérivable en tout point de $\tilde{\gamma}_R$ et ainsi, l'intégrale $\int_{\tilde{\gamma}_R} \mathcal{R}(z) dz$ est définie.

est absolument convergente (ou Lebesgue intégrable), d'après la règle de Riemann, ssi $q-p \geq 2$ et on retombe sur (5.21), équivalent à (5.16b).

◇

REMARQUE 5.10. L'aspect rationnel de la fraction R n'intervient pas explicitement dans la preuve (mis à part l'implication de (5.15) par (5.16)) et la proposition 5.8 peut se généraliser de la façon suivante :

PROPOSITION 5.11 (Intégrales du second type (général)). *Soit \mathcal{R} une fonction holomorphe sur \mathbb{C} sauf en un nombre fini de pôles, supposés non réels. On suppose que*

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \text{Im}(z) \geq 0}} |z\mathcal{R}(z)| = 0. \quad (5.22)$$

La limite donnée par (5.19c) existe et est égale à

$$I = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k), \quad (5.23)$$

où la somme est étendue aux pôles de \mathcal{R} situés au dessus de l'axe des x .

DÉMONSTRATION. La preuve en est laissée au lecteur qui vérifiera qu'elle repose sur (5.19), encore valable. □

EXEMPLE 5.12 (Exemple du second type). On montre que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

DÉMONSTRATION. On considère \mathcal{R} définie par

$$\mathcal{R} = \frac{1}{(z^2 + 1)^2},$$

qui vérifie (5.15) et dont les pôles sont $\pm i$. D'après la proposition 5.8, on a donc

$$I = 2i\pi \text{Rés}(\mathcal{R}, i).$$

Ce résidu (d'ordre deux) a déjà été calculé dans l'exemple 3.44. On a donc

$$I = 2i\pi \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

□

5.1.1.3. Autres exemples : les intégrales de Dirichlet et de Fresnel.

EXEMPLE 5.13. Deux intégrales célèbres et utile en physique sont d'une part l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

et d'autre part, les intégrales de Fresnel données par

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Le calcul de l'intégrale de Dirichlet est proposé en annexe H et celui des intégrales de Fresnel en annexe I.

5.1.1.4. Autre exemple.

EXEMPLE 5.14. On peut aussi déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+bt^2)}{a^2+t^2} dt,$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Le calcul de cette intégrale de Dirichlet est proposé en annexe J.

5.1.1.5. *Encore d'autres exemples.*

Voir les annexes F et G.

5.1.2. **Calculs de séries**

Voir par exemple http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_résidus.

On donne aussi l'exercice 5.15 donné sous la forme d'un exercice et de son corrigé, donné lors de l'examen complémentaire du 4 juillet 2014. On renverra aussi à l'annexe T du cours (et notamment à l'exemple T.23) qui est une généralisation de ce résultat.

EXERCICE 5.15. L'objet de cet exercice est de montrer le résultat sur la somme⁴ suivant (dont on admet l'existence) :

$$\forall a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}. \tag{5.25}$$

(1) Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction complexe f définie par

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}. \tag{5.26}$$

Quels sont les pôles de cette fonction, notés z_1 et z_2 ?

(2) On considère la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left((z_l)_{1 \leq l \leq 2} \cup \mathbb{Z} \right), \quad g(z) = \pi f(z) \cotg(\pi z) = \pi f(z) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}. \tag{5.27}$$

Montrer que l'ensemble des pôles de cette fonction est égal à $\left((z_l)_{1 \leq l \leq 2} \cup \mathbb{Z} \right)$.

(3) Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) = f(k). \tag{5.28}$$

(4)

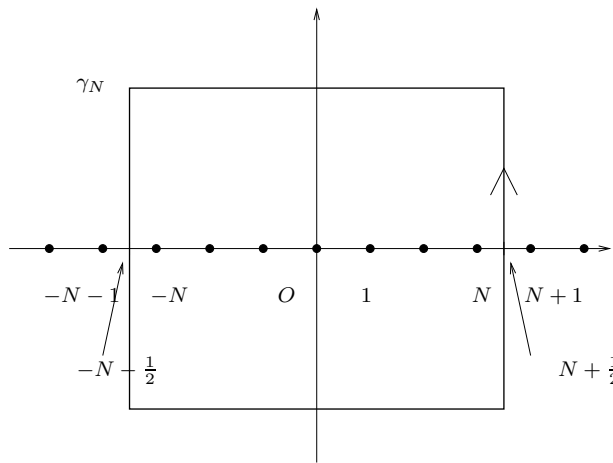


FIGURE 5.3. le chemin γ_N

Pour N entier non nul, on définit γ_N le chemin carré de \mathbb{C} , de centre l'origine et passant par le point d'affixe $N + 1/2$ (voir la figure 5.3). On choisit N assez grand de façon que γ_N contiennent tous les pôles de f .

Montrer, en utilisant le théorème des résidus que

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz = 2i\pi \sum_{n=-N}^N \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), n) + 2i\pi \sum_{l=1}^2 \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l), \tag{5.29}$$

4. On rappelle que la cotangente hyperbolique, \coth , est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{5.24}$$

(5) En admettant que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| = 0,$$

montrer que la somme $\sum_{n=-N}^N f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et vérifie

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = - \sum_{l=1}^2 \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l). \quad (5.30)$$

(6) Conclure en montrant le résultat (5.25).

(7) En admettant la continuité de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ par rapport à a , quel résultat usuel retrouve-t-on en faisant tendre a vers zéro dans (5.25) ?

Corrigé

(1) La dénominateur de la fonction complexe définie par l'équation (5.26) de l'énoncé est nul si et seulement si $z^2 + a^2 = 0$, c'est-à-dire, si $z = \pm ai$. Les pôles de f son donc z_1 et z_2 où

$$z_1 = ai, \quad z_2 = -ai. \quad (5.31)$$

(2) Le dénominateur de la fonction g définie par l'équation (5.27) de l'énoncé est égal à $(z^2 + a^2) \sin(\pi z)$ et est nul si $z = a_l$ avec $l = 1$ ou 2 ou si $\sin(\pi z) = 0$, ce qui est équivalent à $e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 0$, soit $e^{2i\pi z} = 1$. D'après la proposition 2.35, cela entraîne $\text{Ln}(e^{2i\pi z}) = \text{Ln}(1) = 0$ et donc $2i\pi z + 2ik\pi = 0$ où k appartient à \mathbb{Z} . Réciproquement, si z appartient à \mathbb{Z} , $e^{2i\pi z} = 1$. Ainsi, z est un entier relatif. L'ensemble des pôles de la fonction g est donc égal à $\left((z_l)_{1 \leq l \leq 2} \cup \mathbb{Z} \right)$.

(3) D'après le lemme 3.39 du cours, on a, pour tout k entier relatif, qui n'est donc pas un zéro de f ,

$$\text{Rés}(g, k) = \frac{\pi f(k) \cos(\pi k)}{[\sin \pi z]'_{z=k}} = \frac{\pi f(k) \cos(\pi k)}{\pi \cos(\pi k)} = f(k).$$

(4) Pour N entier non nul, on définit γ_N le chemin carré de \mathbb{C} , de centre l'origine et passant par le point d'affixe $N + 1/2$ (voir la figure 5.3 de l'énoncé). On choisit N assez grand de façon que γ_N contiennent tous les pôles de f .

D'après le théorème des résidus, il vient donc

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz = 2i\pi \sum_{n=-N}^N \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), n) + 2i\pi \sum_{l=1}^2 \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l), \quad (5.32)$$

(5) On admet que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| = 0. \quad (5.33)$$

Voir page 300 de l'annexe du cours T. D'après le résultat de la question 3

$$2i\pi \sum_{n=-N}^N \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), n) = 2i\pi \sum_{n=-N}^N f(n).$$

Enfin, si on passe à la limite $N \rightarrow \infty$ dans (5.32), on en déduit que la somme $\sum_{n=-N}^N f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et vérifie

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = - \sum_{l=1}^2 \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l). \quad (5.34)$$

(6) On a, pour $l = 1$ ou 2 , d'après le lemme 3.39 du cours,

$$\text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l) = \pi \cotg(\pi z_l) \frac{1}{[(z^2 + 1)']_{z=z_l}} = \pi \frac{\cos(\pi z_l)}{2 \sin(\pi z_l) z_l}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l) &= \sum_{l=1}^2 \pi \frac{\cos(\pi z_l)}{2 \sin(\pi z_l) z_l}, \\ &= \frac{\pi \cos(\pi ai)}{ai \sin(\pi ai)}, \\ &= \frac{\pi (e^{-\pi a} + e^{\pi a})/2}{ai (e^{-\pi a} - e^{\pi a})/2i}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

et donc

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a),$$

dont on déduit donc le résultat (5.25) de l'énoncé.

- (7) On admet la continuité⁵ de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ par rapport à a . Si on fait tendre a vers zéro dans le résultat (5.25) de l'énoncé, il vient

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} \right)$$

Après calculs, on montre que cette limite vaut $\pi^2/6$ et on retrouve donc le résultat classique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

◇

5.2. Applications à la mécanique des fluides et transformations conformes

5.2.1. Calculs analytiques d'écoulements potentiels irrotationnels plans pour des fluides parfaits incompressibles

5.2.1.1. Théorie et rappels de mécanique des fluides.

Pour plus de détail, on pourra consulter [Gué+04, p. 80 à 90, fascicule 5], [Duv90, p.214 à 225] et [GS86], ainsi que [AF03]. On pourra aussi consulter [Bas18b, chapitre 9].

Les fluides parfaits incompressibles étudiés lors d'écoulements potentiels plans ne représentent pas tout à fait le comportement réel de fluides, mais cette étude est intéressante, notamment car

- loin des parois, la viscosité diminue et l'approximation par des fluides parfaits est une hypothèse légitime ;
- on pourra obtenir facilement un grand nombre d'écoulement grâce notamment à matlab (voir section 5.2.1.2 et exercice de TP 1.6).

On s'intéresse à l'écoulement potentiels irrotationnels plan d'un fluide parfait incompressible. On suppose être dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Le champ des vitesses ne dépend que de x et de y est noté

$$V = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

On supposera u et v continues

Nous rappelons juste ici la propriété fondamentale suivante (voir par exemple [Bas11b, proposition 2.38 p. 28 et preuve constructive dans l'Annexe A, notamment p. 94]) :

PROPOSITION 5.16. *Si ϕ est un champ scalaire, alors*

$$\nabla \wedge (\nabla \phi) = 0 \quad (5.36)$$

Réciproquement, si V est un champ vectoriel, tel que

$$\nabla \wedge V = 0, \quad (5.37)$$

alors, il existe un champ scalaire ϕ défini à une constante près telle que

$$V = \nabla \phi. \quad (5.38)$$

La fonction ϕ est appelée potentiel (scalaire).

5. ce qui n'est pas évident, car on intervertit une limite et une somme infinie

Dans le cas étudié, V est un champ vectoriel dont la troisième composante est nulle et qui dépend uniquement de x et de y , on a donc $V = (u(x, y), v(x, y), 0)$. Ainsi

$$\nabla \wedge V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

et la proposition 5.16 s'écrit ici

PROPOSITION 5.17. *Soient u et v deux champs scalaire ne dépendant que de x et de y . Alors,*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5.39)$$

si et seulement si, il existe une fonction ϕ dépendant de x et de y telle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad (5.40a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v. \quad (5.40b)$$

DÉFINITION 5.18. La fonction ϕ est appelée potentiel des vitesses.

REMARQUE 5.19. Comme dans la proposition 2.23 p. 21 ou l'exemple 2.30 p. 26 de [Bas11b], la vitesse est l'analogue d'un gradient et est perpendiculaire aux équipotentielles. Elle va des régions des plus « froides » vers les plus « chaudes », comme l'illustreront les figures de la section 5.2.1.2.

Le fluide étant incompressible, on a aussi

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.41)$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.42)$$

Si on remplace u par $-v$ et v par u , de façon analogue à la proposition 5.17, on a

PROPOSITION 5.20. *Soient u et v deux champs scalaire ne dépendant que de x et de y . Alors,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.43)$$

si et seulement si, il existe une fonction ψ dépendant de x et de y telle que

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.44a)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (5.44b)$$

DÉFINITION 5.21. La fonction ψ est appelée fonction de courant.

DÉFINITION 5.22. Rappelons que les courbes d'équations $\phi = \text{constante}$ sont les équipotentielles de la fonction ϕ .

En tout point, le champ des vitesses V est perpendiculaire à l'équipotentielle qui passe par ce point.

En effet, la tangente en la courbe en $M(x, y)$ est $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$. Le champ des vitesse est $V = (u, v)$ et

$$0 = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

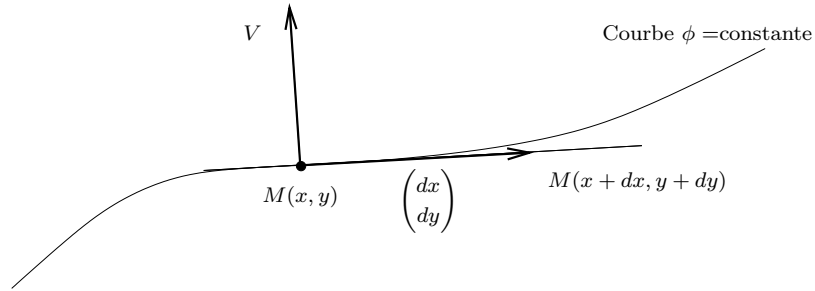


FIGURE 5.4. Le champ des vitesses V est perpendiculaire l'équipotentielle qui passe par ce point.

◇

Les lignes de courant sont définies par le fait que en tout point $V = (u, v)$ est colinéaire à (dx, dy) et donc

$$udy - vdx = 0,$$

ce qui implique selon (5.44)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0,$$

soit encore

$$d\psi = 0,$$

ce qui se traduit par le fait que l'on reste sur la courbe $\psi = \text{constante}$. Bref,

PROPOSITION 5.23. *Les lignes de courant sont les courbes d'équations $\psi = \text{constante}$, perpendiculaires aux équipotentiels de la fonction ϕ , d'équations $\phi = \text{constante}$.*

Notons finalement (5.40) et (5.44) sous la forme

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (5.45a)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.45b)$$

Les fonctions ϕ et ψ sont de classe C^1 puisque u et v sont continues.

Faisons maintenant le lien avec les fonctions holomorphes ! On considère la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$f(z) = f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (5.46)$$

noté en abrégé :

$$f = \phi + i\psi. \quad (5.47)$$

DÉFINITION 5.24. f est appelée potentiel complexe.

Les fonctions ϕ et ψ sont différentiables et donc f est \mathbb{R}^2 -différentiable. Les conditions de Cauchy-Riemann sur $f = \phi + i\psi$ (1.22) s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

qui sont donc exactement (5.45). Ainsi, d'après la Proposition 1.13, f est dérivable en (x, y) et donc f est holomorphe sur U . D'après (1.16), on a donc, d'après (5.47) :

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

et donc, d'après (1.22a)

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ &= u - iv. \end{aligned}$$

On a donc

$$f' = u - iv. \quad (5.48)$$

Réciproquement, on se donne f holomorphe sur \mathbb{C} . On peut poser

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{Re}(f), \\ \psi &= \operatorname{Im}(f). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

puis

$$V = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.49a)$$

$$u = \operatorname{Re} f', \quad (5.49b)$$

$$v = -\operatorname{Im} f'. \quad (5.49c)$$

On montre alors que le champ des vitesses est irrotationnel et incompressible, d'après les conditions de Cauchy-Riemann sur f .
 \diamond

Si f est injective et U est un ouvert, f est donc une application holomorphe sur U et d'après le théorème K.3, f est une transformation conforme. De plus, le corollaire K.4 nous dit que les courbes d'équation $\phi = \text{constante}$ et $\psi = \text{constante}$ sont localement perpendiculaires, ce qui nous permet de retrouver la propriété 5.23.

Bref,

PROPOSITION 5.25. *On se donne un écoulement plan irrotationnel incompressible. Dans un ouvert U simplement connexe⁶, avec d'éventuelles parois (où la vitesse est tangentielle), il suffit d'exhiber la fonction holomorphe f (éventuellement compatible avec les conditions aux limites imposées par les parois⁷) pour tracer les équipotentielles définies par $\phi = \operatorname{Re}(f) = \text{constantes}$ et les lignes de courant définies par $\psi = \operatorname{Im}(f) = \text{constantes}$.*

REMARQUE 5.26. En résumé, f est holomorphe ssi l'écoulement est irrotationnel et incompressible. Alors, en notant (u, v) le champ de vitesse et ϕ et ψ , les deux potentiels, le lien entre f et ϕ et ψ est donné par (5.47). Le lien entre f' et u et v est donné par (5.48).

REMARQUE 5.27.

(1) On peut par linéarité des équations, faire des combinaisons linéaires de potentiels complexes.

6. Voir note de bas de page 1 page 252.

7. Notons que la parois correspond en fait à une ligne de courant particulière, puisque sur une parois, la vitesse est tangentielle à celle-ci.

(2) f étant analytique, on peut dériver un potentiel complexe pour en définir un autre.

(3) Si on multiplie $f = \phi + i\psi$ par i , on remplace donc f par $f = -\psi + i\phi$, qui reste holomorphe. On obtient un écoulement où les lignes de courant et les équipotentielles sont permutés.

On a donc de nombreux moyens de générer des potentiels complexes !

REMARQUE 5.28.

On peut faire une analogie entre les courbes de niveau de la fonction ϕ et les courbes d'altitude constante, utilisées en topographie. Voir annexe L.

5.2.1.2. Simulations numériques.

Les différents potentiels donnés en cours sont les suivants (certains seront étudiés en TD, voir exercices TD 5.5 et 5.4) et la plupart seront tracés en TP (voir exercice de TP 1.6) :

$$f(z) = e^{-i\alpha}Uz, \text{ pour } U, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5.50a)$$

$$f(z) = \text{Ln}(z), \quad (5.50b)$$

$$f(z) = i \text{Ln}(z), \quad (5.50c)$$

$$f(z) = 1/z, \quad (5.50d)$$

$$f(z) = Uz + K/z, \text{ pour } U, K \in \mathbb{R}, \quad (5.50e)$$

$$f(z) = Uz + \text{Ln}(z), \text{ pour } U \in \mathbb{R}, \quad (5.50f)$$

$$f(z) = k \text{Ln}(z+a) - k \text{Ln}(z-a), \text{ pour } k, a \in \mathbb{R}_+^*, \quad (5.50g)$$

$$f(z) = kz^n, \text{ pour } k, n \in \mathbb{R}_+^*. \quad (5.50h)$$

Seules sont présentées ici quelques figures (que vous ferez lors de l'exercice 1.6 du TP) : sur ces figures, ont été représentées, pour différents potentiels complexes, les lignes de courant (en noir), les équipotentielles en pointillés, ainsi que le potentiel, par un dégradé de couleurs.

- La figure 5.5 correspond à un potentiel défini par (5.50a), qui correspond à un écoulement rectiligne uniforme.
- La figure 5.7 correspond à un potentiel défini par (5.50b), qui correspond à un écoulement de source ponctuelle centrée à l'origine.
- La figure 5.8 correspond à un potentiel défini par (5.50f), qui correspond à la superposition des deux écoulements précédents (5.50a) et (5.50b).
- La figure 5.9 correspond à un potentiel défini par (5.50h), sur laquelle on représenté un obstacle.

(1) Écoulement rectiligne uniforme

Si $u = U = \text{constante}$ et $v = 0$, l'équation (5.45) donne

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U, \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

et donc $\phi = \phi(x)$, $\psi = \psi(y)$ et $\phi'(x) = U$ et $\psi'(y) = U$. Ainsi (à une constante près),

$$\phi = Ux, \quad (5.51a)$$

$$\psi = Uy, \quad (5.51b)$$

$$f = \phi + i\psi = U(x + iy) = Uz. \quad (5.51c)$$

Un nouvel écoulement est obtenu en remplaçant f par $e^{-i\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On obtient donc (5.50a). On a alors

$$\begin{aligned}\phi &= \operatorname{Re}(f), \\ &= \operatorname{Re}(e^{-i\alpha}Uz), \\ &= U \operatorname{Re}((\cos \alpha - i \sin \alpha)(x + iy)), \\ &= U(x \cos \alpha + y \sin \alpha),\end{aligned}$$

On fait de même pour ψ et on obtient finalement

$$\begin{aligned}\phi &= U(x \cos \alpha + y \sin \alpha), \\ \psi &= U(y \cos \alpha - x \sin \alpha).\end{aligned}$$

Les lignes de courant sont données par $\psi = U(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = \text{constantes}$, soit $y = x \tan \alpha + \text{constante}$. Ce sont donc des droites faisant un angle α avec l'axe des x .

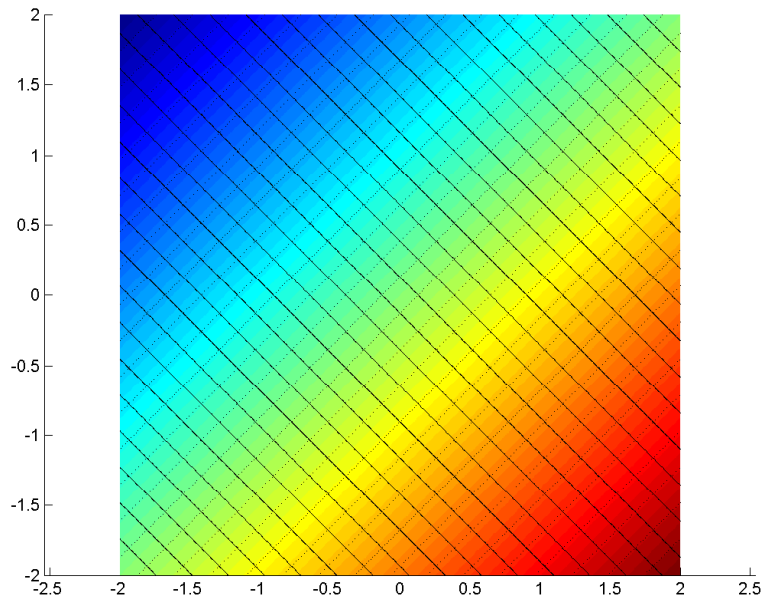


FIGURE 5.5. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.50a).

Voir la figure 5.5.

(2) Écoulement de source

On sait que les lignes de courant sont des droites issues de l'origine et donc données par (u, v) colinéaire à $(\cos \theta, \sin \theta) = (x, y)/r$. On suppose que, par invariance du problème par rotation autour de l'origine, ce champ de vitesse ne dépend pas de θ . Ainsi, il existe une fonction A qui ne dépend que de r et telle que, pour r non nul,

$$\begin{aligned}u(x, y) &= A(r) \frac{x}{r}, \\ v(x, y) &= A(r) \frac{y}{r}.\end{aligned}$$

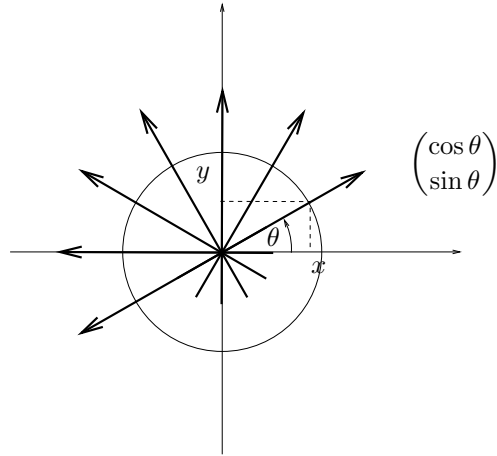


FIGURE 5.6. Écoulement de source.

En notant D le débit constant à travers tout cercle de centre l'origine, on montre que $A(r) = D/(2\pi r)$. On a donc

$$u(x, y) = \frac{Dx}{2\pi r^2}, \quad (5.52a)$$

$$v(x, y) = \frac{Dy}{2\pi r^2}. \quad (5.52b)$$

On cherche alors f donnée par (5.48) ;

$$f'(z) = u - iv = \frac{D}{2\pi r^2}(x - iy).$$

Puisque

$$\frac{x - iy}{r^2} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z},$$

il vient

$$f'(z) = \frac{D}{2\pi z}. \quad (5.53)$$

Si on utilise le point 1 de la proposition 2.35, on en déduit

$$f'(z) = \frac{D}{2\pi} \text{Ln}(z)' \quad (5.54)$$

Grâce à la proposition 1.20, on a alors, à une constante additive près,

$$f(z) = \frac{D}{2\pi} \text{Ln}(z), \quad (5.55)$$

et on retrouve à une constante multiplicative près (5.50b). Puisque $f = \phi + i\psi$ et $\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$, il vient

$$\phi = \frac{D}{2\pi} \ln |z|,$$

$$\psi = \frac{D}{2\pi} \arg(z).$$

On retrouve le fait que les équipotentielles, définies par $\phi = \text{constantes}$, c'est-à-dire ici, $\ln |z| = \ln r = \text{constantes}$, sont des cercles centrés à l'origine. De même, les lignes de courant, définies par $\psi = \text{constantes}$, c'est-à-dire ici, $\arg(z) = \text{constantes}$, sont des demi-droites passant par l'origine.

REMARQUE 5.29. Attention, si on utilise la fonction Ln , définie sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on constate une chose curieuse : l'écoulement source est, *a priori*, défini sur \mathbb{R}^2 et est invariant par rotation autour de l'origine. L'introduction du plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ rompt cette symétrie !

De plus, il sera nécessaire lors de la visualisation de ce potentiel, d'ôter le demi axe \mathbb{R}_- . Numériquement, on enlèvera une « petite bande » autour de \mathbb{R}_- ainsi qu'un « petit cercle » autour de l'origine.

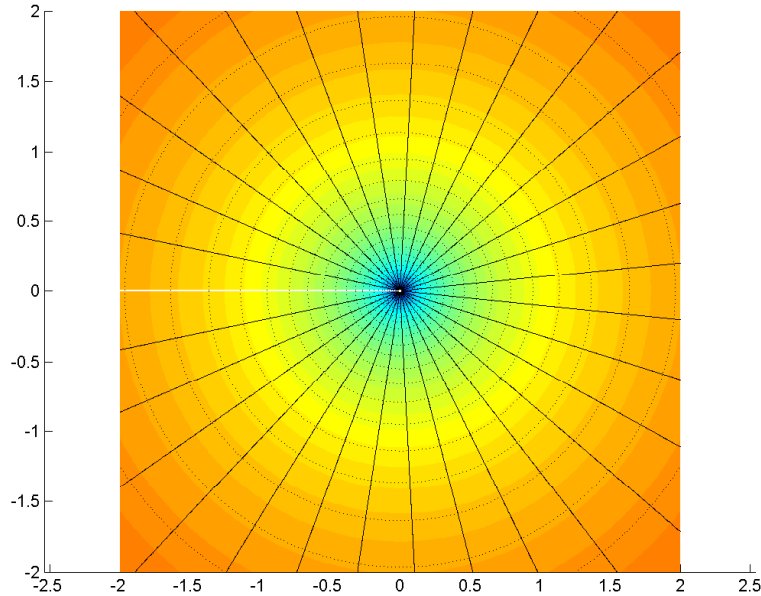


FIGURE 5.7. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.50b).

Voir la figure 5.7.

(3) Tourbillon ponctuel

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.219].

On multiplie le potentiel défini par (5.55) par i : On a alors, à une constante additive près,

$$f(z) = \frac{Di}{2\pi} \text{Ln}(z), \quad (5.56)$$

et on retrouve à une constante multiplicative près (5.50c). Conformément à la remarque 5.27, on obtient un écoulement où les lignes de courant et les équipotentiels sont permutés, c'est-à-dire des équipotentiels qui sont des demi-droites passant par l'origine et des lignes de courant qui sont des cercles centrés à l'origine.

Il faudra aussi prendre la précaution de la remarque 5.29.

(4) Doublet

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.220].

On dérive le potentiel défini par (5.55) :

$$f(z) = \frac{D}{2\pi z}, \quad (5.57)$$

et on retrouve à une constante multiplicative près (5.50d). Conformément à la remarque 5.27, on obtient encore un potentiel complexe.

(5) Superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet : écoulement autour d'un cylindre.

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.220].

On fait une combinaison linéaire de l'écoulement (5.50a) (avec $\alpha = 0$) et de (5.50d). On obtient (5.50e). Conformément à la remarque 5.27, on obtient encore un potentiel complexe.

(6) Autres

Pour plus de détail, lire [Duv90, p.220] et [Gué+04, p. 80 et 89].

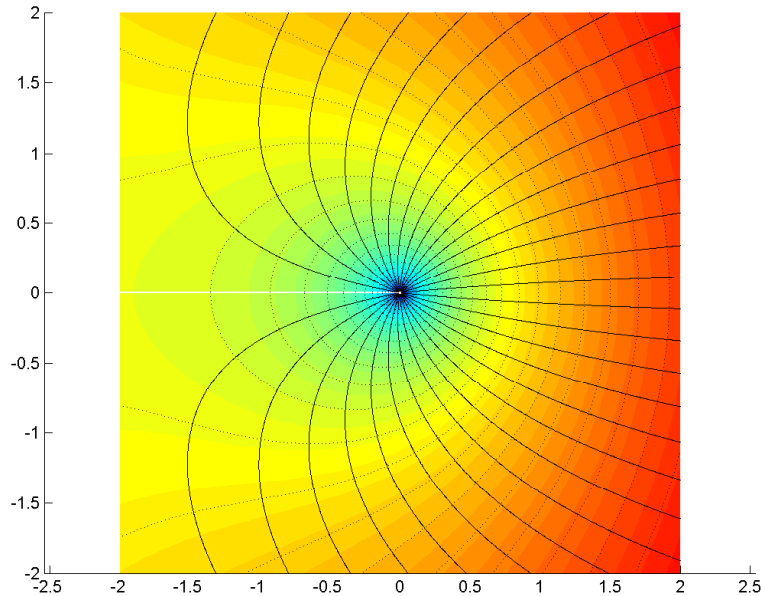


FIGURE 5.8. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.50f).

Voir les potentiels définis par (5.50f) (voir figure 5.8) (5.50g) et (5.50h) (voir figure 5.9 page suivante).

Voir aussi la figure 5.10 qui correspond à l'écoulement où une barrière est présente. Cet écoulement est traité dans l'exercice de TD facultatif 5.16.

5.2.1.3. Changement de domaine.

Les calculs précédents fournissent un certain nombre de potentiels complexes. Il est possible aussi de passer d'un domaine (une partie de \mathbb{C}) où un écoulement est connu (via son potentiel complexe) à une autre domaine de \mathbb{C} , dans la mesure où ces deux domaines correspondent par une transformation conforme.

Plus précisément, soit D une partie de \mathbb{C} et F une application de D dans $\mathcal{D} = F(D)$, supposée injective et holomorphe, dont la dérivée est non nulle. Le théorème K.3 permet alors d'affirmer que F est une transformation conforme de D sur \mathcal{D} . Son inverse est noté F^{-1} , dont on sait qu'elle constitue une transformation conforme de \mathcal{D} sur D (voir proposition 1.8).

Supposons de plus que f soit un potentiel complexe défini sur D , c'est-à-dire, une application holomorphe sur D . On sait définir à partir de f l'écoulement plan irrotationnel incompressible sur D . On définit alors la fonction g sur \mathcal{D} par

$$\forall w \in \mathcal{D}, \quad g(w) = f(F^{-1}(w)). \quad (5.58)$$

Comme composée d'applications holomorphes, g est donc une fonction holomorphe sur \mathcal{D} (voir proposition 1.7) et, à ce titre, elle définit donc un écoulement plan irrotationnel incompressible sur \mathcal{D} . On est donc passé d'un écoulement plan irrotationnel incompressible sur D à un écoulement plan irrotationnel incompressible sur \mathcal{D} , via la transformation conforme F . Cela constitue un moyen de définir des écoulements plans irrotationnels

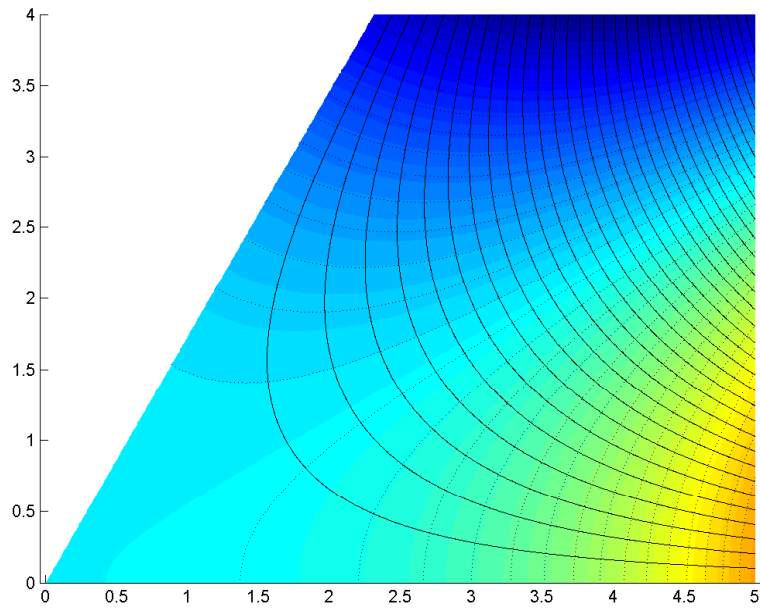


FIGURE 5.9. L'écoulement associé au potentiel défini par (5.50h).

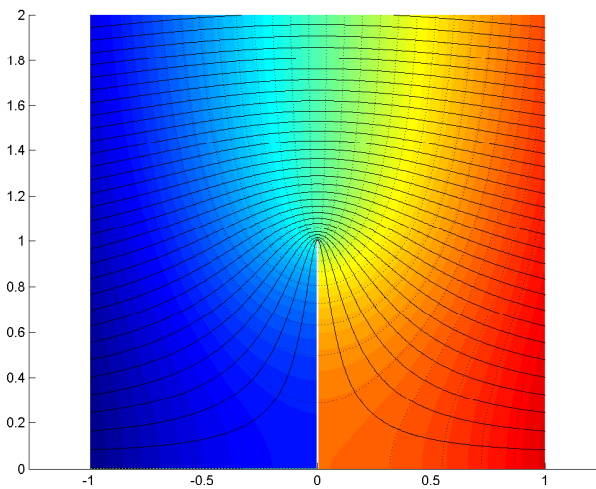


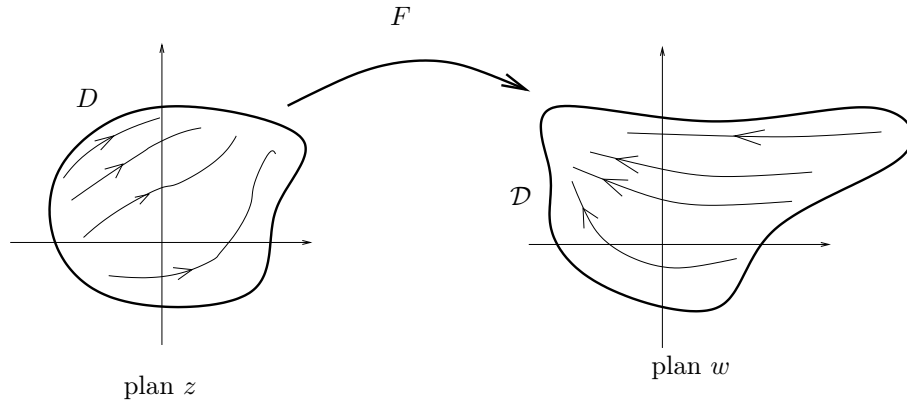
FIGURE 5.10. Un écoulement.

incompressibles. On pourra consulter par exemple [AF03, chap. 5], notamment les exemples 5.6.5 et 5.6.6 de [AF03] ou l'exercice 5.16 des TD qui utilise cette propriété et qui sera à la base d'un des exercices du TP 1.

Les mécaniciens des fluides ont l'habitude (voir [AF03, chap. 5]) de noter que D est dans le plan z et que \mathcal{D} est dans le plan w , où $w = F(z)$. Voir figure 5.11. On notera souvent

$$f = \phi + i\psi, \quad (5.59a)$$

$$g = \Phi + i\Psi, \quad (5.59b)$$

FIGURE 5.11. Le plan z et le plan w et les écoulements associés.

de telle sorte que ϕ et ψ correspondent respectivement au potentiel et à la fonction de courant de l'écoulement défini dans D tandis que Φ et Ψ correspondent respectivement au potentiel et à la fonction de courant de l'écoulement défini dans \mathcal{D} .

Remarquons aussi que les équations (5.59) s'écrivent aussi

$$\begin{aligned}\forall z \in D, \quad f(z) &= \phi(z) + i\psi(z), \\ \forall w \in \mathcal{D}, \quad g(w) &= \Phi(w) + i\Psi(w),\end{aligned}$$

et puisque $g(w) = f(F^{-1}(w)) = f(z)$ où $F^{-1}(w) = z$ et donc $w = F(z)$, on a ainsi

$$\begin{aligned}\forall z \in D, \quad f(z) &= \phi(z) + i\psi(z), \\ g(w) &= f(z) = \Phi(w) + i\Psi(w),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\forall z \in D, \quad \phi(z) &= \Phi(w) = \Phi(F(z)), \\ \psi(z) &= \Psi(w) = \Psi(F(z)).\end{aligned}$$

Ainsi,

Dans le domaine D , l'équipotentielle d'équation $\phi(z) = \text{constante}$ a pour image par F

$$\text{l'équipotentielle d'équation } \Phi(w) = \text{constante} \text{ dans le domaine } \mathcal{D}; \quad (5.60a)$$

et

Dans le domaine D , la ligne de courant d'équation $\psi(z) = \text{constante}$ a pour image par F

$$\text{la ligne de courant d'équation } \Psi(w) = \text{constante} \text{ dans le domaine } \mathcal{D}. \quad (5.60b)$$

Il existe de nombreuses transformations, dont la fameuse transformation de Schwarz-Christoffel, évoquée dans [AF03, théorème 5.6.1]) et qui permet de transformer un domaine à bord polygonaal. Un cas particulier en sera étudié dans l'exercice 5.16 des TD ou l'exemple 5.30.

EXEMPLE 5.30. Reprenons un autre exemple issu de [Bie18].

Soit $h > 0$. On considère la transformation conforme définie par son inverse

$$F^{-1}(z) = e^{\frac{\pi z}{h}}. \quad (5.61)$$

On considère le potentiel complexe f à partir de (5.55) comme étant la superposition de deux sources, l'une étant de débit D placée au point d'affixe 1 et l'autre correspondant à un puit de débit $D/2$ placée à l'affixe 0, de telle sorte que

$$f(z) = \frac{D}{2\pi} \text{Ln}(z-1) - \frac{D}{4\pi} \text{Ln}(z). \quad (5.62)$$

Remarquons que d'après la définition (2.59)

$$\text{Ln}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \text{Ln}\left(e^{\frac{1}{2}\text{Ln}z}\right),$$

et que d'après (2.52), on a donc

$$\text{Ln}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{Ln}z + 2ik\pi,$$

donc on écrira abusivement que

$$\text{Ln}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{Ln}z. \quad (5.63)$$

Ainsi (5.62) devient

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{D}{2\pi} \text{Ln}(z-1) - \frac{D}{4\pi} \text{Ln}(z), \\ &= \frac{D}{2\pi} \left(\text{Ln}(z-1) - \frac{1}{2} \text{Ln}(z) \right), \\ &= \frac{D}{2\pi} \left(\text{Ln}(z-1) - \text{Ln}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) \right), \end{aligned}$$

et d'après (2.53), cela vaut

$$= \frac{D}{2\pi} \left(\text{Ln}\left(\frac{z-1}{z^{\frac{1}{2}}}\right) + 2ik\pi \right),$$

écrit abusivement sous la forme

$$= \frac{D}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{z-1}{z^{\frac{1}{2}}}\right),$$

ce qui vaut, d'après (2.60)

$$= \frac{D}{2\pi} \text{Ln}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et donc

$$f(z) = \frac{D}{2\pi} \text{Ln}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (5.64)$$

D'après (5.58), l'expression du nouveau potentiel complexe défini sur le domaine \mathcal{D} est donné par

$$g(w) = f(F^{-1}(w)).$$

D'après (5.61) et (5.64), on a donc

$$g(w) = \frac{D}{2\pi} \text{Ln}\left(\left(e^{\left(\frac{\pi w}{h}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(e^{\left(\frac{\pi w}{h}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (5.65)$$

On a aussi, en utilisant encore abusivement (2.53) pour β réel :

$$(e^Z)^\beta = e^{\beta \text{Ln}(e^Z)} = e^{(\beta Z)},$$

de sorte que (5.65) devienne

$$g(w) = \frac{D}{2\pi} \text{Ln}\left(e^{\left(\frac{\pi w}{2h}\right)} - e^{\left(\frac{-\pi w}{2h}\right)}\right). \quad (5.66)$$

Cet écoulement correspond à une source placée à l'affixe $z = 0$, deux plans parallèles d'équation $y = 0$ et $z = h$ contenant le fluide.

On peut aussi montrer que les lignes de courant sont donnée, grâce à la proposition 5.25, par

$$\forall x, \quad y(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(C \frac{e^{\pi x/2} - e^{-\pi x/2}}{e^{\pi x/2} + e^{-\pi x/2}} \right), \quad (5.67)$$

où C est une constante. soit encore

$$\forall x, \quad y(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(C \tanh \left(e^{\pi x/2} \right) \right). \quad (5.68)$$

Plus détails sur les figure 5.12 page suivante et 5.13 page 75 (en cours de rédaction!).

Voir aussi le tracé des lignes de courant et des équipotentielles sur les figures 5.14 page 76.

Cet exemple sera repris dans le TP 1.8.

5.2.2. Maillages automatiques

Une application un peu moins classique est la mise en place de maillage (en vue de code éléments finis par exemple) automatique sur des géométries (planes) un peu compliquées.

Il est nécessaire que les domaines à mailler soient simplement connexes pour pouvoir appliquer le théorème K.5.

Cette méthode semble assez ancienne. Elle a été utilisée par Chambon dans sa thèse [Cha75] et reprise par exemple dans [Roy86; DD84]. L'exposé succinct qui est fait ici et les illustrations proviennent de [Roy86], qui a un peu amélioré la méthode [Cha75]

Le principe est donné par la figure 5.15 : il s'agit d'appliquer des transformations conformes successives (qui respectent l'orthogonalité des courbes) pour passer de la figure à mailler à un rectangle que l'on sait mailler régulièrement. Par transformations inverses, les mailles du rectangle sont envoyées sur les mailles de la géométrie initiale à mailler. On se donne un ouvert D_0 , simplement connexe, dont on sait qu'il est en bijection vers le disque unité cercle unité et donc avec un rectangle.

Il faut procéder ainsi :

- Étape 0 : Définir les coordonnées des points P_i , $1 \leq i \leq n$, des contours du domaine D_0 . Quatre de ce points sont choisis comme « coins » (ils seront envoyés par transformation conforme sur les coins du maillage final).
- Étape 1 : Transformation de la frontière de D_0 unité sur le cercle unité. Cette étape n'est pas explicite et pour trouver la transformation, il faut résoudre un système linéaire (de Fredholm);
- Étape 2 : Transformation du cercle unité sur l'axe des réels (voir exercice 4.1 des TD). Pas de problème pour cette étape;
- Étape 3 : Transformation de l'axe des réels sur le contour du rectangle. Pour cette étape, on utilise la transformation de Schwartz-Christoffel (voir par exemple la section 9.4 de [Kar13]), pour laquelle des intégrations numériques doivent être faites;
- Étape 4 : Maillage du rectangle : le rectangle est maillé avec des mailles les plus carrées possible.
- Étape 5 : Recherche des points du maillage de D_0 : Il faut tout reprendre à l'envers et inverser les différentes étapes faites (ce qui se fait très facilement pour l'étape 2), ce qui nécessite (sauf pour l'étape l'étape 2), des nouveaux systèmes à résoudre.

Voir par exemple la figure 5.16 où deux maillages calculés ainsi sont représentés. On peut constater le défaut majeur de cette méthode : dans les coins, les mailles sont plus larges que dans la partie centrale, alors que c'est là (par exemple, les contraintes dans un solide, y sont les plus importantes) qu'il faudrait mailler plus finement. En fait, cette méthode est tombée un peu en désuétude et est remplacée avantageusement par des méthodes de maillages adaptatifs qui prennent en compte, *a posteriori* parfois, la solution numérique calculée pour diminuer la taille des mailles là où il le faut.

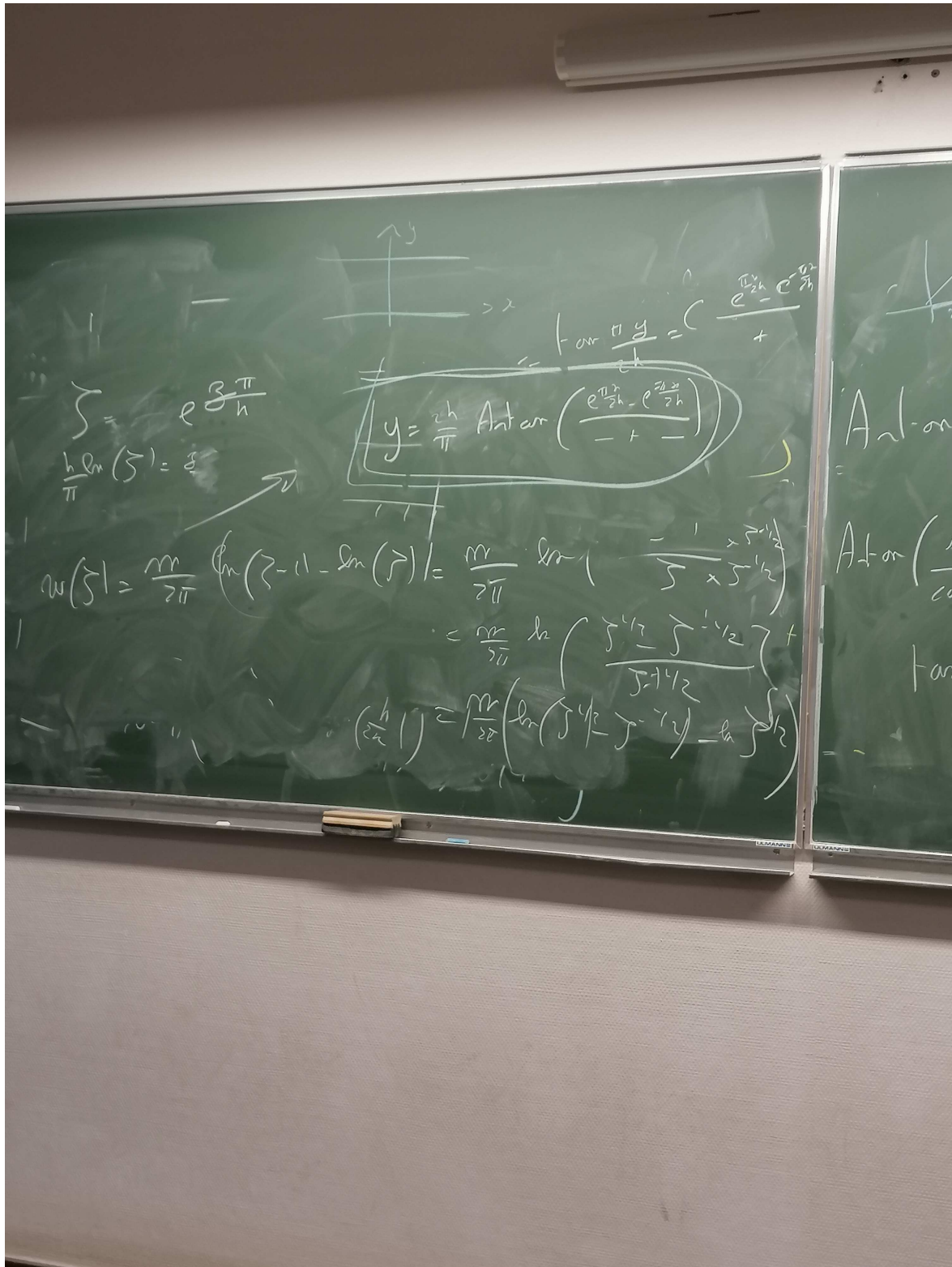


FIGURE 5.12. Les calculs (1/2).

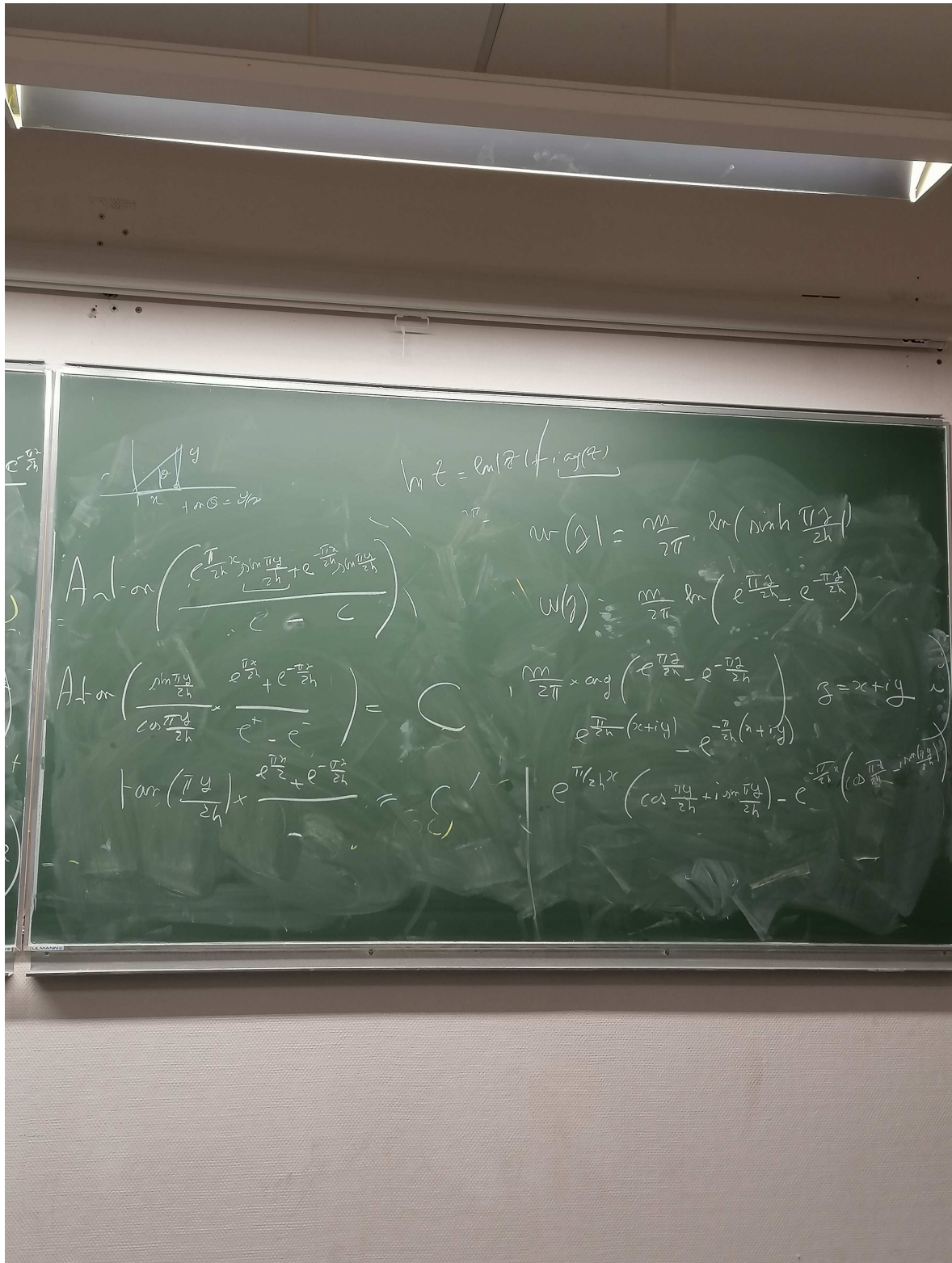
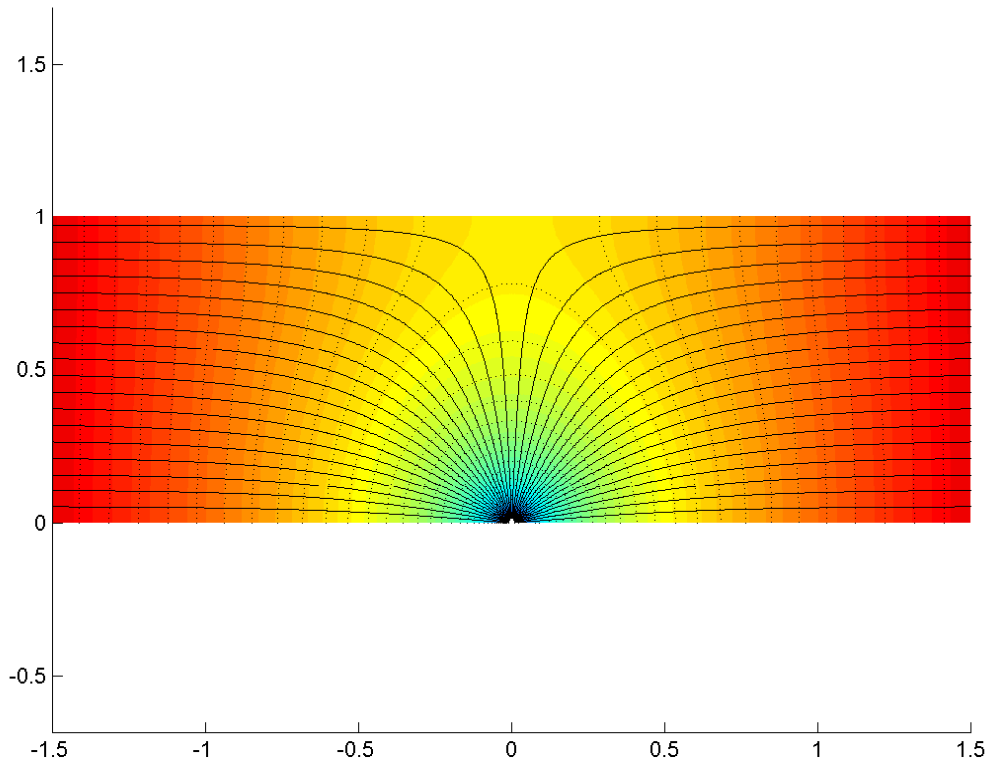
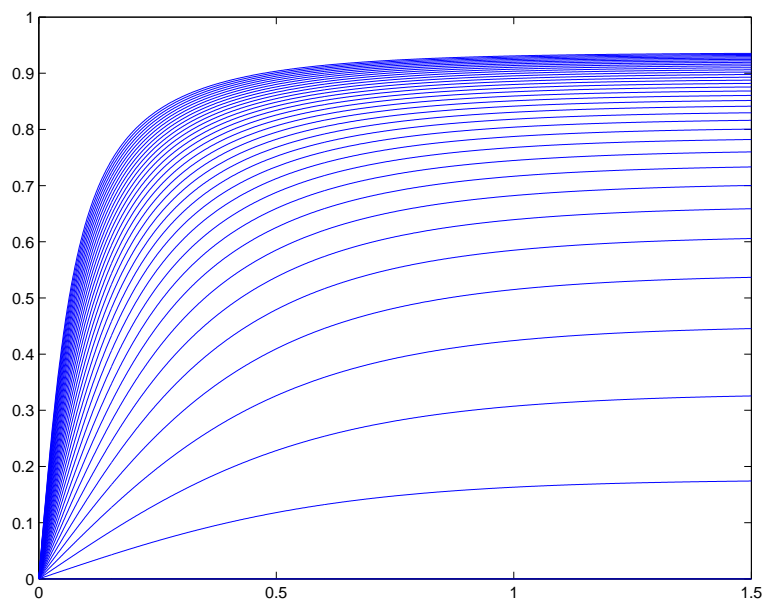


FIGURE 5.13. Les calculs (2/2).



(a) Le tracé des lignes de courant et des équipotentiels à partir du potentiel défini par (5.65).



(b) Le tracé des lignes de courant définies par (5.68).

FIGURE 5.14. tracés.

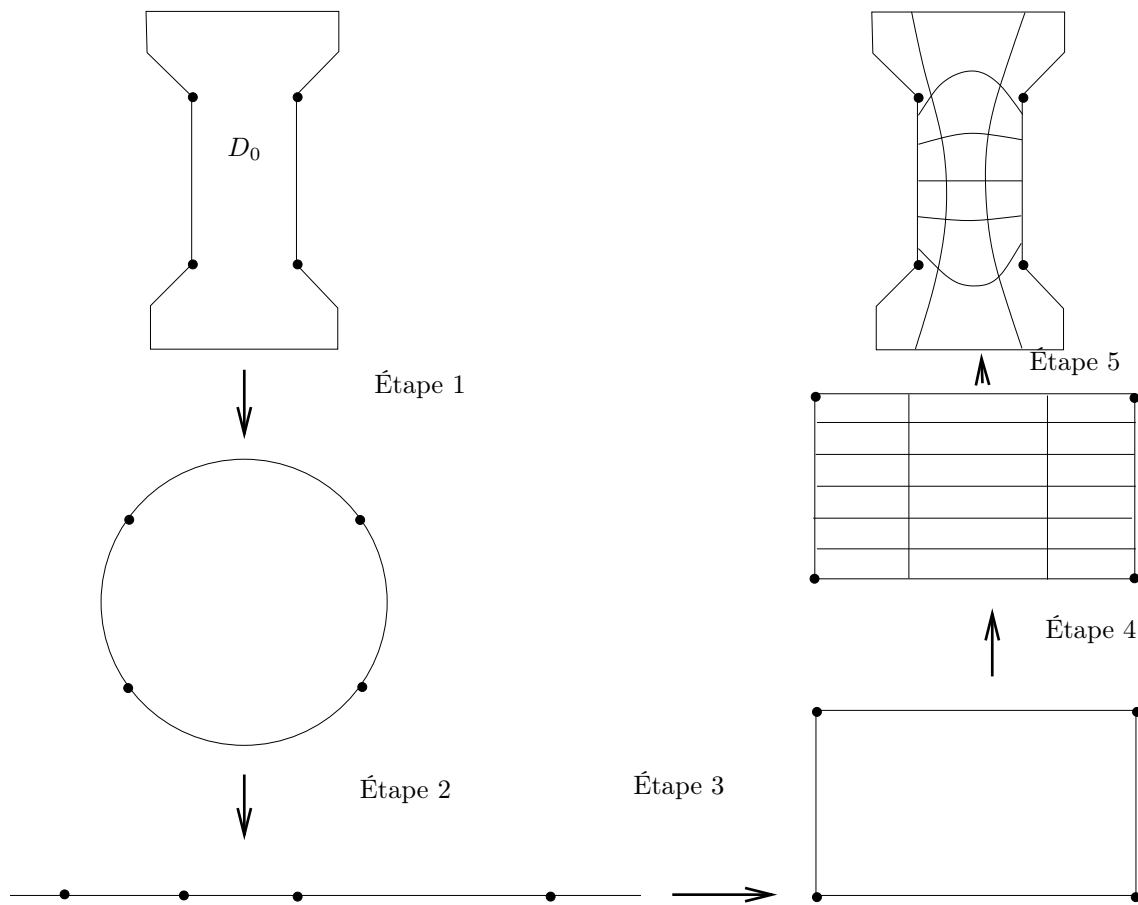


FIGURE 5.15. Le principe (figure extraite de [Roy86]).

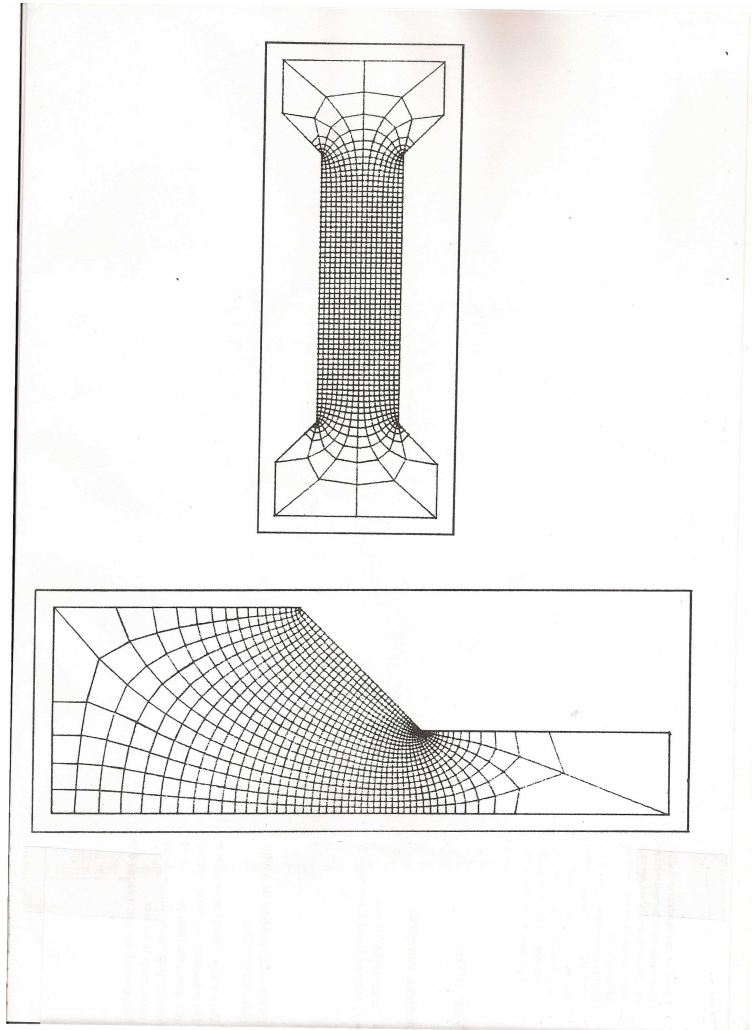


FIGURE 5.16. Deux exemples de maillages réalisés (figure extraite de [Roy86]).

Deuxième partie

Distributions

Introduction aux distributions

On pourra consulter [Kib01, chap. 5] (à l'usage des physiciens, il montre la façon dont les physiciens et les mathématiciens considèrent avec deux regards différents, mais complémentaires, la même notion), une bonne introduction aux distributions [LT09, chap. 4 et 5], [GW03, chap.VIII] ou [Pet98, chap. I et II] ou enfin [http://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathématiques\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathématiques))

On pourra aussi consulter les rappels donnés dans les annexes N, O et P.

6.1. Introduction

Les références précédemment citées ne montrent peut-être pas assez l'histoire de la théorie des distributions, qui demeure une très belle illustration de l'interaction constructive entre mécaniciens (ou physiciens de façon plus générale), mathématiciens et informaticiens, notamment lors de la seconde moitié du siècle dernier.

Sur <http://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-des-distributions/>, on peut lire le texte suivant :

“Professeur à l'université de Nancy, Laurent Schwartz (1915-2002) fonde la théorie mathématique des distributions dans un article intitulé “Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques” [Sch45]. Il donne une interprétation unifiée des nombreuses fonctions généralisées introduites auparavant par des mathématiciens ou des physiciens, comme le pic de Dirac ou la « marche d'escalier » de Heaviside. L'idée fondamentale est de considérer les fonctionnelles linéaires définies sur l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact. L'analyse fonctionnelle et la notion de dualité permettent alors de décrire ces objets de façon rigoureuse et systématique.[...] Schwartz reçut la médaille Fields en 1950 pour ce travail.”

Selon la légende, l'idée de ce papier aurait été écrite en une nuit, ce qui n'empêche probablement pas les longues heures de gestation intellectuelle! Cet article a été à l'origine de cette théorie des distributions, qui a été une très importante innovation! Sur le plan théorique d'une part, mais aussi sur les nombreux domaines de la physique dont les équations sont écrites « au sens des distributions », mais aussi sur la plan informatique, puisque que de très nombreux codes ont besoin du cadre mathématiques rigoureux qui garantit la bonne écriture des algorithmes utilisés et la convergence des schémas numériques associés.

6.2. Pourquoi les distributions ?

On pourra consulter les introductions [BC93, p. 133 à 135], [Bal91, chap. 0] ou la très bonne introduction [GW03, leçon 26] qui donnent une justification de l'aspect lacunaire des fonctions en mécanique et qui explique pourquoi il a fallu introduire ce concept de distributions (certains parlent de fonctions généralisées) qui généralisent les fonctions, en donnant un sens mathématique rigoureux de certaines notions appréhendées par des physiciens comme Heaviside, mais qui n'avaient pas été formalisées.

EXEMPLE 6.1. Dans cet exemple, qui ne sera pas nécessairement à lire en première lecture, nous allons plutôt partir d'une situation concrète en RDM : l'étude d'une poutre fléchie, soumise à une force ponctuelle et tenter d'introduire sur cet exemple, le pourquoi des distributions. On se reporte à l'annexe M où tous les rappels sont présentés.

On s'est inspiré de

[Bas11c, Annexe F] disponible sur http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/15/PDF/coursMQ41_A04.pdf, valable sur une situation physique un peu différente, mais où l'esprit est le même.

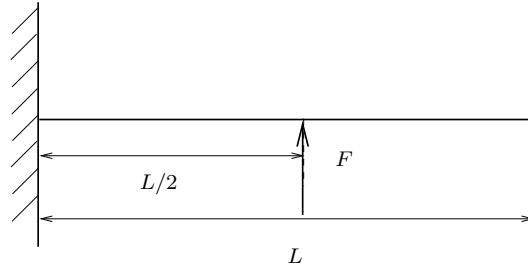


FIGURE 6.1. La poutre étudiée.

On étudie donc une poutre encastree à gauche, soumise en son milieu (à l'abscisse $L/2$) à une force ponctuelle de norme F et tournée vers le haut (voir la figure 6.1).

Toutes les équations de l'annexe M sont donc valables avec $p = 0$. Rappelons (M.5a)

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad \forall x \neq L/2, \quad (6.1)$$

soit donc avec $p = 0$

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0, \quad \forall x \neq L/2. \quad (6.2a)$$

De plus, on rappelle (M.5b) :

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0, \quad \forall x. \quad (6.2b)$$

Enfin, (M.5c) donne ici

$$T(L/2 + 0) - T(L/2 - 0) = -F. \quad (6.2c)$$

Ici, on peut calculer le moment fléchissant M , à la main ou en procédant comme suit. D'après (6.2a) et (6.2c), T est constant sur $[0, L/2[$ et sur $]L/2, L]$ et discontinu en $L/2$. Puisqu'aucune force verticale n'est appliquée à droite, on a $T(L) = 0$ et donc T est nul sur $]L/2, L[$. D'après (6.2c), on a

$$\forall x \in [0, L], \quad T(x) = \begin{cases} F, & \text{si } x < L/2, \\ 0, & \text{si } x > L/2. \end{cases} \quad (6.3)$$

La valeur en $x = L/2$ n'est pas définie en toute rigueur (voir la remarque M.2 page 259). Si on utilise maintenant (6.2b) que l'on intègre sur $[0, L]$ (ce qui revient à étudier le moment global appliqué à la structure), on a donc

$$M(L) - M(0) = \int_0^L \frac{dM}{dx} dx = - \int_0^L T dx = -FL/2,$$

et donc

$$M(0) = FL/2.$$

Si on intègre de nouveau (M.5b) sur $[0, x]$, on a donc

$$\forall x \in [0, L], \quad M(x) = \begin{cases} F(L/2 - x), & \text{si } x \leq L/2, \\ 0, & \text{si } x \geq L/2. \end{cases} \quad (6.4)$$

On peut supposer sans perte de généralité (par adimensionnement par exemple) que

$$F = E = I = 1. \quad (6.5)$$

Pour trouver la déformée v de la poutre, on utilise ensuite (M.7a) page 260 ainsi que les conditions aux limites (M.9a) et (M.9b).

Sous matlab formel (par exemple, ou à la main!), on peut résoudre l'équation différentielle (M.7a) sur $[0, 1/2]$ en tapant

```
S=dsolve('D2v=(1/2-x)', 'v(0)=0', 'Dv(0)=0', 'x');
pretty(S);
```

et on obtient les valeurs de v en $1/2$ en tapant

```
syms x;
disp(subs(S, x, sym(1/2)));
disp(subs(diff(S), x, sym(1/2)));
```

Sur $[1/2, 1]$, on obtient alors la solution en utilisant le fait que (voir (M.7a)), v et v' sont continues en $1/2$, en tapant

`S=dsolve('D2v=0', 'v(1/2)=1/24', 'Dv(1/2)=1/8', 'x');`
`pretty(S);`

On obtient donc

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1/2], \quad v(x) &= -1/6 x^3 + 1/4 x^2, \\ \forall x \in]1/2, 1], \quad v(x) &= 1/8 x - 1/48,\end{aligned}$$

que l'on peut remplacer par (voir (M.7a)) par

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad v(x) = -1/6 x^3 + 1/4 x^2, \quad (6.6a)$$

$$\forall x \in [1/2, 1], \quad v(x) = 1/8 x - 1/48, \quad (6.6b)$$

On en déduit alors les différentes quantités v , v' , v'' , $v^{(3)}$ et $v^{(4)}$, grâce à (M.12a) et (6.6) et (attention aux bornes des intervalles!)

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad v'(x) = -1/2 x^2 + 1/2 x, \quad (6.7a)$$

$$\forall x \in [1/2, 1], \quad v'(x) = 1/8, \quad (6.7b)$$

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad v''(x) = 1/2 - x, \quad (6.8a)$$

$$\forall x \in [1/2, 1], \quad v''(x) = 0, \quad (6.8b)$$

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad v^{(3)}(x) = -1, \quad (6.9a)$$

$$\forall x \in]1/2, 1], \quad v^{(3)}(x) = 0, \quad (6.9b)$$

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad v^{(4)}(x) = 0, \quad (6.10a)$$

$$\forall x \in]1/2, 1], \quad v^{(4)}(x) = 0. \quad (6.10b)$$

On a représenté ces différentes fonctions sur la figure 6.2 page suivante. On peut y vérifier que sont vraies les assertions (M.11a) et (M.12a). On constate aussi que $v^{(3)}$ est discontinues, et que sa dérivée $v^{(4)}$ est nulle partout (sauf en $1/2$ où elle n'est pas définie). D'après (6.2a), p n'est pas définie en $1/2$.

Nous aimerions maintenant donner un sens aux équations (6.2) à tous les points x de $[0, 1]$ ainsi qu'à la valeur de p en toute point de $[0, 1]$. Les fonctions sont-elles toutes dérivables partout sur $[0, 1]$? Peut-on retrouver les discontinuités introduites par (M.5c)? Voilà l'enjeu du mathématicien qui veut donner un sens à toutes ces questions et de définir les objets (v , p , ...) partout sur $[0, 1]$.

Si l'on veut définir T sur tout $[0, 1]$ et si l'on regarde (6.2a) et (6.3), il faut pouvoir dériver la fonction T , mais pas au sens usuel des fonctions sur tout $[0, 1]$: d'après (6.3), T est discontinue en $T = 1/2$ et *a fortiori* non dérivable sur $[0, 1]$. On introduit la fonction en escalier, non dérivable en 0, notée H et appelée fonction de Heaviside et définie par

$$\forall x < 0, \quad H(x) = 0, \quad (6.11a)$$

$$\forall x > 0, \quad H(x) = 1. \quad (6.11b)$$

On a donc, selon (6.3) (avec $F = 1$)

$$\forall x \in [0, 1], \quad T(x) = -H(x - 1/2) + 1. \quad (6.12)$$

Pour lever toute ces contradictions, Heaviside et Dirac qui faisaient le même type d'opérations, ont donc écrit que la dérivée de la fonction H , non dérivable en zéro, puisque discontinue, était une fonction généralisée, notée δ . On pose donc formellement ¹

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{dH}{dx}(x) = \delta(x), \quad (6.13)$$

et ainsi

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{dH}{dx}(x - 1/2) = -\delta(x - 1/2), \quad (6.14)$$

de sorte que (6.1) s'écrive

$$\forall x \in [0, 1], \quad p(x) = \delta(x - 1/2). \quad (6.15)$$

1. c'est-à-dire comme si la dérivée existe alors que cette fonction n'est pas dérivable!

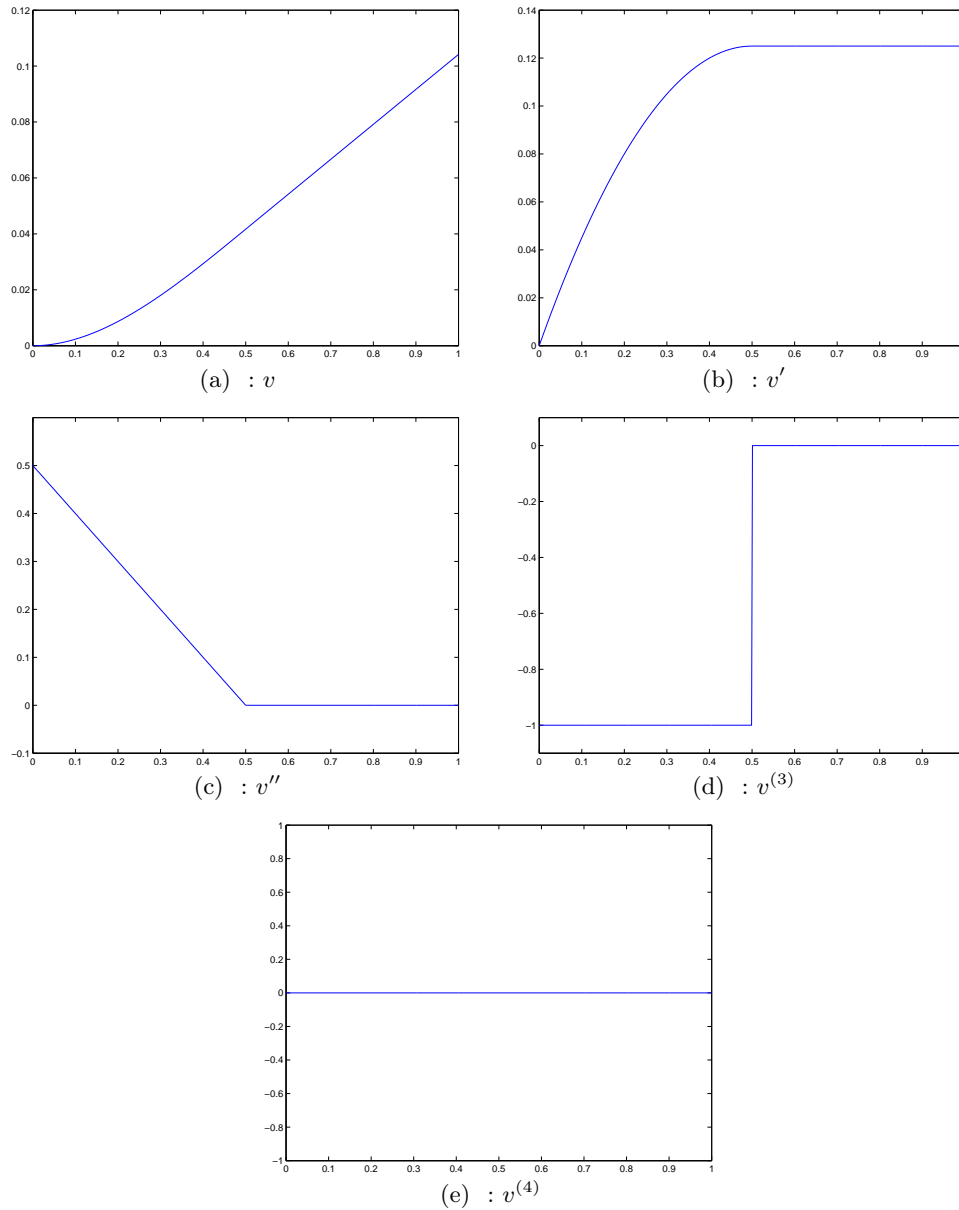


FIGURE 6.2. le tracé des fonctions v , v' , v'' , $v^{(3)}$ et $v^{(4)}$ sur $[0, 1] \setminus \{1/2\}$.

Il est important de comprendre que toutes ces équations sont vraies partout sur $[0, 1]$, de façon formelle. On a, si les règles de dérivation usuelles sont valables,

$$\int_0^1 \delta(x - 1/2) dx = \int_0^1 \frac{dH}{dx}(x - 1/2) dx = H(1/2) - H(-1/2) = 1. \quad (6.16)$$

Bref, δ est une fonction généralisée vérifiant

$$\int_0^1 \delta(x - 1/2) dx = 1. \quad (6.17)$$

On peut donc réécrire (6.17) sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (6.18)$$

Notons aussi que si δ était une vraie fonction, elle ne peut être définie en 0. En effet, d'après (6.1), si $\delta(0)$ avait une valeur, on aurait selon (6.14), $\delta(0) = -\frac{dT(1/2)}{dx}$, quantité non définie (puisqu'en ce point, T est discontinue donc non dérivable). En 0, on peut écrire formellement, grâce à (6.13),

$$\delta(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{H(h) - H(-h)}{2h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{2h} = +\infty,$$

Compte tenu de tout cela, on écrit parfois que

$$\forall x < 0, \quad \delta(x) = 0, \quad (6.19a)$$

$$\forall x > 0, \quad \delta(x) = 1, \quad (6.19b)$$

$$\delta(0) = +\infty. \quad (6.19c)$$

Notons aussi que, si u est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$ (donc nulle en $\pm A$) alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = u(0). \quad (6.20)$$

En effet, on peut écrire successivement selon (6.13) et par intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx &= \int_{-A}^A \delta(x)u(x)dx, \\ &= \int_{-A}^A \frac{dH}{dx}(x)u(x)dx, \end{aligned}$$

et puisque u est nulle en $\pm A$

$$= - \int_{-A}^A H(x) \frac{du}{dx}(x),$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = - \int_{-A}^A H(x) \frac{du}{dx}(x). \quad (6.21)$$

On peut aussi écrire cela sous la forme, en utilisant (6.11)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx &= - \int_{-A}^0 H(x) \frac{du}{dx}(x) - \int_0^A H(x) \frac{du}{dx}(x), \\ &= - \int_0^A \frac{du}{dx}(x)dx, \\ &= -u(A) + u(0), \\ &= u(0). \end{aligned}$$

Remarquons que cette égalité (6.20) est paradoxale et ne peut avoir lieu si δ est une « vraie » fonction. Dans ce cas, pour tout fonction u dérivable sur \mathbb{R} , nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$, on aurait

$$u(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = \int_{-\infty}^0 \delta(x)u(x)dx + \int_0^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = 0, \quad (6.22)$$

selon (6.19) (puisque la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur éventuellement infinie sur des points isolés) ce qui est absurde.

On a donc exhibé une « drôle de fonction » qui n'est plus une fonction mais une fonction généralisée, vérifiant (6.13), (6.18) et (6.20).

Si on récapitule tous les calculs faits, on a donc, pour notre poutre,

$$p(x) = \delta(x - 1/2), \quad \forall x \in [0, 1] \quad (6.23a)$$

$$T(x) = -H(x - 1/2) + 1, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (6.23b)$$

$$M = \begin{cases} 1/2 - x, & \text{si } x \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases} \quad (6.23c)$$

et les équations de l'équilibre local (M.3) deviennent donc vraies partout tout en respectant la discontinuité imposée par (M.4)!

Enfin, remarquons que sur les différents graphiques 6.2, v , v' , v'' sont des « vraies » fonctions dont les expressions sont fournies par (6.6), (6.7) et (6.8).

Par ailleurs, en utilisant les équations précédentes de l'équilibre, on a

$$v^{(3)} = \frac{dM}{dx} = -T(x) = H(x - 1/2) - 1, \quad (6.24)$$

ce qui est bien identique aux expressions données par (6.9), et bref, d'une façon ou d'une autre, il vient

$$\forall x \in [0, 1], \quad v^{(3)} = H(x - 1/2) - 1. \quad (6.25)$$

Enfin, grâce à (6.13), on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad v^{(4)} = \delta(x - 1/2). \quad (6.26)$$

Si on utilise les équations précédentes de l'équilibre, il vient

$$v^{(4)} = p, \quad (6.27)$$

ce qui revient donc au même, d'après (6.23a).

Nous verrons aussi plus tard qu'en fait la relation (6.27) n'est pas vraie pour tout x , mais seulement « presque partout » ou « au sens des distributions » ce qui évite de se demander si elles doivent être vraies au point délicat $1/2$! Nous reviendrons au cours de la section 8.5.2 sur le problème de cette poutre.

Au cours de cette introduction, nous avons généralisé les équations de l'équilibre local (M.3) tout en respectant la discontinuité imposée par (M.4) à condition de considérer la densité linéaire de charge p non pas nulle mais définie par (6.23a) et qui n'est donc plus une fonction.

Remarquons aussi que, si v, v', v'' sont des « vraies » fonctions, la fonction $v^{(3)}$ est encore une fonction (voir graphique 2(d)) mais que $v^{(4)}$ est une fonction généralisée, qui n'est pas une fonction. Sinon, selon le graphique 2(e), elle serait nulle. Bref, H est une « vraie » fonction, contrairement à δ . Enfin, remarquons aussi que d'après (6.26), la fonction $v^{(5)}$ n'est plus une fonction mais la dérivée de δ , notée δ' et qui doit avoir encore un sens!

◇

Laurent Schwarz a donné un sens rigoureux à toutes ces opérations, déjà menées par les mécaniciens, dans [Sch45] disponible sur http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AUG/AUG_1945__21_/AUG_1945__21__57_0/AUG_1945__21__57_0.pdf. Rappelons pour conclure, les quelques lignes initiales de ce papier historique :

“Depuis l'introduction du calcul symbolique², les physiciens se sont fréquemment servis de certaines notions ou de certaines formules dont le succès était incontestable, alors qu'elles n'étaient pas justifiées mathématiquement. C'est ainsi que la fonction $y(x)$ de la variable réelle, égale à 0, pour $x < 0$ à 1 pour $x > 0$ ³ est couramment considérée comme ayant pour dérivée « la fonction de Dirac » $y'(x) = \delta(x)$, nulle pour $x \neq 0$, égale à $+\infty$ pour $x = 0$, et telle que, de plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$. Un tel « abus de langage » est malgré tout incompatible avec la notion habituelle de fonction et de dérivation! Et que penser alors de la dérivation successive de la fonction de Dirac! Et pourtant de telles expressions rendent de constants services en électricité en sont très adaptées à l'étude de la transformation de Laplace ou de Fourier et de la mécanique ondulatoire. Le but de cet article est de faire un très bref résumé (sans démonstrations) d'un travail [...] qui apporte une justification complète au langage précédent. Il se trouve que ce langage, ainsi réhabilité dans le domaine de l'analyse, est fécond dans beaucoup de questions diverses : électricité et physique mathématique ...”

Depuis, il a réécrit tout cela dans [Sch66] par exemple, mais la littérature fourmille de références sur les distributions (voir par exemple [LT09; Har10; Ciu; Kib01]).

6.3. Définition des distributions

Quittons maintenant le domaine de la RDM pour entrer dans celui de la définition mathématique, plus abstraite. Il faut bien garder l'idée que ces deux domaines, loin de s'opposer, se complètent harmonieusement!

Nous allons donc introduire le concept de distributions, qui généralise la notions de fonctions usuelles, qui englobe la « fonction » de Dirac δ et qui soit la dérivée de la fonction de Heaviside, définie par (6.11) et qui vérifie formellement (6.13), (6.18) et (6.20). Bien entendu, cette fonction doit être elle-même dérivable autant de fois que l'on veut, en un sens à préciser. C'est la grande force des distributions que de rendre la dérivation comme une opération algébrique et l'on peut appliquer autant de fois que l'on veut sur des fonctions dérivables (auquel cas, cette opération s'identifie à la dérivation usuelle) mais aussi sur des fonctions généralisées et qui ne sont plus nécessairement dérivables au sens usuel!

2. c'est-à-dire les règles de dérivation non fondées, comme ici pour la poutre.
3. C'est la fonction H .

Nous allons donner maintenant les définitions habituelles des définitions en retrouvant les équations établies précédemment dans le cadre de la RDM (6.13), (6.18) et (6.20). Notons aussi que l'on a montré que l'égalité (6.20) est paradoxale et ne peut avoir lieu si δ est une « vraie » fonction.

« à la physicienne »	« à la mathématicienne »
notation : $\delta_a(x)$ ou $\delta(x - a)$	notation : δ_a ou δ
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = u(0)$ pour u arbitraire	$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$	
δ n'est pas continue comme fonction	δ_a est linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{si } x = 0, \end{cases}$	
$H'(x) = \delta(x), \forall x \in \mathbb{R}$	$H' = \delta$, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

TABLE 6.1. Visions du δ « à la physicienne » et « à la mathématicienne ».

Concluons par la donnée du tableau 6.1 qui récapitule les choses vues « à la physicienne » (ce n'est pas péjoratif!) sur la fonction de Dirac δ . Ce tableau reprend en partie [Kib01, tableau p. 196]. Il a été aussi complété pour donner en parallèle les choses vues « à la mathématicienne » (ce n'est pas péjoratif!)

Il nous faut changer de paradigme : voir les fonctions autrement, de façon radicalement différente, même au prix d'un coûteux effort, tellement rentable finalement. Cette nouvelle façon de voir doit d'une part, englober les fonctions au sens usuel que vous connaissez mais aussi prendre en compte les nouveaux objets introduits et leur donner un sens mathématique. Cette démarche est identique à celles de l'émergence de nouveaux modèles en mécanique⁴ qui doit à la fois prendre en compte les anciennes lois qui fonctionnent et décrivent correctement le réel⁵ mais naturellement, qui doit aussi envisager les nouvelles expériences observées, non prises en compte par l'ancien modèle⁶.

Dans toute la suite de ce chapitre, on étudie des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Dans le cas de fonction de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R} , voire de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^p , les distributions se définissent aussi. On renvoie par exemple à [RT92, chap. 1] ou [Bal91]. \diamond

La suite de ce chapitre est inspirée de [Pet98, chap. I], [Bal91, chap. 0 à 4], [Kib01, chap. 5] et [GW03, leçon 27].

6.3.1. Définition des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$

6.3.1.1. Définition informelle.

Dans tout ce chapitre, pour alléger les notations et s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera toutes les intégrales sur \mathbb{R} sous la forme $\int f$.

Comme définition informelle des distributions, on fait parfois⁷ la considération suivante : une grandeur f en physique (un déplacement, une pression,...) n'est connue que par une mesure physique, ce qui revient donc

4. par exemple apparition de la mécanique relativiste par rapport à la mécanique newtonienne.

5. La mécanique relativiste est identique à la mécanique newtonienne aux faibles vitesses.

6. La mécanique relativiste explique le décalage du périhélie de Mercure, inexpliqué par la mécanique newtonienne.

7. Voir par exemple [BC18, pp. 90 et 91] disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/Questions_Cles_Sciences_100_theories_distributions.pdf.

à prendre la quantité suivante (qui est une moyenne).

$$\int f(x)\phi(x)dx, \quad (6.28)$$

où la fonction ϕ dépend de l'appareil de mesure. Dire que la moyenne réalisée par l'appareil de mesure ne prend en compte que les valeurs de f au voisinage de x_0 où l'on désire connaître f idéalement se traduit que ϕ est nulle en dehors d'un voisinage de x_0 . Si le réel n'est qu'expérimental⁸, on accède aux grandeurs réelles uniquement par la mesure de f via (6.28). Autrement dit, connaître f revient à connaître *tous* les nombres définis par (6.28) pour *tous* les appareils de mesure ! Tout phénomène est donc décrit par une distribution, c'est-à-dire, une application qui à tout appareil de mesure associe le nombre défini par (6.28). Cela est valable dans le cas où cette grandeur est représentable par une fonction. Mais il peut exister des cas où le résultat de toute mesure ϕ est $\phi(x_0)$. Par exemple, on a rencontré cette situation, en remarquant précédemment (voir équation (6.20)) que si la fonction généralisée δ était intégrable, on aurait si u est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)u(x)dx = u(0). \quad (6.29)$$

Il n'existe aucune fonction f que, pour tout fonction ϕ ,

$$\int f(x)\phi(x)dx = \phi(x_0). \quad (6.30)$$

Voir par exemple la preuve informelle dans le cas de l'exemple du Dirac (6.20). Dans ce cas, on a donc une distribution qui associe à ϕ un nombre ($\phi(0)$) mais qui ne s'écrit pas sous la forme (6.28), donc réservée aux distributions associées à une fonction. Bref, la notion de distribution généralise la notion de fonction. C'est une application T qui à ϕ , toute fonction nulle en dehors d'un intervalle, associe un nombre noté $T(\phi)$. Dans le cas où T est associé à une fonction f , on la note T_f et on aura donc

$$T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx. \quad (6.31)$$

Ainsi, formellement, d'après (6.29), δ est une distribution définie par

$$\forall \phi, \quad \delta(\phi) = \phi(0). \quad (6.32)$$

Remarquons aussi que si f est une fonction dérivable et que ϕ est nulle en dehors de $]-A, A[$, on a, d'après la formule d'intégration par partie,

$$\int f'(x)\phi(x)dx = \int_{-A}^A f'(x)\phi(x)dx = - \int_{-A}^A f(x)\phi'(x)dx + f(A)\phi(A) - f(-A)\phi(-A) = - \int f(x)\phi'(x)dx. \quad (6.33)$$

et donc selon (6.31), puisque f est une fonction,

$$\int f'(x)\phi(x)dx = -T_f(\phi'). \quad (6.34)$$

De façon plus générale, la dérivée d'une distribution T est donc la distribution T' telle que

$$\forall \phi, \quad T'(\phi) = -T(\phi'). \quad (6.35)$$

Remarquons que si l'on reprend le calcul (6.21), on a, formellement,

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = - \int_{-A}^A H(x)\frac{d\phi}{dx}(x)dx = -T_H(\phi')$$

et donc par définition (6.35),

$$\delta(\phi) = T'_H(\phi)$$

8. Hypothèse bien souvent fautive en mathématique !

puisque cela est vrai pour toute fonction ϕ , les deux applications $\phi \mapsto \langle \delta, \phi \rangle$ et $\phi \mapsto T'_H(\phi)$ sont égales et donc les deux distributions associées δ et T'_H sont égales, autrement dit

$$T'_H = \delta, \quad (6.36)$$

ce qui montre que la dérivée de la distribution T_H , associée à la fonction H est le Dirac, ce qu'on a observé formellement dans (6.13). Mais il faut bien comprendre que cette dérivée a lieu au sens de la dérivée de distributions, mais pas des fonctions ! La distribution T_H , associée à H est dérivable et sa dérivée vaut δ , qui n'est pas une fonction !

6.3.1.2. Définition rigoureuse (et mathématicienne !)

On peut dériver une fois une distribution si les fonctions tests ϕ sont dérivables. Si les fonctions test sont C^∞ , on pourra donc dériver toute distribution autant de fois que l'on désire ! D'après ce que l'on vient de voir, les fonctions ϕ doivent être nulles au dehors d'un intervalle et de classe C^∞ , ce qui fournit la première définition de l'ensemble des fonctions ϕ appelées « fonctions test » :

DÉFINITION 6.2. Pour tout ouvert⁹ Ω de \mathbb{R} . On appelle l'ensemble des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω , nulles en dehors de tout intervalle de type $[A, B]$ inclus dans Ω .

REMARQUE 6.3. On donne parfois les définitions suivantes :

DÉFINITION 6.4. Soit ϕ une fonction continue définie sur l'ouvert Ω de \mathbb{R} . On appelle support de ϕ la fermeture (ou l'adhérence) dans Ω de l'ensemble des points où ϕ est non nulle. C'est aussi le complémentaire dans Ω de la réunion des ouverts de Ω sur lesquels ϕ est nulle.

Si, par exemple, ϕ est non nulle sur $]A, B[$ et nulle sur $] - \infty, A] \cup [B, +\infty[$, son support est $[A, B]$.
On a alors

DÉFINITION 6.5. Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R} . On appelle l'ensemble des fonctions test l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact¹⁰ dans Ω .

◇

Au bord de Ω , ϕ a une limite nulle.

EXEMPLE 6.6. Voir sur la figure¹¹ 6.3 page suivante, un exemple de fonction indéfiniment dérivable à support compact.

EXEMPLE 6.7. Remarquons que la fonction ζ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \zeta(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (6.37)$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . On en déduit que la fonction η définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \eta(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (6.38)$$

est une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Voir les figures 4(a) et 4(b).

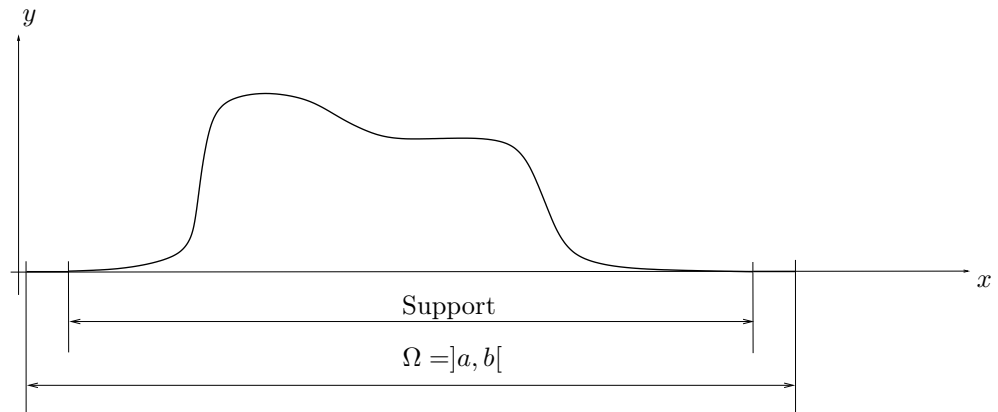
EXEMPLE 6.8. Grâce aux fonctions ζ et η de l'exemple 6.7, on peut aussi construire des fonctions égales à un sur un intervalle, nulle en dehors d'un intervalle strictement plus grand et indéfiniment dérivables. Voir la figure 4(c).

◇

9. très souvent, cela sera un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

10. c'est-à-dire, dans \mathbb{R} , fermé et borné.

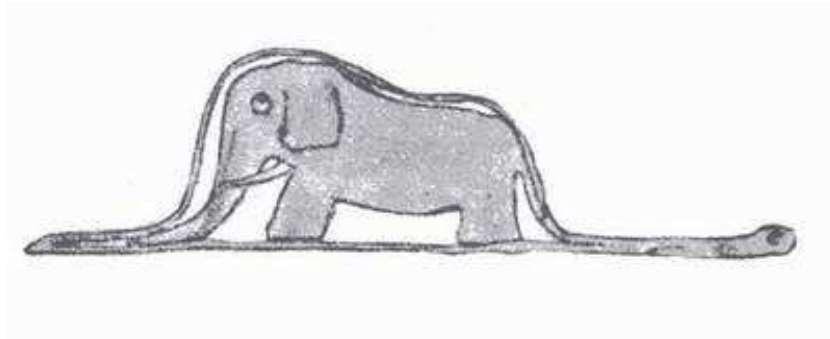
11. Toutes ces figures représentent aussi, selon l'âge de vos yeux, un chapeau ou un serpent qu'a mangé un éléphant issu du Petit prince de St-Exupéry ; voir <http://lepetitprinceexupery.free.fr/illustrations/01-02.jpg>, <http://lepetitprinceexupery.free.fr/illustrations/01-03.jpg>, et <http://lepetitprinceexupery.free.fr/chapitre01.htm>.



(a) La fonction



(b) ... et son modèle



(c) ... et son autre modèle

FIGURE 6.3. Un exemple de fonction de classe C^∞ à support compact.

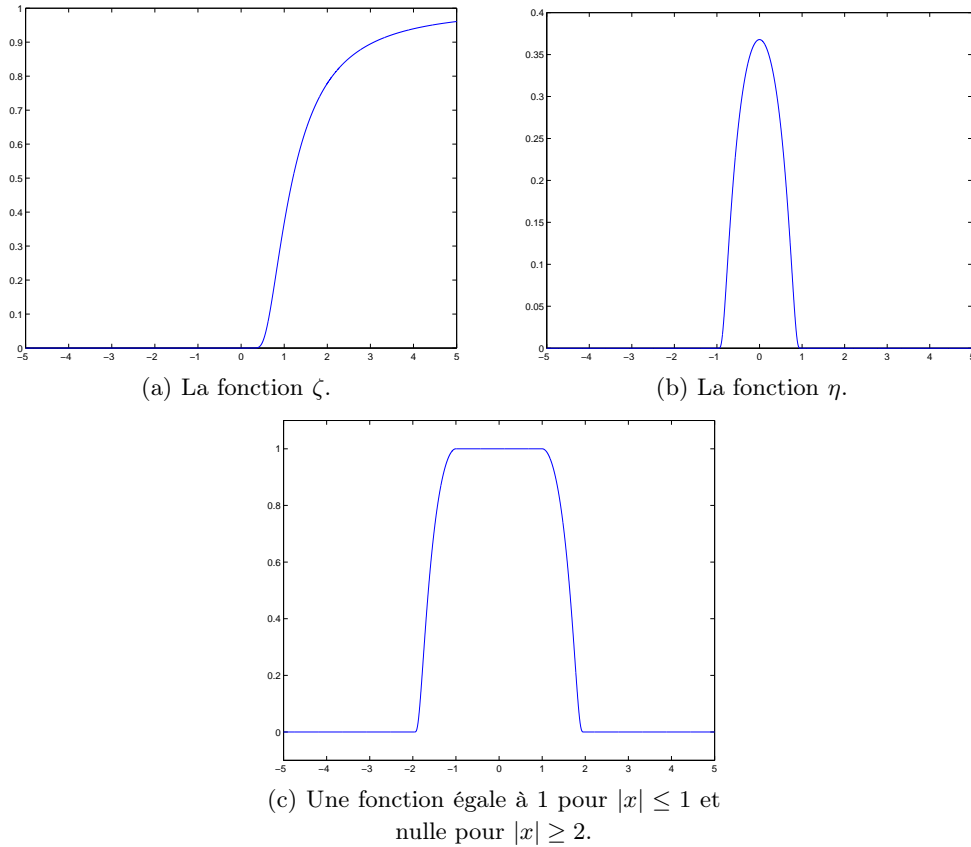
6.3.2. Définition des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Compte tenu de l'introduction informelle de la section 6.3.1.1, on peut adopter la définition suivante

DÉFINITION 6.9. Une distribution T sur Ω est une application linéaire¹² de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} . On note $T(\phi)$ l'image de ϕ par T . Cette application doit vérifier la condition de continuité suivante : pour tout fermé borné K inclu dans Ω , il existe un entier N_K et une constante C_K tels que pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ et nulle en dehors de K , on ait

$$|T(\phi)| \leq C_K \sup_{n \leq N_K} \sup_{x \in \Omega} |\phi^{(n)}(x)|. \quad (6.39)$$

12. $\mathcal{D}(\Omega)$ est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel de fonctions.

FIGURE 6.4. Quelques exemples de fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On note l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$.

NOTATION 6.10. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test, l'image de ϕ par T est notée $\langle T, \phi \rangle$ (à la place de $T(\phi)$).

REMARQUE 6.11. La condition (6.39) est tout le temps vérifiée en pratique et, si elle est écrite et utilisée dans ce polycopié, pour les preuves théoriques, elle n'est pas exigible. Toutes les applications linéaires de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} que l'on utilisera vérifieront cette condition !

La distinction entre $T(\phi)$ et $\langle T, \phi \rangle$ n'est pas anodine. Si on se donne une distribution connue, on notera $\langle T, \phi \rangle$. Si on définit une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} dont on veut démontrer qu'elle vérifie la condition de continuité (6.39), on notera $T(\phi)$ *tant que l'on a pas montré que T est une distribution*. On utilisera alors $\langle T, \phi \rangle$ quand on saura que l'on a affaire à une distribution

REMARQUE 6.12. L'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel. On peut aussi écrire

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R}).$$

◇

REMARQUE 6.13. L'égalité de deux distributions T_1 et T_2 est exactement identique à celle de deux fonctions f_1 et f_2 ! Cette dernière a lieu ssi, pour tout x de l'ensemble de départ, on a $f_1(x) = f_2(x)$. De même $T_1 = T_2$, ssi pour tout ϕ de l'ensemble de départ ($\mathcal{D}(\Omega)$), on a $\langle T_1, \phi \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$.

REMARQUE 6.14. Il est très important de mémoriser le schéma suivant, qui ne fait que traduire qu'une distribution T est une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} , qui à ϕ associe $\langle T, \phi \rangle$:

$$T: \begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto \langle T, \phi \rangle \end{cases} \quad (6.40)$$

6.3.3. L'intégration de Lebesgue, à la base des distributions

L'intégration de Riemann, que vous devez connaître, ne suffit plus pour la suite. La notion d'intégration de Lebesgue la supplante avantageusement. Voir l'annexe O.

6.3.4. Exemple de « distributions-fonctions »

DÉFINITION 6.15. Pour tout de fonction f de $L^2(\Omega)$ ou dans $L^1_{loc}(\Omega)$ (voir annexe P), on pose

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \quad (6.41)$$

L'application $\phi \mapsto T_f(\phi)$ est clairement linéaire. De plus, montrons la condition (6.39) si f est dans $L^2(\Omega)$: On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (P.5)

$$|T_f(\phi)| = \left| \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} f^2(x)dx} \sqrt{\int_{\Omega} \phi^2(x)dx} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)|.$$

On a donc défini la distribution T_f par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \quad (6.42)$$

Le théorème suivant est essentiel et permet de comprendre pourquoi la notion de distribution généralise la notion de fonction.

THÉORÈME 6.16. À toute fonction f de $L^1_{loc}(\Omega)$, on associe la distribution T_f définie par (6.42). L'application de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui à f associe T_f est linéaire et injective.

DÉMONSTRATION. Ce résultat est admis (voir preuve dans [Bal91, p. 18]). Il montre que si $T_{f_1} = T_{f_2}$, alors $f_1 = f_2$. L'égalité de deux fonctions f_1 et f_2 de $L^1_{loc}(\Omega)$ signifie l'égalité presque-partout de f_1 et f_2 (voir annexe O.2). □

REMARQUE 6.17. Si on appelle Ψ , l'application de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ du théorème 6.16, on a donc le schéma suivant :

$$\Psi : \begin{cases} L^1_{loc}(\Omega) & \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto T = \Psi(f) \end{cases} : \begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto \langle T, \phi \rangle = \int_{\Omega} f\phi \end{cases} \quad (6.43)$$

◇

REMARQUE 6.18.

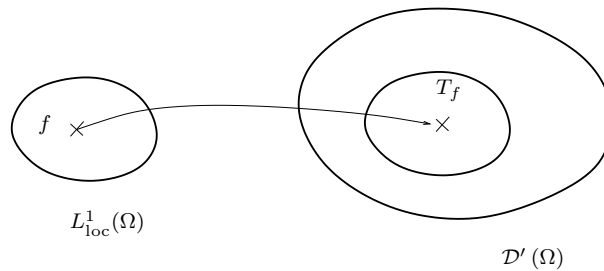


FIGURE 6.5. Injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On donc le schéma représenté sur la figure 6.5. Il est issu de [GW03]. Comme habituellement, on identifiera $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à la sous-partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui lui est isomorphe *via* l'injection Ψ . Si l'ensemble d'arrivée est réduit à $\Psi(L^1_{\text{loc}}(\Omega))$, cette injection devient en effet un isomorphisme.

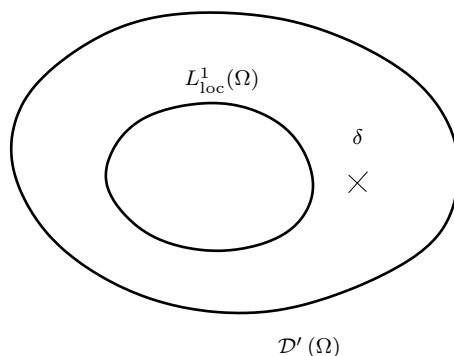


FIGURE 6.6. Identification de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à une sous partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On identifiera $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ donc à une sous partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$, comme le montre la figure 6.6, elle aussi issue de [GW03].

◇

Autrement dit, on peut donc identifier la distribution T_f , pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à la fonction f , grâce à (6.42). On notera donc par abus f à la place de T_f si f est une fonction de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et donc (6.42) sera noté sous la forme

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \quad (6.44)$$

On parle donc de distributions-fonctions. La notion de distribution généralise donc la définition de fonction, puisqu'elle englobe toutes les fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (et donc de $L^2(\Omega)$).

REMARQUE 6.19. Puisque une distribution-fonction de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ n'est définie que presque-partout, on peut donc changer, sans modifier la distribution, les valeurs de cette fonction sur des ensembles négligeables, en particulier sur des ensemble au plus-dénombrables¹³, en particulier donc sur des ensembles finis. Pour la fonction de Heaviside H définie par (6.11), ses valeurs sur \mathbb{R} pourraient être modifiées sur des valeurs finies, mais on garde traditionnellement l'expression donnée par (6.11a) et (6.11b). En revanche, en zéro, finalement, H n'a pas besoin d'être définie, puisque cette valeur ne joue pas ! On pose parfois, de façon purement conventionnelle

$$H(0) = 1/2, \quad (6.45)$$

égale à $(H(0+0) + H(0-0))/2$. Tout autre valeur pourrait être choisie !

NOTATION 6.20. On notera, tout au long de ce chapitre, f pour la fonction et T_f pour la distribution fonction associée. Cette notation est conforme à celle utilisée dans [Bal91] ou [Sch45]). D'autres auteurs (comme dans [Pet98]), notent $\{f\}$ à la place de T_f . Par la suite, pour alléger les notations et, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on les notera de la même façon, c'est-à-dire, que l'on écrira f pour T_f .

REMARQUE 6.21. Il faut désormais s'habituer à considérer qu'une fonction f est une application de Ω dans \mathbb{R} mais qu'on peut aussi la considérer simultanément comme une distribution, c'est-à-dire, une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Autrement dit, il faut s'habituer aux deux écriture différentes du même objet f :

$$f : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto \langle f, \phi \rangle = \int f\phi \end{cases}. \quad (6.46)$$

Bien relire la remarque 6.14 page 91, dans le cas général !

La question est maintenant de savoir s'il existe des distributions qui ne sont pas des fonctions !

13. C'est-à-dire dénombrables ou finis.

6.3.5. Exemple de « distributions non fonctions »

DÉFINITION 6.22. Soit Ω un ouvert et $a \in \Omega$. On appelle distribution (ou masse de) Dirac δ_a , la distribution définie par par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a). \quad (6.47)$$

DÉMONSTRATION. On a

$$|T(\phi)| = |\phi(a)| \leq \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)|.$$

□

NOTATION 6.23. Quand a est nul, on note δ à la place de δ_0 .

La propriété essentielle est que

PROPOSITION 6.24. *Le Dirac δ_a n'appartient pas à $L^1_{loc}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Reprenons la preuve de [GW03, pp. 205, 206]. Si le Dirac δ_a appartenait à $L^1_{loc}(\Omega)$, il existerait une fonction f de $L^1_{loc}(\Omega)$, telle que, avec l'abus de notation déjà signalé,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \phi(a) = \langle \delta, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \quad (6.48)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique (6.48) à ψ définie par

$$\psi(x) = \eta(n(x - a)),$$

où η est définie par (6.38). ψ est non nulle pour x vérifiant

$$-1 \leq n(x - a) \leq 1,$$

soit encore

$$a - \frac{1}{n} \leq x \leq a + \frac{1}{n}.$$

D'après (6.38), on a

$$\psi(a) = \eta(0) = \frac{1}{e},$$

et on a donc, selon (6.48), pour n assez grand :

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &= |\psi(a)|, \\ &= \left| \int_{\Omega} f\psi \right|, \\ &= \left| \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f\psi \right|, \\ &\leq \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} |f| |\psi|, \end{aligned}$$

et, puisque $|\eta|$ est majorée par 1, $|\psi|$ l'est aussi :

$$\leq \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} |f|,$$

et puisque f est intégrable sur $[a - 1/n, a + 1/n]$, cette quantité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On aurait donc à la limite n tend vers l'infini :

$$\frac{1}{e} = 0,$$

ce qui est absurde. □

PREUVES ALTERNATIVES DE LA PROPOSITION 6.24. Supposons donc que (6.48) ait lieu.

On en fournit deux :

- (1) Si on se restreint à des fonctions tests ϕ nulle en dehors d'un ouvert $\tilde{\Omega}$ inclus dans Ω et ne contenant pas a , on aurait donc

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(x)\phi(x)dx = 0,$$

et en particulier, on aurait

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}), \quad \langle f|_{\tilde{\Omega}}, \phi \rangle = 0$$

et donc $f|_{\tilde{\Omega}} = 0$. Cela étant vrai pour tout $\tilde{\Omega}$, on en déduit que f est nulle (sauf éventuellement en a). D'après (6.48), on a donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \phi(a) = 0,$$

ce qui est absurde d'après l'exemple 6.8.

- (2) On considère connus pour cette preuve les résultats de la section 6.7. Supposons que $\delta_a \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors, il existerait une fonction telle que, avec l'abus de notation déjà signalé, (6.48) ait lieu, c'est-à-dire

$$\delta_a = T_f. \tag{6.49}$$

On aurait donc, d'après l'exemple 6.48 page 102,

$$(x-a)\delta_a = (x-a)T_f = T_{(x-a)f}.$$

D'après (6.75), on a donc

$$T_{(x-a)f} = [x-a]_{x=a}\delta_a = 0.$$

Ainsi, la fonction $(x-a)f$ est presque partout nulle sur Ω et par division par $x-a$ (sauf en a), f est presque partout nulle sur Ω . T_f est donc nulle. On a donc pour toute fonction test ϕ , $\phi(a) = \langle \delta_a, \phi \rangle = \langle T_f, \phi \rangle = 0$, ce qui contredit l'exemple 6.7. □

◇

REMARQUE 6.25. Sur le schéma de la figure 6.6 page 93, on placera donc le dirac à l'extérieur de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

◇

REMARQUE 6.26. Parfois, on dit que si a n'appartient pas à Ω , δ_a est nul, ce qui est un peu absurde !

◇

Et voilà ! On a généralisé les fonctions en créant un espace qui le contient et strictement plus grand ¹⁴.

6.3.6. Combinaison linéaire de distributions

DÉFINITION 6.27. Si λ et μ sont deux réels et Si T_1 et T_2 sont deux distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution $\lambda T_1 + \mu T_2$ par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \lambda T_1 + \mu T_2, \phi \rangle = \lambda \langle T_1, \phi \rangle + \mu \langle T_2, \phi \rangle. \tag{6.50}$$

6.4. Limite d'une suite de distributions

Pour plus de détails, lire [Bal91, chapitre 3] et [GW03, leçon 29].

Reprenons l'exemple de la RDM de la section 6.2. Le dirac a permis de formaliser une force ponctuelle.

En réalité, une telle force existe dans le domaine de la modélisation mathématique mais n'est pas physiquement réaliste : elle ne reste pas tout à fait ponctuelle. On la modélise en fait souvent comme une application

14. Fantôme de nombreux mathématiciens, en quête permanente de généralisation !

d'une force d'intensité tendant vers l'infini, appliquée sur un intervalle de longueur tendant vers zéro. On introduit un paramètre $\varepsilon > 0$ tendant vers zéro et on cherche une force résultant de la densité d'effort tranchant p_ε telle que p_ε qui doit vérifier

$$\forall x \in [0, L/2 - \varepsilon/2] \cup [L/2 + \varepsilon/2, L], \quad p_\varepsilon(x) = 0, \quad (6.51a)$$

$$\forall x \in [L/2 - \varepsilon/2, L/2 + \varepsilon/2], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x) = +\infty. \quad (6.51b)$$

Souvent, on adopte la définition suivante de p_ε

$$\forall x \in [0, L/2 - \varepsilon/2] \cup [L/2 + \varepsilon, L], \quad p_\varepsilon(x) = 0, \quad (6.52a)$$

$$\forall x \in [L/2 - \varepsilon/2, L/2 + \varepsilon/2], \quad p_\varepsilon(x) = \frac{F}{\varepsilon}. \quad (6.52b)$$

Il existe aussi d'autres possibilités, notamment avec une force linéaire par morceaux. Remarquons qu'on a un résultat de convergence simple de p_ε quand ε tend vers zéro puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (6.53)$$

L'objet limite n'est pas une fonction, mais cela justifie de façon formelle l'écriture abusive (6.19).

Par définition des distributions, on a, pour $\varepsilon > 0$, puisque la densité p_ε est une fonction de L^2

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle p_\varepsilon, \phi \rangle = \int_0^L p_\varepsilon(s) \phi(s) ds. \quad (6.54)$$

On peut montrer que

$$\forall v \in C^1(0, L), \quad \left| \int_0^L p_\varepsilon(s) v(s) ds - Fv(L/2) \right| \leq F\varepsilon \max_{s \in [0, L]} |v'(s)|. \quad (6.55)$$

En effet, d'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à v sur $[L/2 - \varepsilon/2, L/2 + \varepsilon/2]$, on a

$$|v(s) - v(L/2)| = |(s - L/2)v'(x_s)|,$$

où $x_s \in [L/2 - \varepsilon/2, L/2 + \varepsilon/2]$. Ainsi, en particulier,

$$|v(s) - v(L/2)| \leq \max_{[0, L]} |v'| |s - L/2| \leq \varepsilon \max_{[0, L]} |v'|$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L p_\varepsilon(s) v(s) ds - Fv(L/2) \right| &= \left| \int_{L/2 - \varepsilon/2}^{L/2 + \varepsilon/2} \frac{F}{\varepsilon} v(s) - \frac{Fv(L/2)}{\varepsilon} ds \right|, \\ &= \frac{F}{\varepsilon} \int_{L/2 - \varepsilon/2}^{L/2 + \varepsilon/2} |v(s) - v(L/2)| ds, \\ &\leq \frac{F}{\varepsilon} \max_{[0, L]} |v'| \varepsilon^2, \\ &= F \max_{[0, L]} |v'| \varepsilon. \end{aligned}$$

◇

Autrement, dit on a en particulier,

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle p_\varepsilon, \phi \rangle = Fv(L/2) = \langle F\delta_{L/2}, \phi \rangle. \quad (6.56)$$

Cette observation constitue la définition de la limite que l'on formalise ainsi :

DÉFINITION 6.28 (Convergence au sens des distributions). Soient (T_n) une suite de distributions sur l'ouvert Ω et T une distribution sur l'ouvert Ω . On dit que la suite (T_n) de distributions converge vers T sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \phi \rangle)$ converge vers $\langle T, \phi \rangle$.

REMARQUE 6.29. Une suite de distribution étant une suite d'application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} , la convergence de (T_n) vers T ne fait que traduire la convergence simple de T_n vers T , puisque celle-ci est équivalente à, pour tout ϕ , $\langle T_n, \phi \rangle = T_n(\phi)$ tend vers $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$.

Cette condition de la définition 6.28 est donc beaucoup moins exigeante que tous les résultats de convergence de l'annexe N où il faut des conditions spécifiques pour qu'une suite de fonctions converge vers une fonction.

Par définition et selon (6.56), on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon = F\delta_{L/2} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ où } \Omega =]0, L[. \quad (6.57)$$

On retrouve une justification formelle de (6.19) : si on écrit abusivement (6.57) point par point, on retrouve bien (6.19) (selon (6.53)). Mais cette limite ne peut avoir lieu dans $L^2(\Omega)$!

D'autres limites de fonctions peuvent fournir le Dirac : voir [Pet98, p. 49] ou l'exercice de TD 6.2 ou 6.11. Notons les lemmes suivants :

LEMME 6.30. *Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire

$$|\langle f_n, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle| = \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))\phi(x) dx \right| \leq K \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|,$$

où la constante K vaut $\int_{\Omega} |\phi|$. Ainsi, $|\langle f_n, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle|$ qui tend vers zéro. \square

LEMME 6.31. *Si une suite de fonctions (f_n) converge vers f dans $L^2(\Omega)$, alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f_n, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle| = \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))\phi(x) dx \right| \leq \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

qui tend vers zéro. \square

Cette notion de limite est grandement simplifiée par le fait qu'il est inutile de vérifier en fait que l'objet limite est une distribution :

THÉORÈME 6.32. *Soit (T_n) une suite de distributions sur l'ouvert Ω . On suppose que pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \phi \rangle)$ converge. Soit l_ϕ sa limite. Alors l'application T qui à ϕ associe l_ϕ est une distribution (et c'est donc la limite de la suite des distributions (T_n)).*

DÉMONSTRATION. Admise (voir [Bal91, p. 24]). \square

Une autre question qui se pose est de calculer la distributions des efforts et la flèche de la structure étudiée en section 6.1 à la quelle on applique la densité d'effort tranchant donnée par (6.52) et de montrer à la main que tout tend vers la distribution des efforts et la flèche étudiée en section 6.1 à la quelle on applique un dirac en $L/2$. C'est l'objet de l'exercice 6.16 de TD.

On renvoie à [Bas11c, Annexe F], où l'introduction d'une telle force est abordée (valable sur une situation physique un peu différente, mais où l'esprit est le même) où l'on cherche à la main à comprendre ce qui se passe pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

EXEMPLE 6.33 (Valeur principale de $1/x$). On pose $\Omega = \mathbb{R}$. La fonction $1/x$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. En revanche, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \quad (6.58)$$

où l'on a posé

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (6.59)$$

En effet, pour A assez grand et pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned} \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(x)}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(x)}{x} dx - \int_A^{\varepsilon} \frac{\phi(-x)}{-x} dx, \\ &= \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx, \\ &= \int_0^A \psi_{\varepsilon}(x) dx, \end{aligned}$$

où la fonction ψ_{ε} est définie sur $[0, A]$ par

$$\forall x \in [0, A], \quad \psi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in [\varepsilon, A], \\ 0 & \text{si } x \in [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

On introduit la fonction ψ , définie par

$$\forall x \in [0, A], \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 2\phi'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange en zéro, on a, pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(0) + x\phi'(0) + \frac{x^2}{2}\phi''(r_x), \\ \phi(-x) &= \phi(0) - x\phi'(0) + \frac{x^2}{2}\phi''(s_x), \end{aligned}$$

où $r_x \in]0, x[$ et $s_x \in]-x, 0[$ et donc

$$\psi(x) = 2\phi'(0) + \frac{x}{2}(\phi''(r_x) + \phi''(s_x)),$$

cette dernière quantité tendant vers zéro quand x tend vers 0. On peut aussi établir cela avec la règle de l'hospital. Ainsi, la fonction ψ est continue sur $[0, A]$. Donc, la fonction ψ_{ε} est bornée indépendamment de ε et tend simplement vers la fonction ψ sur $[0, A]$, qui est continue. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue O.3 page 265, on a, à A fixé,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^A \psi_{\varepsilon}(x) dx = \int_0^A \psi(x) dx,$$

et donc pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la limite (6.58) existe. Ainsi, la limite $\lim_{\varepsilon} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$ existe pour toute fonction ϕ . D'après la proposition 6.32, on sait que l'on a affaire à une distribution (et qui est donc par définition la limite de (f_{ε}) où f_{ε} est la distribution fonction dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

On a par définition

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \phi \right\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \quad (6.60)$$

où on note abusivement

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

Ainsi, puisque $1/x$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, alors $\text{vp}(1/x)$ n'est pas une distribution-fonction.

En effet, supposons qu'il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} g\phi = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (6.61)$$

Soit $\eta > 0$. On considère $\phi \in \mathcal{D}([\eta, +\infty[)$ et on la prolonge par zéro sur \mathbb{R} de telle sorte qu'il existe $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} \forall x \in [\eta, +\infty[, \tilde{\phi}(x) &= \phi(x), \\ \forall x \notin [\eta, +\infty[, \tilde{\phi}(x) &= 0. \end{aligned}$$

et d'après (6.61) appliqué à $\tilde{\phi}$, on a donc

$$\int_{\eta}^{+\infty} g\phi = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\tilde{\phi}(x)}{x} dx.$$

Dans la limite de droite, on remarque que l'intégrande est nulle sur $]-\infty, \eta]$ et si $\varepsilon \leq \eta$, on a donc

$$\int_{\eta}^{+\infty} g\phi = \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Cela est vrai pour tout ϕ , donc

$$\frac{1}{x} = g(x), \text{ p.p. sur } [\eta, +\infty[.$$

Comme cela est vrai pour tout $\eta > 0$, il vient donc

$$\frac{1}{x} = g(x), \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_+^*. \quad (6.62)$$

On montrerait de même que

$$\frac{1}{x} = g(x), \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_-^*. \quad (6.63)$$

On a donc, d'après (6.62) et (6.63) :

$$\frac{1}{x} = g(x), \text{ p.p. sur } \mathbb{R}, \quad (6.64)$$

ce qui implique que $1/x = g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas possible. \diamond

6.5. Dérivation des distributions

Pour plus de détails, lire [Bal91, chapitre 4], [GW03, leçon 28] et [Pet98, chap. II].

En généralisant ce qu'on a observé en section 6.3.1.1, on donne

DÉFINITION 6.34 (Dérivées des distributions). Soit T une distribution sur l'ouvert Ω . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la dérivée k -ième $T^{(k)}$ de T par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle T, \phi^{(k)} \rangle. \quad (6.65)$$

On vérifie aisément que la condition (6.39) a lieu.

EXEMPLE 6.35 (Dérivée de la fonction de Heaviside H). La fonction de Heaviside H est définie par (6.11). On retrouve (6.36) :

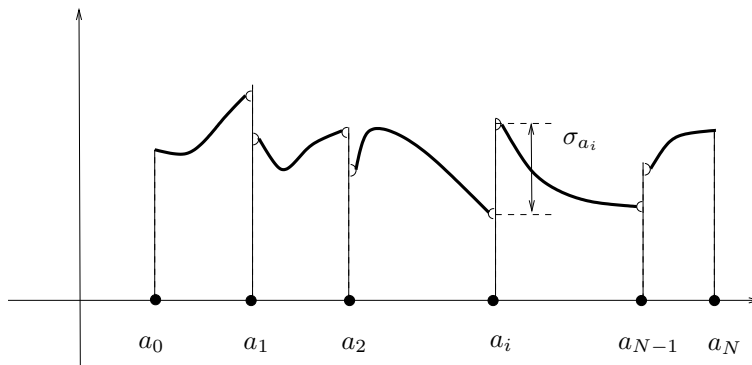
$$H' = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (6.66)$$

En effet, on refait le calcul (6.33). Par définition, on a, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et puisque H est dans $L^2(\Omega)$,

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_{-A}^A H(x)\phi'(x)dx = -\int_0^A \phi'(x)dx = -\phi(A) + \phi(0) = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Notons bien que H est dans $L^2(\Omega)$ et que sa dérivée, au sens des distributions mais pas des fonctions, est égale à δ , qui n'est plus une fonction !

On peut généraliser cela avec la formule des sauts :

FIGURE 6.7. Une fonction discontinue aux points a_i .

PROPOSITION 6.36 (Formules des sauts). Soit un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , $(a_i)_{0 \leq i \leq N}$ un ensemble fini ordonné de points de I , où a_0 et a_N sont les extrémités (finies ou non) de I . Soit f une fonction continûment dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$ ayant en chaque a_i pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$ (voir figure 6.7), une limite à droite et une limite à gauche. On note le saut de f en a_i , pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, la quantité

$$\sigma_{a_i} = f(a_i + 0) - f(a_i - 0). \quad (6.67)$$

On note f' , la fonction définie par la dérivée usuelle de f (sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$). On a dans $\mathcal{D}'(I)$:

$$T'_f = f' + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}. \quad (6.68)$$

DÉMONSTRATION. On se donne $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ où $\Omega = I$. Il suffit de le faire pour $N = 2$:

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle, \\ &= -\langle f, \phi' \rangle, \\ &= -\int_{a_0}^{a_2} f(x) \phi'(x) dx, \\ &= -\int_{a_0}^{a_1} f(x) \phi'(x) dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x) \phi'(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui donne, après une intégration par partie et en utilisant le fait que ϕ est nulle en a_0 et en a_2 :

$$\begin{aligned} &= \int_{a_0}^{a_1} f'(x) \phi(x) dx - f(a_1 - 0) \phi(a_1) + \int_{a_1}^{a_2} f'(x) \phi(x) dx + f(a_1 + 0) \phi(a_1), \\ &= \int_{a_0}^{a_2} f'(x) \phi(x) dx + (f(a_1 + 0) - f(a_1 - 0)) \phi(a_1), \\ &= \int_{a_0}^{a_2} f'(x) \phi(x) dx + \sigma_{a_1} \phi(a_1), \\ &= \int_{a_0}^{a_2} f'(x) \phi(x) dx + \sigma_{a_1} \langle \delta_{a_1}, \phi \rangle, \\ &= \langle f', \phi \rangle + \sigma_{a_1} \langle \delta_{a_1}, \phi \rangle, \\ &= \langle f' + \sigma_{a_1} \delta_{a_1}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 6.37. Contrairement à ce que a adopté dans la remarque 6.20, il est fondamental ici de noter différemment T_f , la distribution fonction associée à la fonction f : ainsi T'_f est la dérivée de la distribution fonction T_f et f' est fonction égale à la dérivée usuelle de f . Si on notait, ici, f' pour T'_f , on aurait l'égalité absurde

$$f' = f' + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}.$$

Voir aussi [Pet98, p. 40].

EXEMPLE 6.38. si $f(x) = |x|$, $T'_f = \text{signe}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

En particulier, si les sauts sont nuls, on a clairement deux conséquences immédiates de la proposition 6.36 :

LEMME 6.39. *Si f est continûment dérivable sur I , alors f est dérivable au sens des distributions et sa dérivée vaut sa dérivée usuelle.*

LEMME 6.40. *Si f est continue sur un intervalle I et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points sur I , alors f est dérivable au sens des distributions et sa dérivée y vaut sa dérivée usuelle.*

On peut donc écrire aussi que f' est égale presque partout (sauf aux points où elle n'est pas dérivable) à sa dérivée usuelle.

On peut sensiblement affaiblir la proposition 6.36 en la remplaçant par

PROPOSITION 6.41 (Formules des sauts (plus faible)). *Soit un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , $(a_i)_{0 \leq i \leq N}$ un ensemble fini ordonné de points de I , où a_0 et a_N sont les extrémités de I . Soit f une fonction dont la restriction à $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$ est dans $H^1(]a_i, a_{i+1}[)$ (voir annexe P) et ayant en chaque a_i pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, une limite à droite et une limite à gauche. On note le saut de f en a_i , pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, la quantité*

$$\sigma_{a_i} = f(a_i + 0) - f(a_i - 0). \quad (6.69)$$

On note f' , la fonction définie par la dérivée usuelle de f (sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$). On a dans $\mathcal{D}'(I)$:

$$T'_f = f' + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}. \quad (6.70)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que la preuve de la proposition 6.36 est fondée sur l'intégration par partie, elle même fondée sur le fait que si g est dérivable

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(s) ds, \quad (6.71)$$

cette formule étant appliquée à $g = f\phi$ puisque $g' = f\phi' + f'\phi$. Si f est dans H^1 , f' est dans L^2 (voir annexe P), on a $g = f\phi$ dans H^1 avec $g' = f\phi' + f'\phi$. La formule (6.71) est vraie grâce à (P.2b). \square

◇

Donnons une conséquence immédiates de la proposition 6.41 :

LEMME 6.42. *Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , nulle sur \mathbb{R}_- et dont la restriction à \mathbb{R}_+ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ et possède une dérivée appartenant dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Notons f' la dérivée usuelle de f sur chacun des intervalles \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- (f' est donc nulle sur \mathbb{R}_-). On suppose que f admet une limite à droite en zéro $f(0+0)$. On a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:*

$$T'_f = f' + f(0+0)\delta. \quad (6.72)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de raisonner d'appliquer le résultat de la proposition 6.41, en remarquant que f , continue sur \mathbb{R}_+ , admet une limite à droite en zéro, notée $f(0+0)$. \square

REMARQUE 6.43. On peut donc dériver presque partout (ou dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) une fonction non dérivable partout (voir définition O.2 page 265). Cela servira pour la définition des espaces de Sobolev (voir annexe P) de la façon suivante : Supposons que f appartient à H^1 de dérivée, au sens des distributions, notée g . Si g appartient à L^2 ont dit que f appartient à H^1 et on a

$$f' = g, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et donc

$$f' = g, \text{ p.p. sur } \Omega,$$

ce qui généralise les résultats précédents.

PROPOSITION 6.44. *Si I est un intervalle de \mathbb{R} et T une distribution de $\mathcal{D}'(I)$ dont la dérivée est nulle, alors T est une fonction constante.*

DÉMONSTRATION. Voir [GW03, p. 227] ou corollaire S.12 page 280. \square

Enfin, on a le lemme suivant, finalement immédiat à montrer

LEMME 6.45. *Soient (T_n) une suite de distributions sur l'ouvert Ω et T une distribution sur l'ouvert Ω telle que la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout entier k , $(T_n^{(k)})$ converge vers $T^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout k , $\langle T_n^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle T_n, \phi^{(k)} \rangle$ qui tend vers $(-1)^k \langle T, \phi^{(k)} \rangle = \langle T^{(k)}, \phi \rangle$. \square

EXEMPLE 6.46 (Dérivée k -ième du dirac). On a vu dans l'exemple 6.35 que le dirac est la dérivée de la fonction de Heaviside. On peut continuer de dériver : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_a^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(a).$$

En effet,

$$\langle \delta_a^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle \delta_a, \phi^{(k)} \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(a).$$

Comme dans la proposition 6.24, on peut montrer que les dérivées successives du dirac δ_a n'appartiennent pas à $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

6.6. Retour sur les paradoxes de la RDM et leur levée par les distributions

Dans le tableau 6.1 page 87, ce qui est écrit dans la colonne de gauche sera donc banni de ce cours, en privilégiant donc l'écriture de la colonne de droite ! Néanmoins, il vous faudra faire l'effort, comme pour une langue étrangère, de savoir utiliser les écritures de cette colonne en mécanique !

Notons aussi que si la « fonction » δ vue à la physicienne peut avoir un sens, il n'en est plus rien de sa dérivée δ' !

6.7. Produit de distributions (produit par une fonction indéfiniment dérivable)

Pour plus de détails, lire [Bal91, section IV-1].

On ne peut malheureusement multiplier deux distributions quelconques. Néanmoins, on a

DÉFINITION 6.47 (Multiplication d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable). Soient g une fonction indéfiniment dérivable sur Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit la distribution gT par la formule

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle gT, \phi \rangle = \langle T, g\phi \rangle. \quad (6.73)$$

On admet que cela définit bien une distribution. Remarquons que si g est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $g\phi$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ et (6.73) a bien un sens.

EXEMPLE 6.48. La définition du produit d'une distribution fonction par une fonction indéfiniment dérivable généralise évidemment le produit usuel des fonctions. En remarquant que si f appartient à $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, il en est de même de gf et on a

$$gT_f = T_{gf}.$$

Notons une conséquence importante de cette définition

LEMME 6.49. *Si a appartient à Ω et si g est une fonction indéfiniment dérivable sur Ω , on a*

$$g\delta_a = g(a)\delta_a. \quad (6.74)$$

En particulier, si $g(a) = 0$, on a

$$g\delta_a = 0. \quad (6.75)$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a, pour toute fonction test ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle g\delta_a, \phi \rangle = \langle \delta_a, g\phi \rangle = [g\phi]_{x=a} = g(a)\phi(a) = g(a)\langle \delta_a, \phi \rangle = \langle g(a)\delta_a, \phi \rangle. \quad (6.76)$$

Si $g(a) = 0$, l'équation (6.75) est donc une conséquence immédiate de (6.74). \square

EXEMPLE 6.50. Si a appartient à Ω , on a

$$(x-a)\delta_a = 0, \quad (x-a)\delta'_a = -\delta_a. \quad (6.77)$$

DÉMONSTRATION. Voir exercice 6.4 de TD. \square

Donnons aussi un résultat qui généralise la dérivée d'un produit de fonctions :

PROPOSITION 6.51 (Dérivation d'un produit de distributions). *Soient g une fonction indéfiniment dérivable sur Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

$$(gT)' = g'T + gT'. \quad (6.78)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire, une fois de plus, les différentes définitions que l'on a vues : avec les bonnes hypothèses, on a

$$\begin{aligned} \langle (gT)', \phi \rangle &= -\langle gT, \phi' \rangle, \\ &= -\langle T, g\phi' \rangle, \\ &= \langle T, -g\phi' \rangle, \end{aligned}$$

et puisque $-g\phi' = g'\phi - (g\phi)'$, il vient

$$\begin{aligned} &= \langle T, g'\phi - (g\phi)' \rangle, \\ &= \langle T, g'\phi \rangle - \langle T, (g\phi)' \rangle, \\ &= \langle g'T, \phi \rangle + \langle T', g\phi \rangle, \\ &= \langle g'T, \phi \rangle + \langle gT', \phi \rangle, \\ &= \langle g'T + gT', \phi \rangle \end{aligned}$$

\square

On pourra de nouveau lire la preuve alternative de la proposition 6.24, page 95.

6.8. Série de distributions

En utilisant la définition 6.28 page 96 de la convergence d'une suite de distribution et le théorème (6.32), on donne la définition suivante

DÉFINITION 6.52 (Série de distributions). Soit une suite $(T_n)_n$ de distribution. On suppose que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la série numérique de terme général $\langle T_n, \phi \rangle$ converge, c'est-à-dire

$$\exists l_\phi \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \langle T_n, \phi \rangle = l_\phi.$$

Alors l'application T qui à ϕ associe l_ϕ est une distribution (et c'est donc la somme $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ vue comme limite au sens des distributions).

On définit naturellement de la même façon la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n$.

On a donc, par définition,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_n, \phi \rangle. \quad (6.79)$$

LEMME 6.53. Soient (T_n) une suite de distributions sur l'ouvert Ω . Si la série de distribution $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge, alors on a la série de distribution $\sum_{n=0}^{\infty} T'_n$ converge et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} T'_n. \quad (6.80)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire, une fois de plus, les différentes définitions que l'on a vues : on a

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right)', \phi \right\rangle &= - \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \phi' \right\rangle, \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_n, \phi' \rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T'_n, \phi \rangle, \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} T'_n, \phi \right\rangle, \end{aligned}$$

cette série numérique convergeant, puisqu'elle est égale à $\langle \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \phi' \rangle$ qui converge. \square

C'est donc très facile de dériver terme à terme !

EXEMPLE 6.54. La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$ converge vers $2\pi\delta$ dans $\mathcal{D}'(-1, 1]$, soit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(-1, 1]. \quad (6.81)$$

On peut montrer, par intégration par partie, que si ϕ est à support compact inclus dans $[-A, A]$, il existe C telle que

$$\left| \int_{-1}^1 e^{inx} \phi(x) \phi'(x) dx \right| \leq \frac{C \max(|\phi''|)}{n^2},$$

dont on déduit que la série de terme général $\int_{-1}^1 e^{inx} \phi(x) \phi'(x) dx$ (pour $n \in \mathbb{Z}$) est convergente dans \mathbb{R} . De plus, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{inx} &= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \phi(x) dx &= 2\pi\phi(0). \end{aligned}$$

Ainsi, dans \mathbb{R} , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \sum_{n=-N}^N e^{inx} \phi(x) dx = 2\pi\phi(0).$$

Ainsi, dans $\mathcal{D}'(-1, 1]$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N e^{in\cdot} = 2\pi\delta.$$

Voir pour plus de détails [Bal91, section IV-1]. \diamond

EXEMPLE 6.55. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n} = i(2\pi H - x - \pi), \text{ dans } \mathcal{D}'(]-1, 1[). \quad (6.82)$$

Il suffit d'appliquer le lemme 6.53 et l'exemple 6.54 : on écrit dans $\mathcal{D}'(]-1, 1[)$

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n} \right)' = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{e^{inx}}{n} \right)' = i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{inx} = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} - i = 2i\pi\delta - i = (2i\pi H - ix)'$$

En utilisant la proposition 6.44 on conclut qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n} = i(2\pi H - x) + C. \quad (6.83)$$

Donnons maintenant la preuve de

$$C = -i\pi. \quad (6.84)$$

(1) Notons tout d'abord que, dans $\mathcal{D}'(]-1, 1[)$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{e^{inx}}{n},$$

dans la seconde somme, on pose $n' = -n$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-inx}}{-n}, \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (e^{inx} - e^{-inx}), \\ &= 2i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \end{aligned}$$

et (6.83) donne donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \text{ dans } \mathcal{D}'(]-1, 1[). \quad (6.85)$$

(2) On a aussi, par définition,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]-1, 1[), \quad \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\langle \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle,$$

et donc, puisque $\sin(nx)$ est une distribution-fonction

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]-1, 1[), \quad \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \phi(x) dx. \quad (6.86)$$

Par ailleurs, on a aussi, par définition ,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]-1, 1[), \quad \left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \right) \phi(x) dx. \quad (6.87)$$

(3) Choisissons une fonction ϕ paire¹⁵ dans (6.86) :

$$\left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \phi(x) dx = 0,$$

puisque chacune des intégrales $\int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \phi(x) dx$ est nulle, par imparité de $\sin(nx) \phi(x)$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \phi(x) dx = 0. \quad (6.88)$$

15. En prenant par exemple $\psi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$, puis sa partie paire $\phi(x) = (\psi(x) + \psi(-x))/2$.

Si on choisit la même fonction paire dans (6.87), on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \right) \phi(x) dx, \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}} H(x) \phi(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x \phi(x) dx + \frac{C}{2i} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx, \\ &= \pi \int_0^{+\infty} \phi(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x \phi(x) dx + \frac{C}{2i} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui fait par parité et imparité :

$$= \pi \int_0^{+\infty} \phi(x) dx + \frac{C}{i} \int_0^{+\infty} \phi(x) dx,$$

et donc

$$\left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle = \left(\pi + \frac{C}{i} \right) \int_0^{+\infty} \phi(x) dx. \quad (6.89)$$

(4) Enfin, de (6.85), (6.86), (6.87), (6.88) et (6.89), on conclut

$$\left(\pi + \frac{C}{i} \right) \int_0^{+\infty} \phi(x) dx = 0. \quad (6.90)$$

On peut montrer que ϕ peut être choisie telle que $\int_0^{+\infty} \phi(x) dx \neq 0$ et donc on a d'après (6.90), on a $\pi + \frac{C}{i} = 0$ et donc

$$C = -i\pi. \quad (6.91)$$

◇

REMARQUE 6.56. De (6.85), on déduit aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x}{2} + \frac{-i\pi}{2i} \text{ dans } \mathcal{D}'(]-1, 1[),$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x + \pi}{2} \text{ dans } \mathcal{D}'(]-1, 1[). \quad (6.92)$$

6.9. Intégration de distributions

Voir annexe S.

6.10. Remarque générale sur le passage fonctions \rightarrow distributions

Les distributions forment un ensemble plus vaste que celui des fonctions. Les notions usuelles propres aux fonctions (égalité, produit, convergence, dérivation, série) ont été généralisées aux fonctions. Il faut bien noter que *toutes ces notions passent des fonctions aux distributions* ; par exemple, si f est dérivable au sens des fonctions, elle l'est au sens des distributions. En revanche, *le passage inverse (distributions \rightarrow fonctions) n'est pas toujours vrai* ! Par exemple, s'il y a convergence au sens des distributions, il n'est pas certain que l'objet limite ne soit une fonction ; même si la limite est encore une fonction, la convergence n'a pas nécessairement lieu au sens des fonctions !

Produit de convolution pour les distributions

Dans tout ce chapitre, toutes les fonctions et distributions sont définies sur $\Omega = \mathbb{R}$. Par abus de notation, on notera $\int f$ à la place de $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

7.1. Rappels sur la convolution de fonctions

Voir votre cours de OMI2, [Bre83, p. 66 à 69], [Rud92, p. 139 et 140] ou la section 7.2.

7.2. Définition de la convolution de fonctions

On rappelle la définition suivante :

DÉFINITION 7.1. Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad (7.1)$$

qui est définie presque partout sur \mathbb{R} . La fonction h appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Elle est appelée le produit de convolution¹ de f et de g et est notée $f * g$. On a aussi (voir définition P.1 page 267)

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \quad (7.2)$$

Remarquons que ce produit est commutatif : c'est-à-dire

$$f * g = g * f. \quad (7.3)$$

En effet, dans (7.1), posons (à x fixé) $u = x - y$. On a donc $y = x - u$ et $dy = -du$ et

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = - \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)du, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy = (g * f)(x) \end{aligned}$$

On a aussi la linéarité :

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2. \quad (7.4)$$

Comme dans le chapitre 6, toutes les intégrales sur \mathbb{R} sont notées $\int f$.

7.3. Propriété de la convolution de fonctions

Notons aussi

PROPOSITION 7.2. Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ presque partout dérivables et telles que f' et g' soient dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est dérivable presque partout sur \mathbb{R} et

$$(f * g)' = f' * g = f * g'. \quad (7.5)$$

1. ou la convolution

Autrement dit, pour dériver un produit de convolution de fonctions, il suffit de dériver l'une des deux fonctions !

DÉMONSTRATION. Par dérivation sous le signe somme, on a

$$(f * g)'(x) = \int \frac{\partial}{\partial x}(f(x-y)g(y))dy = \int f'(x-y)g(y)dy = (f' * g)(x).$$

Par commutativité, on a aussi $(f * g)' = (g * f)' = g' * f = f * g'$. \square

REMARQUE 7.3. Il suffit en fait qu'une seule des deux fonctions f ou g soient dérivable. Par exemple, si f l'est, on a en effet

$$(f * g)' = f' * g. \quad (7.6)$$

Notons une notation et une propriété qui sera utile par la suite :

NOTATION 7.4. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R}_+ , on la prolonge sur \mathbb{R} en définissant \tilde{f} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Notons aussi que, si f est une fonction définie sur \mathbb{R} , alors la fonction Hf (où H est la fonction de Heaviside) est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (Hf)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Ainsi, d'après le résultat du lemme 6.42, on a, si f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, si f est dérivable sur \mathbb{R}_+ , si la dérivée usuelle f' appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et si f possède une limite à droite en zéro notée $f(0+)$, alors

$$T'_{\tilde{f}} = \tilde{f}' + f(0+)\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (7.9)$$

De même, si f est une fonction définie sur \mathbb{R} , si f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, si f est dérivable sur \mathbb{R} , si la dérivée usuelle f' appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et si f est continue en zéro, alors, on a

$$T'_{Hf} = Hf' + f(0)\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (7.10)$$

ce que l'on pourra noter sous la forme

$$(Hf)' = Hf' + f(0)\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (7.11)$$

LEMME 7.5. Soient v et w deux fonctions appartenant à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Alors, le produit de convolution $\tilde{v} * \tilde{w}$ existe et est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tilde{v} * \tilde{w})(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \int_0^x v(x-y)w(y)dy, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

La restriction de $\tilde{v} * \tilde{w}$ à \mathbb{R}_+ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. De plus, si v et w sont dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, alors la restriction de $\tilde{v} * \tilde{w}$ à \mathbb{R}_+ est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ et

$$\|\tilde{v} * \tilde{w}|_{\mathbb{R}_+}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|w\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}. \quad (7.13)$$

DÉMONSTRATION. On se contente de calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, le produit $\tilde{v} * \tilde{w}$ donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tilde{v} * \tilde{w})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(x-u)\tilde{w}(u)du. \quad (7.14)$$

Remarquons que, pour tout u, x dans \mathbb{R} ,

$$(u < 0 \text{ ou } x < u) \implies \tilde{v}(x-u)\tilde{w}(u) = 0. \quad (7.15)$$

En effet, si $u < 0$, alors $\tilde{w}(u) = 0$. Si $x < u$, alors $x - u < 0$ et $\tilde{v}(x - u) = 0$.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ fixé. Si $x < 0$, alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $u < 0$ ou $x < u$. En effet, si $u < x$, on a $u < x < 0$. Si $u > x$, alors $x < u$. Donc, d'après (7.15), la fonction $u \mapsto \tilde{v}(x - u)\tilde{w}(u)$ est nulle et son intégrale égale à $(\tilde{v} * \tilde{w})(x)$ est nulle. Ainsi, $(\tilde{v} * \tilde{w})(x) = 0$. Au contraire, si $x > 0$, on a pour $u < 0$, $\tilde{w}(u) = 0$ et pour $u > x$, on a $\tilde{v}(x - u) = 0$. Ainsi, la fonction $u \mapsto \tilde{v}(x - u)\tilde{w}(u)$ est nulle sur $] -\infty, 0[\cup]x, +\infty[$ et son intégrale se réduit donc à

$$h(x) = \int \tilde{v}(x - u)\tilde{w}(u)du = \int_0^x \tilde{v}(x - u)\tilde{w}(u)du = \int_0^x v(x - u)v(u)du.$$

Les autres résultats sont admis. □

7.4. Produit de convolution pour les distributions

On pourra consulter, pour plus de détails, [Bal91, chapitre 5], [Pet98, chapitre IV] ou [Kib01, section 5.4].

7.4.1. Définition formelle du produit de convolution pour les distributions

Contrairement au chapitre 6, où toutes les notions ont été étendue « assez facilement » des fonctions aux distributions, la notion de produit de convolution pour les distributions est plus difficile à donner et nous commettrons quelques abus, en ne respectant pas toujours la rigueur des mathématiques!

Soient f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Admettons que l'intégrale double² suivante existe

$$I = \iint f(x)g(y)\phi(x + y)dx dy, \quad (7.17)$$

D'après le théorème de Fubini (voir par exemple [Bre83, chapitre IV], on a, d'une part,

$$I = \int \int g(y)f(x)\phi(x + y)dx dy = \int \left[\int g(y)f(x)\phi(x + y)dx \right] dy = \int g(y) \left[\int f(x)\phi(x + y)dx \right] dy,$$

et donc, puisque x et y sont muettes,

$$I = \int g(x) \left[\int f(y)\phi(x + y)dy \right] dx. \quad (7.18)$$

D'autre part, dans (7.17), on fait le changement de variable $x = u$ et $y = v - u$. On admet qu'il est justifié et que $dx dy = du dv$. On a donc

$$I = \iint f(u)g(v - u)\phi(v)du dv,$$

et, d'après le théorème de Fubini, on a donc

$$I = \int \int f(u)g(v - u)\phi(v)du dv = \int \left[\int f(u)g(v - u)du \right] \phi(v)dv = \int (f * g)(v)\phi(v)dv = \int (f * g)(x)\phi(x)dx,$$

et bref, d'après (7.17) et (7.18)

$$\int g(x) \left[\int f(y)\phi(x + y)dy \right] dx = \int (f * g)(x)\phi(x)dx. \quad (7.19)$$

On sait que $f * g \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, d'après le théorème 6.16 page 92, on a identifié $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ à une partie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on a donc

$$\int (f * g)(x)\phi(x)dx = \langle f * g, \phi \rangle. \quad (7.20)$$

2. Parfois, elle est aussi notée

$$I = \int f(x)g(y)\phi(x + y)dx dy. \quad (7.16)$$

Pour x réel, considérons la translatée de ϕ par x , la fonction notée $\phi(\cdot + x)$ et définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (\phi(\cdot + x))(y) = \phi(y + x). \quad (7.21)$$

REMARQUE 7.6. Parfois, on note aussi $\tau_x(\phi) = \phi(\cdot + x)$.

La fonction $\phi(\cdot + x)$ appartient encore à $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ainsi, à x fixé, on peut écrire, en considérant $f \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\int f(y)\phi(x+y)dy = \int f(y)(\phi(\cdot + x))(y)dy$$

et donc

$$\int f(y)\phi(x+y)dy = \langle f, \phi(\cdot + x) \rangle. \quad (7.22)$$

Si f n'est plus une fonction, mais une distribution, la quantité $\langle f, \phi(\cdot + x) \rangle$ garde encore un sens et définit une fonction de x . Bref, compte tenu de (7.19), (7.20) et (7.22), on a

$$\langle f * g, \phi \rangle = \int g(x) \left[\int f(y)\phi(x+y)dy \right] dx = \int g(x) \langle f, \phi(\cdot + x) \rangle dx \quad (7.23)$$

Cette dernière quantité peut aussi s'interpréter comme l'action de la fonction (distribution) g sur la fonction $x \mapsto \langle f, \phi(\cdot + x) \rangle$:

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle g, \langle f, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle. \quad (7.24)$$

Cette égalité est valable pour tout fonction f, g dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous la prendrons comme *définition* du produit de convolution des deux distributions S et T :

$$\forall S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle S * T, \phi \rangle = \langle T, \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle. \quad (7.25)$$

dans la mesure où les quantités $\langle S, \phi(\cdot + x) \rangle$ et $\langle T, \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle$ sont définies ; il suffit donc que l'application $x \mapsto \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle$ soit dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Dans l'égalité (7.25), on rappelle que l'on fait d'abord agir la distribution S sur la fonction test : $x \mapsto \phi(\cdot + x)$, quantité qui dépend de x . On fait agir ensuite la distribution T sur la fonction $x \mapsto \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle$, qui est censée être dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

7.4.2. Définition du produit de convolution pour les distributions

Il est clair que l'application $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à ϕ associe $\langle T, \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle$ est linéaire (par linéarité de S et de T).

DÉFINITION 7.7. Soient S et T deux distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour x réel, la fonction notée $\phi(\cdot + x)$ et définie par (7.21) est notée $\phi(\cdot + x)$ et est appelée la translatée de ϕ par x . On suppose que la fonction $x \mapsto \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On suppose que l'application $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à ϕ associe $\langle T, \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle$ vérifie la condition (6.39). Alors, la distribution H définie³ par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle H, \phi \rangle = \langle T, \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle. \quad (7.26)$$

est appelée le produit de convolution⁴ de S et de T et est notée $S * T$.

3. C'est un abus de notation. Il faudra noter en théorie

$$\langle H, \phi \rangle = \langle T, x \mapsto \langle S, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle.$$

4. ou la convolution

REMARQUE 7.8. Notons que l'équation (7.23) permet d'écrire la relation (7.25) ou (7.26) sous une forme abusive suivante : on remplace la fonction $g \mapsto g(x)$ par la distribution $x \mapsto T_x$ et la fonction $f \mapsto f(y)$ par la distribution $y \mapsto S_y$, de sorte que par analogie avec l'intégrale double

$$\int g(x) \int f(y) \phi(x+y) dy dx,$$

on notera (7.25) ou (7.26) sous la forme

$$\forall S_y, T_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle S_y * T_x, \phi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \phi(x+y) \rangle \rangle. \quad (7.27)$$

Bien entendu, on a, par construction,

PROPOSITION 7.9. *Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, la convolution des fonctions f et g définit une distribution égale au à la convolution des deux distributions associées à f et g .*

7.4.3. Condition suffisante d'existence du produit de convolution pour les distributions

Les conditions d'existence du produit de convolution de deux distributions est une condition suffisante d'existence mais n'est pas nécessaire. Elle peut être affaiblie (voir [Bal91, chapitre 5], [Pet98, chapitre IV]).

Pour cela, définissons (en généralisant la définition 6.4 page 89) le support d'une distribution : dans cette définition, Ω est un ouvert quelconque de \mathbb{R} .

DÉFINITION 7.10. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- (1) Pour tout ouvert ω inclu dans Ω , T est dite nulle sur ω si et seulement si, pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est inclu dans ω , on a $\langle T, \phi \rangle = 0$.
- (2) Le support de T est le complémentaire dans Ω de la réunion des ouverts de Ω sur lesquels T est nulle.

Une définition équivalente est donnée par

DÉFINITION 7.11. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Un point x appartient au support de T si et seulement si pour toute boule ouverte B de centre x et incluse dans Ω , il existe une fonction test à support dans B telle que $\langle T, \phi \rangle$ soit non nul.

Par exemple, le support de la distribution associée à une fonction à support compact est ce support. Le support de δ_a est $\{a\}$.

Pour plus de détails, voir [Bal91, section II.2].

Dans ce cas, on a

PROPOSITION 7.12. *Le produit de convolution de distributions S et T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est défini si l'une des deux conditions suivante est assurée :*

- l'une au moins des deux distributions est à support borné ;
- S et T ont toutes deux des supports d'un seul même côté de 0 (par exemple, ils sont tous les deux inclus dans \mathbb{R}_+).

D'autres conditions suffisantes d'existence plus faibles pourraient être choisies.

On a aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 7.13. *Soient S et T deux distributions dont le produit de convolution existe. On a alors (en notant $\text{Supp}(T)$, le support de T)*

$$\text{Supp}(S * T) \subset \overline{\text{Supp}(S) + \text{Supp}(T)}. \quad (7.28)$$

DÉMONSTRATION. Voir [Lam08, Exercice 87, chapitre 7]. □

REMARQUE 7.14. On introduit parfois \mathcal{D}'_+ , l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans \mathbb{R}_+ . Par exemple si f est une fonction nulle sur \mathbb{R}_- et dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ou δ sont des éléments de \mathcal{D}'_+ . Pour plus de détails, voir [Kib01 ; Pet98]. Ainsi, d'après la proposition 7.12, $S * T$ est défini dès que S et T sont dans \mathcal{D}'_+ .

REMARQUE 7.15. D'après la proposition 7.13, on a de plus $S * T$ est dans \mathcal{D}'_+ dès que S et T sont dans \mathcal{D}'_+ .

7.4.4. Propriétés du produit de convolution

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les produits de convolutions évoqués existent.

PROPOSITION 7.16. Pour tout couple (S, T) de distributions tels que $S * T$ existe, $T * S$ existe et vérifie

$$S * T = T * S.$$

Si S est une distribution, si λ et μ sont deux réels et T_1 et T_2 sont deux distributions telles que $S * T_1$ et $S * T_2$ existent, alors $S * (\lambda T_1 + \mu T_2)$ existe et

$$S * (\lambda T_1 + \mu T_2) = \lambda S * T_1 + \mu S * T_2.$$

On peut définir le produit de convolutions de plusieurs distributions.

PROPOSITION 7.17. Pour définir le produit de n distributions, il suffit que l'une des conditions suivantes soit assurée :

- $n - 1$ distributions sont à support borné ;
- toutes les distributions ont leur support d'un seul même côté de 0 ;
- tous les produits de deux distributions existent.

Dans ce cas, le produit de n distributions est associatif et commutatif.

Une proposition fondamentale est la suivante (on rappelle la notation 6.23 page 94) :

PROPOSITION 7.18. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $\delta * T$ existe (donc $T * \delta$ existe et lui est égal) et on a

$$\delta * T = T. \tag{7.29}$$

DÉMONSTRATION. Formellement, en considérant que δ et T sont des fonctions et en utilisant l'abus (6.20), on aurait :

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta * T)(x) \phi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T(x-y) \delta(y) dy \right) \phi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \phi(x) dx, \\ &= \langle T, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Rigoureusement, mettons cette fois les mains dans le goudron ! Par définition et sous réserve d'existence :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta * T, \phi \rangle = \langle T, \langle \delta, \phi(\cdot + x) \rangle \rangle.$$

Or, on a, à x fixé,

$$\langle \delta, \phi(\cdot + x) \rangle = [\phi(\cdot + x)]_{y=0} = \phi(x),$$

et donc cela définit bien une fonction test et en utilisant l'abus de notation déjà signalé dans la note 3 page 110

$$\langle \delta * T, \phi \rangle = \langle T, \phi(x) \rangle = \langle T, \phi \rangle$$

□

On a de même

PROPOSITION 7.19. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $\delta' * T$ existe (donc $T * \delta'$ existe et lui est égal) et on a*

$$\delta' * T = T'. \quad (7.30)$$

DÉMONSTRATION. Par définition et sous réserve d'existence :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta' * T, \phi \rangle = \langle T, \langle \delta', \phi(\cdot + x) \rangle \rangle.$$

Or, on a, à x fixé,

$$\langle \delta', \phi(\cdot + x) \rangle = -\phi'(x),$$

et donc cela définit bien une fonction test et

$$\langle \delta' * T, \phi \rangle = -\langle T, \phi'(x) \rangle = -\langle T, \phi' \rangle = \langle T', \phi \rangle.$$

□

On conclue par la dernière proposition fondamentale :

PROPOSITION 7.20. *Pour tout couple de distributions (S, T) tel que $S * T$ existe, on a*

$$(S * T)' = S' * T = S * T'. \quad (7.31)$$

Ce résultat généralise naturellement, la proposition 7.2.

DÉMONSTRATION. Supposons que $S * T$ existe. D'après la proposition 7.19, sa dérivée est donc égale à $\delta' * (S * T)$:

$$\delta' * (S * T) = (S * T)'. \quad (7.32)$$

Chacun des produit $\delta' * S = S'$, $\delta' * T = T'$ et $S * T$ existent et donc d'après la proposition 7.17, $\delta' * (S * T)$ existe et par associativité :

$$\delta' * (S * T) = (\delta' * S) * T = S' * T. \quad (7.33)$$

On a aussi

$$\delta' * (S * T) = \delta' * (T * S) = (\delta' * T) * S = T' * S = S * T'$$

et donc

$$\delta' * (S * T) = S * T'. \quad (7.34)$$

On conclue grâce à (7.32), (7.33) et (7.34). □

On a de la même façon, pour toute distribution T

$$T'' = (T')' = (\delta' * T)' = (\delta')' * T = \delta'' * T,$$

et en dérivant n fois

$$T^{(n)} = \delta^{(n)} * T,$$

soit

PROPOSITION 7.21. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pour tout n entier, le produit $\delta^{(n)} * T$ existe (donc $T * \delta^{(n)}$ existe et lui est égal) et on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta^{(n)} * T = T^{(n)}. \quad (7.35)$$

REMARQUE 7.22. Si on note, pour toute distribution T , $T^{(0)} = T$, (7.35) est aussi valable pour $n = 0$.

On obtient alors comme pour la proposition 7.20 (preuve par récurrence),

PROPOSITION 7.23. *Pour tout couple de distributions (S, T) tel que $S * T$ existe, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (S * T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}. \quad (7.36)$$

Notons D l'opérateur différentiel à coefficients constants

$$D = \sum_i a_i \cdot^{(i)}, \quad (7.37)$$

c'est-à-dire, que pour toute distribution (ou fonction) T

$$DT = \sum_i a_i T^{(i)}. \quad (7.38)$$

Par linéarité, la proposition 7.23 donne donc

PROPOSITION 7.24. *Pour tout couple de distributions (S, T) tel que $S * T$ existe, on a*

$$D(S * T) = (DS) * T = S * (DT). \quad (7.39)$$

7.5. Exemples d'applications

7.5.1. Formule de Duhamel

Nous allons étudier une équation différentielle simple :

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad (7.40a)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = y_0, \quad (7.40b)$$

où a est un réel donné et montrer que sa solution est donnée par la formule de Duhamel :

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(u) e^{-a(t-u)} du. \quad (7.41)$$

Naturellement, cette formule peut se retrouver grâce à la méthode de la « variation de la constante » (voir par exemple [Bas11b, p. 81-82]). Mais, l'utilisation de la méthode présentée ci-dessus pourra être adaptée et étendue plus facilement à d'autres équations différentielles.

Remarquons, qu'en dérivant à la main (7.41), on a bien

$$y'(t) + ay(t) = y_0 (-ae^{-at} + ae^{-at}) + \left(f(t)e^{-a(t-t)} - a \int_0^t f(u) e^{-a(t-u)} du + a \int_0^t f(u) e^{-a(t-u)} du \right) = f(t).$$

On procède en différentes étapes. Nous verrons en même temps différentes techniques de résolution d'équations différentielles posées « au sens de distributions ».

Voir le récapitulatif de la section 7.5.3 page 120.

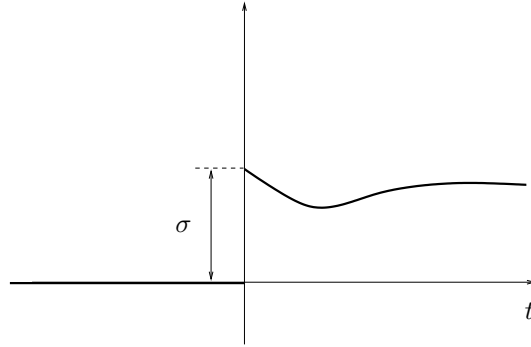
7.5.1.1. Détermination de « la réponse impulsionnelle ».

On cherche la solution de l'équation (7.40a) soumise à une impulsion, représentée par un dirac : on va chercher à résoudre (7.40a) au sens des distributions sur \mathbb{R} avec un second membre égal à δ et dont la solution est notée Y_0 , qui vérifie donc

$$(T_Y)' + aY = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (7.42)$$

Voir la figure 7.1. On suppose que Y_0 est une fonction, nulle sur \mathbb{R}_- (où il n'y a pas de second membre) et que sa restriction à \mathbb{R}_+ est dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$. En zéro, elle peut avoir des singularités éventuelles. Pour $t > 0$, il n'y a plus de second membre appliqué et il est raisonnable de considérer que la restriction à \mathbb{R}_+ de Y_0 a une dérivée dans L^2 . Ainsi, si $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ est borné, la restriction de Y_0 à Ω est dans $H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ (voir annexe P). Ainsi Y_0 est continue sur \mathbb{R}_+ . Posons $\sigma = Y_0(0+0) - Y_0(0-0)$. Puisque Y_0 est nulle pour $t < 0$, $Y_0(0-0) = 0$ et

$$Y_0(0+0) = \sigma. \quad (7.43)$$

FIGURE 7.1. La distribution-fonction Y_0 .

Puisque Y_0 appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution-fonction notée T_{Y_0} . On cherche donc à résoudre (7.42), que l'on pourra noter sous la forme abusive

$$Y' + aY = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (7.44)$$

Dérivons la distribution Y_0 grâce au lemme 6.42 page 101, ce qui est légitime car la restriction de Y_0 à \mathbb{R}_+ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, Y_0 admet une dérivée sur \mathbb{R}_+ et Y_0 est nulle sur \mathbb{R}_- :

$$T'_{Y_0} = Y'_0 + \sigma\delta. \quad (7.45)$$

On a donc, d'après (7.42),

$$Y'_0 + \sigma\delta + aY_0 = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

et donc

$$Y'_0 + aY_0 + (\sigma - 1)\delta = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (7.46)$$

On admet le lemme suivant (voir preuve du lemme général 8.2 page 123) :

LEMME 7.25. *S'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tels que*

$$A\delta + f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (7.47)$$

alors $A = 0$ et $f = 0$ (presque partout sur \mathbb{R}).

Si on applique cela à (7.46), on a donc

$$\sigma = 1, \quad (7.48a)$$

$$Y'_0 + aY_0 = 0, \text{ p.p. sur } \mathbb{R}. \quad (7.48b)$$

Sur \mathbb{R}_- , Y_0 est nulle et (7.48b) ne nous apprend rien ! En revanche, on a

$$Y'_0 = -aY_0, \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_+, \quad (7.49)$$

Puisque Y'_0 est C^0 et on montre par récurrence que Y_0 est C^∞ et donc (7.49) a lieu pour tout $t \geq 0$. On sait résoudre facilement cette équation différentielle et en utilisant (7.43) et (7.48), on a donc

$$\forall t \geq 0, \quad Y_0(t) = e^{-at}, \quad (7.50)$$

Bref, la restriction de la fonction Y_0 à \mathbb{R}_+^* est de classe C^∞ et est donnée par (7.50). La distribution-fonction Y_0 est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (7.51)$$

En physique, Y_0 est appelée fonction de Green, c'est-à-dire, la réponse impulsionnelle du problème (7.44). On réutilisera cette recherche en section 8.1 page 121.

REMARQUE 7.26. L'unicité de la réponse impulsionnelle est démontrée dans l'exercice de TD facultatif 8.6. On y montre que, de façon générale, la solution de l'équation différentielle (7.44) est donnée par

$$Y = Y_0 + ce^{-at}, \quad (7.52)$$

où Y_0 est donnée par (7.51) et c est un réel quelconque. L'une des hypothèses suivantes sur Y :

$$Y \text{ est nul en } 0-, \quad (7.53a)$$

$$Y \text{ a une limite nulle en } -\infty, \quad (7.53b)$$

où plus généralement (car la condition (7.53c) entraîne (7.53a) ou (7.53b)) :

$$Y \text{ est à support dans } \mathbb{R}_+ \quad (7.53c)$$

impose alors d'avoir $c = 0$. Très souvent, on se placera dans le cas de la dernière hypothèse (7.53c).

7.5.1.2. Convolution.

On considère maintenant l'équation différentielle

$$Y' + aY = F, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (7.54)$$

où F est donnée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- (1) Cherchons tout d'abord une solution particulière de (7.54). On considère l'opérateur différentiel à coefficient constant :

$$D = ' + a. \quad (7.55)$$

ce qui s'écrit aussi

$$Dv = v' + av. \quad (7.56)$$

Avec ces notations, la distribution Y_0 déterminée en section 7.5.1.1 définie par (7.51), dans le cas particulier $c = 0$, est la solution de

$$D(Y_0) = \delta. \quad (7.57)$$

Admettons que le produit de convolution $F * Y_0$ ait un sens, posons

$$Y = F * Y_0. \quad (7.58)$$

et calculons $D(Y)$. D'après la proposition 7.24 page 114 et les différentes propriétés vues en cours, on a donc

$$D(Y) = D(F * Y_0) = F * D(Y_0) = F * \delta,$$

puisque Y_0 est la solution de (7.44). Ainsi,

$$D(Y) = F, \quad (7.59)$$

ce qui traduit que Y est la solution de (7.54).

Pour retrouver cela à la main, on écrit successivement, d'après la proposition 7.20 page 113 et les différentes propriétés vues en cours,

$$\begin{aligned} Y' + aY &= (Y_0 * F)' + a(Y_0 * F), \\ &= Y_0' * F + aY_0 * F, \\ &= (Y_0' + aY_0) * F, \\ &= \delta * F, \\ &= F, \end{aligned}$$

ce qui traduit que Y est la solution de (7.54).

- (2) Cherchons maintenant toutes les solutions de (7.54). On utilise le principe habituel pour une équation différentielle linéaire : la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Voir par exemple [Bas19, chapitre 5]. En effet, supposons que Y_p soit la solution particulière Y définie ci-dessous, de (7.54). Soit maintenant Y une solution quelconque de (7.54). On a donc

$$\begin{aligned} Y_p' + aY_p &= F, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \\ Y' + aY &= F, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

et par différence, en posant $Z = Y - Y_p$,

$$Z' + aZ = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (7.60)$$

Ainsi, la solution Y est bien la somme de Y_p et de Z . Pour résoudre (7.60), on obtient le même résultat que pour les équations différentielles ordinaires de fonctions. Voir par exemple [Bas19, chapitre 5]. Pour montrer cela, on raisonne comme dans l'exercice de TD facultatif 8.6. On montre que Z est une distribution-fonction et nécessairement donnée par

$$Z(t) = ce^{-at}, \quad (7.61)$$

où c est un réel quelconque.

- (3) Bref, la solution de (7.54) est donnée par

$$Y = F * Y_0 + ce^{-at}, \quad (7.62)$$

où la distribution Y_0 est définie par (7.51).

REMARQUE 7.27. Si on fait de nouveau l'une des hypothèses (7.53) en supposant de plus que

$$F \text{ est à support dans } \mathbb{R}_+, \quad (7.63)$$

alors

$$Y = F * Y_0. \quad (7.64)$$

Bref, dans ce cas, retenons que *pour résoudre le problème différentiel $D(Y) = F$ il suffit de calculer le produit de convolution $F * Y_0$ où F est le second membre et Y_0 est la réponse impulsionnelle du problème différentiel $D(Y_0) = \delta$.*

Montrons rapidement (7.64). Le support de Y_0 définie par (7.51) est \mathbb{R}_+ , comme celui de F . Ainsi, d'après la proposition 7.13, le support de $F * Y_0$ est donc inclus dans \mathbb{R}_+ . Pour que le support de Y définie par (7.62), il faut et il suffit d'avoir $c = 0$.

Cette méthode, dite méthode par convolution ou par fonction de Green sera systématisée en section 8.3

7.5.1.3. Retour au problème initial.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à écrire le problème initial (7.40) sous la forme (7.54). On suppose que y est nulle sur \mathbb{R}_- et on cherche encore la distribution fonction T_y associée à y . En raisonnant exactement comme précédemment (section 7.5.1.1) et en utilisant de nouveau le lemme 6.42 page 101, on a

$$T_y' = y' + y(0)\delta.$$

On a donc, d'après (7.40a),

$$T_y' + aT_y = \tilde{f} + y(0)\delta,$$

\tilde{f} est définie par la notation 7.4. Ainsi, la distribution y est solution de (7.54) avec

$$F = y(0)\delta + \tilde{f} \quad (7.65)$$

Il ne reste plus qu'à calculer, d'après (7.62)

$$T_y = F * Y_0 + ce^{-at} = (y(0)\delta + \tilde{f}) * Y_0 + ce^{-at},$$

où c est un réel quelconque, soit

$$T_y = (y(0)\delta + \tilde{f}) * Y_0 + ce^{-at},$$

et donc

$$T_y = y(0)Y_0 + (\tilde{f}) * Y_0 + ce^{-at}, \quad (7.66)$$

Si le produit de convolution $(\tilde{f}) * Y_0$ est une fonction définie, on a donc, en particulier,

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = y(0)Y_0(t) + ((\tilde{f}) * Y_0)(t) + ce^{-at},$$

où Y_0 est donné par (7.51). On a donc l'équation équivalente

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = y(0)e^{-at} + (\tilde{Y}_0) * (\tilde{f})(t) + ce^{-at}. \quad (7.67)$$

Si on applique enfin, le lemme 7.5, on constate qu'en supposant f dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, alors $\tilde{Y}_0 * \tilde{f}$ existe et sa restriction à \mathbb{R}_+ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et est donné par (7.12). Bref,

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = y_0e^{-at} + \int_0^t f(u)e^{-a(t-u)}du + ce^{-at},$$

soit encore, compte tenu de $y(0) = y_0$ qui implique la nullité de c ,

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = y_0e^{-at} + \int_0^t f(u)e^{-a(t-u)}du, \quad (7.68)$$

ce qui est exactement (7.41).

On peut vérifier *a posteriori* que si f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, alors y appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Si f appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$, il en est de même pour y . Puisque $e^{-a \cdot}$ est de classe C^∞ , si f est continu, alors y est dérivable et même de classe C^1 . On justifie de l'existence du produit de convolution $F * Y_0$.

REMARQUE 7.28. Cette méthode peut-être généralisée. Il est intéressant de constater que l'on passe par les distributions puis que l'on en sort en revenant aux fonctions! Néanmoins, ce détours par les distributions est nécessaire; en effet, outre la proposition 7.24, le résultat essentiel utilisé est que $T * \delta = T$, pour toute distribution. Ainsi, δ est l'élément unité de la multiplication $*$! Cet élément n'est fondamentalement pas une fonction et l'écriture correcte des distributions était donc nécessaire pour justifier ce calcul!

Notons aussi que, quand on détermine la solution d'une équation différentielle au sens des distributions, on n'a pas besoin de conditions initiales (valeur en 0), contrairement à la résolution d'une équation différentielle au sens des fonctions.

7.5.1.4. Autres méthodes de résolution des sections 7.5.1.1, 7.5.1.2 et 7.5.1.3.

Cette méthode alternative, plus générale, n'est pas rédigée ici. Voir l'exercice de TD facultatif 8.6.

7.5.2. Application à un circuit électrique

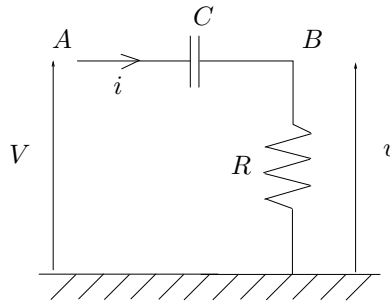


FIGURE 7.2. Le circuit dérivateur.

On étudie le circuit dérivateur représenté sur la figure 7.2 On pose $V = V_A$, $v = V_B$. En éliminant i entre

$$\begin{aligned} q &= C(V - v), \\ v &= Ri, \\ i &= \dot{q}, \end{aligned}$$

on obtient

$$v = Ri = RC(\dot{V} - \dot{v}),$$

et donc

$$\forall t, \quad \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \dot{V}(t), \quad (7.69)$$

où

$$\tau = RC. \quad (7.70)$$

On suppose que pour $t \leq 0$, toutes les tensions sont nulles. On a donc, en particulier,

$$\forall t \leq 0, \quad v(t) = V(t) = 0. \quad (7.71)$$

Appliquons maintenant la méthode de la section 7.5.1 avec $a = 1/\tau$ pour déterminer la solution de (7.69). On fait l'hypothèse (7.53c) et donc la réponse impulsionnelle est donnée par (7.51), c'est-à-dire ici,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (7.72)$$

On suppose maintenant que l'on étudie l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \dot{y} + \frac{y}{\tau} = W, \quad (7.73)$$

où

$$W = \dot{V}. \quad (7.74)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule (7.62) qui donne ici

$$T = W * Y_0 + ce^{-t/\tau} = (\dot{V} * Y_0) + ce^{-t/\tau} = (V * Y_0)' + ce^{-t/\tau} = (V * T_{Y_0})' + ce^{-t/\tau} = V * T'_{Y_0} + ce^{-t/\tau},$$

Or, on a, au sens des distributions, d'après (7.51),

$$T'_{Y_0} = \delta + Y_0',$$

et donc

$$T = V * (\delta + Y_0') + ce^{-t/\tau} = V + V * Y_0' + ce^{-t/\tau}.$$

Pour les instants positifs, on a donc

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = V(t) + (V * \tilde{Y}'_0)(t) + ce^{-t/\tau}.$$

où Y_0 est donnée par (7.72). Bref, on a

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = V(t) + (V * \tilde{Y}'_0)(t) + ce^{-t/\tau}. \quad (7.75)$$

Si v est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on a, d'après le lemme (7.5),

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = V(t) + \int_0^t V(u)(-1/\tau)e^{-(t-u)/\tau} du + ce^{-t/\tau}.$$

De plus la condition initiale $v(0) = 0$ impose $c = 0$ et donc

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = V(t) - \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \int_0^t V(u)e^{u/\tau} du. \quad (7.76)$$

Dans le cas général, si V est continu, on $y(0+0) = v(0)$ et donc y est discontinu.

Si par exemple, on a $V(t) = 1$, alors

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \int_0^t e^{u/\tau} du = 1 - e^{-t/\tau} [e^{u/\tau}] = 1 - e^{-t/\tau} [e^{t/\tau} - 1] = 1 - 1 + e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}.$$

On retrouve donc la réponse impulsionnelle donnée par (7.72), qui correspond bien à $v = \dot{H} = \delta!$

7.5.3. Récapitulatif des différents résultats obtenus

Soit a est un réel donné.

On admettra que les résultats donné dans la section 7.5.1 sont uniques.

- (1) L'équation différentielle suivante, au sens des fonctions,

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad (7.77a)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = y_0., \quad (7.77b)$$

admet une solution unique (qui est une fonction) donnée par

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(u) e^{-a(t-u)} du. \quad (7.78)$$

La régularité de y dépend de celle de f . Si, par exemple, f est continue, y est de classe C^1 .

- (2) L'équation différentielle suivante, au sens des distributions,

$$Y_0' + aY_0 = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (7.79)$$

(sans condition initiale) admet une solution (qui est une distribution-fonction) donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = ce^{-at} + \begin{cases} e^{-at}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad (7.80)$$

où c est un réel dans le cas général, et sous l'une des hypothèses (7.53), cette solution est unique et est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (7.81)$$

Cette solution est appelée « réponse impulsionnelle ». La restriction de la distribution-fonction Y_0 à \mathbb{R}_+^* est classe C^∞ . La distribution-fonction Y_0 est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ et discontinue en zéro.

- (3) L'équation différentielle suivante, au sens des distributions,

$$Y' + aY = F, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (7.82)$$

(sans condition initiale) où F est donnée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ admet une solution (qui est une distribution) donnée par

$$Y = F * Y_0 + ce^{-at}, \quad (7.83)$$

où c est un réel dans le cas général, et sous l'une des hypothèses (7.53), cette solution est unique et est donnée par

$$Y = F * Y_0, \quad (7.84)$$

où Y_0 est définie par (7.81). Cette distribution existe si $F * Y_0$ a un sens, ce qui est vrai, par exemple, si le support de la distribution F est inclus dans \mathbb{R}_+ . Selon la nature de F , Y_0 peut être une distribution-fonction ou non.

Applications des distributions

8.1. Considération de choc en mécanique

Cette section s'inspire de [Pet98, p. 41 et 50–53]. On considère un point matériel de masse $m = 1$, soumis à un ressort linéaire de raideur k noté ici a et à un amortissement visqueux c , noté ici b , dont le mouvement est donc gouverné par l'équation différentielle

$$\forall t, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = f(t), \quad (8.1)$$

où f est l'unique force extérieure appliquée. Si le solide est initialement au repos et que l'on commence appliquer une force f continue à partir de $t = 0$, la fonction x étant de classe C^2 , $x(0)$ et $x'(0)$ sont nuls. Il est des cas où si on applique une force f non continue, on peut avoir une discontinuité de la vitesse initiale.

Si on suppose que le solide est initialement au repos et qu'on le soumet à un choc, appelé percussion, souvent considérée comme une grandeur infiniment grande appliquée sur un intervalle infiniment petit (autour de zéro, par exemple). Le bon cadre est celui des distribution, de prendre $f = F\delta$ et de considérer (8.1) au sens des distributions sur \mathbb{R}

$$x'' + ax + bx' = F\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (8.2)$$

où F est une constante. On cherche donc la réponse impulsionnelle, comme on a déjà fait en section 7.5.1.1 page 114. On suppose que x est une fonction, nulle sur \mathbb{R}_- et dont la restriction à \mathbb{R}_+ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. En zéro, elle peut avoir des singularités éventuelles. Pour $t > 0$, il n'y a plus de force appliquée et il est raisonnable de considérer que la restriction à \mathbb{R}_+ de x a des dérivées et des dérivées seconde dans L^2 . Ainsi, si $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ est borné, la restriction de x à K est dans $H^2(K) \subset C^1(K)$ (voir annexe P). On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (8.3a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x'(t) = x'_0 \in \mathbb{R}. \quad (8.3b)$$

Puisque le solide est au repos pour $t < 0$, on donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = 0, \quad (8.4a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x'(t) = 0. \quad (8.4b)$$

On considère donc les sauts σ et σ' de x en zéro

$$\sigma = x_0, \quad (8.5a)$$

$$\sigma' = x'_0. \quad (8.5b)$$

Puisque x appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution-fonction notée T_x . On considère donc, d'après (8.2), que T_x est solution de

$$T_x'' + aT_x + bT_x' = F\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (8.6)$$

que l'on pourra noter abusivement sous la forme

$$x'' + ax + bx' = F\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (8.7)$$

On refait maintenant des calculs identiques à ceux faits en section 7.5.1.1 page 114. Dérivons la distribution T_x grâce au lemme 6.42 page 101, ce qui est légitime car la restriction de x à \mathbb{R}_+^* est de classe C^1 et x est nulle sur \mathbb{R}_-

$$T'_x = x' + \sigma\delta. \quad (8.8)$$

On applique cette fois-ci le lemme 6.42 page 101 à x' ce qui est légitime car les restrictions de x' à tout borné $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ est dans $H^1(\Omega)$:

$$T''_x = x'' + \sigma'\delta + \sigma\delta'. \quad (8.9)$$

Ainsi, (8.8) et (8.9), donnent

$$T''_x + aT_x + bT'_x = x'' + \sigma'\delta + \sigma\delta' + ax + bx' + b\sigma\delta$$

et donc

$$T''_x + aT_x + bT'_x = (x'' + ax + bx') + (\sigma' + b\sigma)\delta + \sigma\delta'. \quad (8.10)$$

Ainsi, (8.6) donne

$$(x'' + ax + bx') + (\sigma' + b\sigma - F)\delta + \sigma\delta' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (8.11)$$

On admet le lemme suivant qui généralise le lemme 7.25 page 115 et qui constitue un cas particulier du lemme 8.2 page ci-contre :

LEMME 8.1. *S'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tels que*

$$A\delta + B\delta' + f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (8.12)$$

alors $A = B = 0$ et $f = 0$ (presque partout sur \mathbb{R}).

Si on applique cela à (8.11), on a donc

$$\sigma = 0, \quad (8.13a)$$

$$\sigma' + b\sigma - F = 0, \quad (8.13b)$$

$$x'' + ax + bx' = 0, \text{ p.p. sur } \mathbb{R}. \quad (8.13c)$$

On a donc

$$\sigma = 0, \quad (8.14a)$$

$$F = \sigma'. \quad (8.14b)$$

De plus l'égalité (8.13c) nous montre que, en particulier,

$$x'' = -ax - bx' \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_+, \quad (8.15)$$

Puisque x' est C^0 , alors x'' est C^0 et on montre par récurrence que la restriction de x à \mathbb{R}_+ est C^∞ et (8.15) a lieu pour tout $t \geq 0$. Bref, on se donne x , nulle sur \mathbb{R}_+ , dont la restriction à \mathbb{R}_+ est C^∞ , continue en zéro, admettant un saut de dérivée σ' en zéro. On impose un dirac $\sigma'\delta$. La fonction x vérifie alors l'équation différentielle

$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = 0, \quad (8.16a)$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = 0, \quad (8.16b)$$

$$x'(0) = \sigma', \quad (8.16c)$$

équation que l'on sait résoudre facilement en utilisant par exemple les transformée de Laplace (voir cours de OMI2) ou sous matlab symbolique.

On consultera les exercices 8.2, 8.3 ou 2.2 des TD où l'on étudie une situation analogue ou l'exercice 2.1 des TP on l'ou étudiera l'équation différentielle (8.2).

8.2. Un petit lemme technique

LEMME 8.2. Soient $m \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{0 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si

$$\sum_{i=0}^m a_i \delta^{(i)} + f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (8.17)$$

alors, pour tout i , a_i est nul et f est presque partout nulle sur \mathbb{R} .

On démontre tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 8.3. Soient $m \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{0 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si (8.17) a lieu, alors f est presque partout nulle sur \mathbb{R} .

DÉMONSTRATION. Comme dans la preuve du lemme 6.24, on se restreint à des fonctions tests ϕ nulle en dehors d'un ouvert $\tilde{\Omega}$ (inclus dans \mathbb{R}) et ne contenant pas a . On a donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$,

$$\left\langle \sum_{i=0}^m a_i \delta^{(i)}, \phi \right\rangle + \langle f|_{\tilde{\Omega}}, \phi \rangle = 0, \quad (8.18)$$

soit, puisque f est localement intégrable,

$$0 = \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i \phi^{(i)}(0) + \int_{\tilde{\Omega}} f(x) \phi(x) dx = \int_{\tilde{\Omega}} f(x) \phi(x) dx,$$

puisque a n'appartient pas à $\tilde{\Omega}$. comme dans la preuve du lemme 6.24, on en déduit que f est presque partout nulle sur \mathbb{R} . \square

DÉMONSTRATION DU LEMME 8.3. D'après le lemme 8.3, l'hypothèse (8.17) implique donc que f est presque partout nulle et ainsi

$$\sum_{i=0}^m a_i \delta^{(i)} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (8.19)$$

ce qui implique

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \delta^{(i-1)} + a_0 H \right)' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

puisque $H' = \delta$. D'après la proposition 6.44 page 102, on en déduit qu'il existe une constante k telle que

$$\sum_{i=1}^m a_i \delta^{(i-1)} + a_0 H - k = 0. \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (8.20)$$

De nouveau le lemme 8.2 nous apprend que $a_0 H - k$ est presque partout nulle. Par continuité, cette fonction est donc nulle sur \mathbb{R}^* . Compte tenu des valeurs de H , la nullité sur \mathbb{R}^*_+ implique que $a_0 - k = 0$ et la nullité sur \mathbb{R}^*_- implique que $k = 0$, ce qui ne peut avoir lieu que si a_0 et k sont nuls. On a donc, d'après (8.20)

$$a_0 = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1} \delta^{(i)} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (8.21)$$

On a donc montré que (8.19) implique (8.21). Par récurrence, on montre donc que $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1}$ et $a_m \delta = 0$, ce qui implique $a_m = 0$. Puisque f est nulle, on a donc montré le résultat. \square

8.3. Fonctions de Green : résolution d'équations différentielles par la convolution

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants, méthode qui a été vue en section 7.5.1 (méthode de convolution). On pourrait systématiser ce qui a été vu dans la section 7.5.1 en utilisant notamment le résultat de la proposition 7.24.

On renvoie pour plus de détails à [Pet98, p. 79 à 83] ou à

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Green

<http://mpej.unige.ch/~kunz/lectures/green.pdf>

http://houchmandzadeh.net/cours/Math/chap_GreenFunction.pdf

8.4. Transformation de Laplace des distributions et applications

Non traitée actuellement.

8.5. Formulations faibles ou énergétiques

Nous allons étudier dans cette sections quatre problèmes classiques en mécanique, traduits par une équation différentielle et qui fait intervenir la dérivée usuelle bien connue des fonctions. Nous montrons que cette équation différentielle peut être avantageusement vue au sens de distributions et que vision permet de :

- donner un sens plus général au problème étudié, en permettant notamment de considérer des chargements plus généraux (notamment la présence de forces ponctuelles qu'interdit la formulation usuelle).
- fournir l'existence et l'unicité du problème posés.
- donner un cadre dans lequel une approximation numérique peut être envisagée et qui est à la base de la théorie des éléments finis, qu'il est impossible d'ignorer pour un ingénieur mécanicien digne de ce nom !

Nous verrons ensuite en section 8.5.5 que la formulation faible n'est qu'une formulation énergétique, tout à fait identique au théorème des travaux virtuels qui vous connaissez (ou apprendrez). De même, dans le cas particulier de la poutre en flexion étudiée en section 6.2, nous verrons que la formulation faible introduite permet de retrouver deux théorèmes classiques de la RDM : le théorème de Castigliano et celui de la force unitaire.

Nous montrerons quelques illustrations de simulations effectivement réalisées, s'appuyant sur toute cette théorie.

On pourra consulter pour plus de détails

- [Sal11] présentation concise mais complète de la méthode des élément finis ; Comme le dit lui-même l'auteur : "Les étudiants n'étant pas familiers avec les notions de base de l'analyse fonctionnelle, [l'auteur a] préféré éviter toute sophistication qu'induirait inévitablement l'introduction des espaces de Sobolev. Pour simplifier la formulation variationnelle des EDP est présentée comme une méthode permettant d'affaiblir les hypothèses sur la solution en considérant des fonctions continues et C^1 par morceaux plutôt que des fonctions de classe C^1 . L'inconvénient majeur de cette approche est l'absence de théorèmes assurant l'existence et l'unicité des solutions comme le ferait le théorème de Lax-Milgram. Ainsi, l'existence d'une solution est toujours postulée".
- [Roy05, chap. 6], très pédagogique, il part d'un exemple monodimensionnel très simple sur lequel il montre le traitement complet par formulation faible puis par éléments finis avant de refaire la même démarche sur le problème complet de l'élasticité linéaire ;
- [RT92] beaucoup plus matheux que la référence précédente, il donne les bases des formulations faibles et leur discrétisations pour différents problèmes ;
- [Duv90, chap. 6] le traitement complet des différents types de problèmes de l'élasticité linéaire.

Naturellement, cette partie n'est qu'une toute petite introduction et n'a pour but de se supplanter aux enseignements que vous recevrez en mécanique sur les éléments finis, mais au contraire de renforcer votre connaissance de ce problème, par une vision un peu plus théorique!

REMARQUE 8.4. Notons aussi qu'au cours de votre formation, vous avez peut-être appris d'autres méthodes que les éléments finis pour approcher numériquement certains problèmes, par exemple, celles des différences finies. Par exemple, si on discrétise le problème de la section 8.5.1, en prenant une corde fixée à ses deux extrémités, le problème discret obtenu par éléments finis est le même que celui obtenu par une simple discrétisation spatiale du laplacien en monodimensionnel, à la base du schéma aux différences finies. Ne rejettons pas pour autant les formulations faibles! D'une part, une force ponctuelle, modélisée par un dirac ne peut être prise directement en compte par les différences finies. D'autre part, pour d'autres conditions aux limites (notamment en dérivées comme dans le cas traité), ce schéma aux différences finies n'est pas aussi performant.

8.5.1. La corde sur fondation élastique

8.5.1.1. Principe.

Cette partie reprend l'exemple de la corde sur fondation élastique [Roy05, chap. 6, p. 273–287].

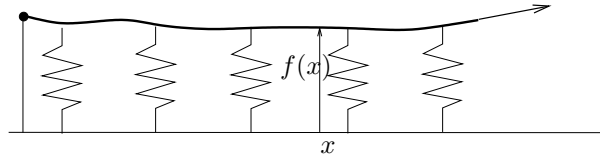


FIGURE 8.1. La corde sur fondation élastique.

Cette corde est fixée à son extrémité gauche $x = 0$, tandis que son extrémité droite $x = L$ est soumise à une tension T inclinée d'un angle par rapport à l'horizontale donné par $\tan \theta = \lambda$ où λ est un réel donné. Elle est soumise à une densité linéique de force g connue (voir figure 8.1). On adimensionne en posant $k = T = 1$ de sorte que l'on cherche $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in [0, L], \quad -f''(x) + f(x) = g(x), \quad (8.22a)$$

avec les conditions aux limites

$$f(0) = 0, \quad (8.22b)$$

$$f'(L) = \lambda. \quad (8.22c)$$

Attention, les notations ne sont pas exactement celles de [Roy05, chap. 6, p. 273–287], mais le problème est le même! Dans (8.22), la fonction g est supposée continue, donc f doit être C^2 .

- (1) Posons $\Omega =]0, L[$. On part de la formulation (8.22a) que l'on multiplie par une fonction u et que l'on intègre sur $[0, L]$. On supposera pour cela que f est dans $H^2(\Omega)$ et g et u sont dans $L^2(\Omega)$. On obtient donc

$$-\int_0^L f''(x)u(x)dx + \int_0^L f(x)u(x)dx = \int_0^L g(x)u(x)dx. \quad (8.23)$$

Si u est dérivable, de dérivée dans L^2 , une intégration par partie donne

$$-\int_0^L f''(x)u(x)dx = \int_0^L f'(x)u'(x)dx - [f'u]_0^L,$$

ce qui donne

$$-\int_0^L f''(x)u(x)dx = \int_0^L f'(x)u'(x)dx - f'(L)u(L) + f'(0)u(0), \quad (8.24)$$

et donc avec (8.22c) et (8.23), on obtient finalement

$$\int_0^L f'(x)u'(x)dx - \lambda u(L) + f'(0)u(0) + \int_0^L f(x)u(x)dx = \int_0^L g(x)u(x)dx.$$

On impose la condition suivante sur u :

$$u(0) = 0, \quad (8.25)$$

de sorte que

$$\int_0^L f'(x)u'(x)dx + \int_0^L f(x)u(x)dx = \lambda u(L) + \int_0^L g(x)u(x)dx. \quad (8.26)$$

Cette formulation est dite faible : on a besoin de moins d'hypothèse de régularité sur f *a priori* : il suffit que f' existe et soit dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire, f dans $H^1(\Omega)$ (voir annexe P). Dans ce cas, f est continue et $f(0)$ a un sens. On imposera la condition (8.22b) à f :

$$f(0) = 0. \quad (8.27)$$

Pour que les intégrales $\int_0^L f(x)u(x)dx$ et $\int_0^L f'(x)u'(x)dx$ existent, on imposera aussi à u d'être dans $H^1(\Omega)$. Puisque (8.25) a lieu, on imposera donc à u d'appartenir à l'espace V défini par

$$V = \{u \in H^1(\Omega), \quad u(0) = 0\}. \quad (8.28)$$

Bref, on a montré que si (8.22) a lieu, alors, pour tout $u \in V$, on a (8.26). On peut affaiblir cela et n'imposer à f son appartenance à V (assurant ainsi (8.27)).

Finalement, on considère V défini par (8.28), on définit a et \mathcal{L} par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^L u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx, \quad (8.29a)$$

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{L}(v) = \lambda v(L) + \int_0^L g(x)v(x)dx. \quad (8.29b)$$

f est cherchée sous la forme de la formulation faible suivante :

$$f \in V \text{ et } \forall u \in V, \quad a(f, u) = \mathcal{L}(u). \quad (8.30)$$

REMARQUE 8.5. On a donc remplacé la formulation forte (8.22) (équation différentielle exigeant que f'' existe) par la formulation faible (8.30) (forme intégrale exigeant que f' soit intégrable).

La condition au bord (8.22b) a été intégrée dans la formulation faible (8.30), tandis que la condition au bord (8.22c) a apparemment disparu !

Cette formulation faible est en fait un théorème des travaux virtuels, bien connu en mécanique !

- (2) Le résultat Q.1 de l'annexe Q permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (8.30). On admettra que a et l satisfont les hypothèses du lemme Q.1.

En effet, ce problème est un cas particulier de (Q.5) et admet donc une unique solution d'après le lemme Q.1 page 269. Ici, a et \mathcal{L} sont définie par (8.29). Les hypothèses du lemme Q.1 sont vérifiées :

— On munit H^1 de son produit scalaire usuel, donné par

$$\langle u, v \rangle = \int_0^L u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx. \quad (8.31)$$

L'espace V est un sous-espace fermé de $H^1(0, L)$ comme noyau de l'application $\Phi : H^1(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Phi(v) = v(0)$, ce qui montre que V est un espace complet (voir preuve complète par exemple dans [Roy05, p. 276–277]).

— a est coercive et bilinéaire, car c'est exactement le produit scalaire de V !

— On vérifie que \mathcal{L} est continue.

◇

- (3) Il reste maintenant à montrer que, réciproquement, la formulation faible (8.30) entraîne la formulation forte (8.22).

- (a) La condition au limite (8.22b) a lieu puisque f est choisie dans V , qui l'impose !
 (b) Soit ϕ une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$, ensemble inclus dans V . Ainsi, (8.30) appliqué à $u = \phi$ a lieu et donc puisque $\phi(L) = 0$

$$\int_0^L f'(x)\phi'(x) + f(x)\phi(x)dx = \lambda\phi(L) + \int_0^L g(x)\phi(x)dx = \int_0^L g(x)\phi(x)dx,$$

que l'on peut réécrire (puisque f et g sont dans $L^2(\Omega)$)

$$\langle f', \phi' \rangle + \langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle,$$

soit encore

$$-\langle f'', \phi \rangle + \langle f, \phi \rangle - \langle g, \phi \rangle = 0.$$

On a donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -f'' + f - g, \phi \rangle = 0, \quad (8.32)$$

ce qui traduit exactement que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad -f'' + f = g. \quad (8.33)$$

Si g et f sont dans $L^2(\Omega)$, alors, d'après (8.33), $f'' = f - g$ est dans $L^2(\Omega)$ et donc f est dans $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$-f''(x) + f(x) = g(x), \quad \text{p.p. sur } \Omega. \quad (8.34)$$

On est donc remonté à la formulation forte (8.22a), valable seulement presque partout et non partout.

- (c) Il reste à montrer que (8.22c) a lieu. Notons que f étant dans $H^2(\Omega)$, f' est continue et $f'(L)$ a bien un sens. On reprend la formulation (8.30) :

$$\forall v \in V, \quad \int_0^L f'(x)v'(x) + f(x)v(x)dx = \lambda v(L) + \int_0^L g(x)v(x)dx. \quad (8.35)$$

Si on utilise de nouveau (8.24) « à l'envers », on a donc :

$$\int_0^L f'(x)v'(x)dx = - \int_0^L f''(x)v(x)dx + f'(L)v(L) - f'(0)v(0) = - \int_0^L f''(x)v(x)dx + f'(L)v(L),$$

et (8.35) donne donc

$$\forall v \in V, \quad - \int_0^L f''(x)v(x)dx + f'(L)v(L) + \int_0^L f(x)v(x)dx = \lambda v(L) + \int_0^L g(x)v(x)dx.$$

soit

$$\forall v \in V, \quad \int_0^L (-f''(x) + f(x) - g(x))v(x)dx = (-f'(L) + \lambda)v(L).$$

De (8.34), on tire donc

$$\forall v \in V, \quad (-f'(L) + \lambda)v(L) = 0.$$

Si on choisit $v \in V$ tel que $v(L) \neq 0$ (dont on admet que c'est loisible), on a donc

$$f'(L) = \lambda$$

et on retrouve (8.22c).

Ce problème constitue le problème modèle de l'équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites et qui sera généralisé au cours de la section 8.5.4.

On peut aussi vérifier que, grâce à cette formulation faible, on peut donner un sens plus général à (8.22a) en ne supposant plus que g est dans $L^2(0, L)$. On peut aussi le supposer égal à δ_l où $l \in]0, L[$ pour modéliser une force ponctuelle de norme G (exactement comme dans la section 6.2). La formulation faible (8.30) s'obtiendrait de la même façon en considérant (8.22a) valable dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ en remplaçant g par $G\delta_l$ et en l'appliquant formellement à $u \in V$: on aurait la formulation faible (ou variationnelle) est la suivante : On cherche f appartenant à V telle que

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L f'(x)u'(x) + f(x)u(x)dx = \lambda u(L) + Gu(l). \quad (8.36)$$

On consultera l'exercice 8.5 des TD où l'on étudie une situation analogue

Nous donnons maintenant une très rapide introduction à la méthodes des éléments finis.

8.5.1.2. Très très très rapide introduction à la méthodes des éléments finis.

Considérons le problème (8.30) que l'on « remplace » par le problème suivant : on cherche V_h un espace de dimension finie inclus dans V et on cherche f_h vérifiant

$$f_h \in V_h \text{ et } \forall u_h \in V_h, \quad a(f_h, u_h) = \mathcal{L}(u_h). \quad (8.37)$$

Remarquons que (8.30) implique en particulier

$$\forall u_h \in V_h, \quad a(f, u_h) = \mathcal{L}(u_h), \quad (8.38)$$

et par différence avec (8.37), on obtient donc

$$f_h \in V_h \text{ et } \forall u_h \in V_h, \quad a(f_h - f, u_h) = 0. \quad (8.39)$$

On a vu (dans (8.31)) que a peut être considéré comme le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de V , ainsi on peut réécrire (8.39) sous la forme

$$f_h \in V_h \text{ et } \forall u_h \in V_h, \quad \langle f_h - f, u_h \rangle = 0. \quad (8.40)$$

Autrement dit, $f - f_h$ est orthogonal à tous les éléments de u_h , donc f_h est la projection orthogonale de f sur

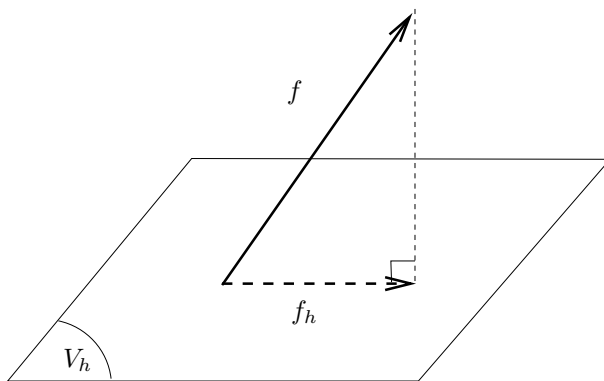


FIGURE 8.2. f_h est la projection orthogonale de f sur V_h

V_h (voir figure 8.2). Quand h tend vers 0, la dimension de V_h tend vers l'infini et V_h « tend » vers V autrement dit f_h tend vers f . L'approximation élément fini f_h de f tend donc vers f .

La mise en œuvre de la recherche de l'espace V_h constitue une étape de la discrétisation par éléments finis.

La résolution du problème approché (8.37) se fait par l'intermédiaire d'un système linéaire. On pourra par exemple consulter l'exemple très pédagogique déjà cité [Roy05, chap. 6, p. 278–287].

8.5.2. Une poutre encastree-libre, chargée

Reprenons le problème de la poutre encastree à gauche, libre à droite et soumise à une densité linéaire d'effort tranchant p , gouvernée donc par les équations données dans l'annexe M.

8.5.2.1. Reprises des calculs précédents.

Un peu de recul permet de comprendre, une fois les distributions digérées, que les problèmes rencontrés lors du chapitre ne sont plus des problèmes.

Reprenons rapidement les calculs menés au cours de la section 6.2 (et dans l'annexe M). L'équation (6.26) est à prendre au sens des distributions, c'est-à-dire ici avec $\Omega =]0, L[$

$$v^{(4)} = \frac{F\delta_{L/2}}{EI}, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (8.41)$$

On rappelle (!) que

$$(H(\cdot - L/2) - 1)' = \delta_{L/2}, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (8.42)$$

Si on définit la fonction v comme (6.6), le résultat déterminé à la main, on vérifie successivement que, grâce à (6.7), (6.8), (6.9) et (6.10),

- $v^{(3)}$, égale à $F(H(\cdot - L/2) - 1)/(EI)$, est une fonction de $L^2(0, L)$, constante par morceau, discontinue en $L/2$;
- sa dérivée, $v^{(4)}$, donnée par (8.41) égale à $F(\delta_{L/2})/(EI)$, n'est pas une fonction de $L^2(0, L)$, mais une distribution;
- la fonction v'' est affine par morceaux, continue et dans $H^1(0, L)$.
- la fonction v' est de classe C^1 et dans $H^2(0, L)$.
- la fonction v est de classe C^2 et dans $H^3(0, L)$.

Toutes les équations de l'équilibre local (M.3) sont vraies au sens des distributions et ont lieu, de plus, partout où les fonctions peuvent être dérivées usuellement, c'est-à-dire, sur $[0, L] \setminus \{L/2\}$. De plus, (M.4) est bien vérifiée.

De façon plus générale, on peut donc introduire une densité linéaire de charge verticale p de la forme

$$p = q + \sum_k F_k \delta_{x_k}, \quad (8.43)$$

où q est une densité régulière (dans $L^2(0, L)$) qui est une vraie fonction et pour tout k , $F_k \delta_{x_k}$ représente une force ponctuelle $F_k \vec{k}$ appliquée en x_k . Ainsi p est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On considère donc le problème défini par : chercher v telle que ($\Omega =]0, L[$)

$$\frac{dT}{dx} + p = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (8.44a)$$

$$\frac{dM}{dx} + T = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (8.44b)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (8.44c)$$

$$v(0) = 0, \quad (8.44d)$$

$$v'(0) = 0. \quad (8.44e)$$

On peut aussi le remplacer par un problème faisant disparaître M et T : chercher v telle que

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p}{EI}, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (8.45a)$$

$$v(0) = 0, \quad (8.45b)$$

$$v'(0) = 0, \quad (8.45c)$$

$$v^{(2)}(L) = 0, \quad (8.45d)$$

$$v^{(3)}(L) = 0. \quad (8.45e)$$

- (1) Si les F_k donnés dans (8.43) sont tous nuls, p est dans L^2 . Ainsi, d'après (8.45a), v est dans $H^4(0, L) \subset C^3(0, L)$. Ainsi, (8.44c) a lieu partout sur $[0, L]$ et (8.45a) presque partout sur $]0, L[$. La formulation faible du problème (8.45) s'obtient en considérant (8.45a), en le multipliant par une fonction u élément de l'espace

$$V = \{u \in H^2(0, L) : u(0) = u'(0) = 0\}, \quad (8.46)$$

et en intégrant sur $[0, L]$, ce qui donne

$$\int_0^L v^{(4)}(s)u(s)ds = \frac{1}{EI} \int_0^L p(s)u(s)ds. \quad (8.47)$$

Deux intégrations par parties successives donnent

$$\int_0^L v^{(4)}(x)u(x)dx = \int_0^L v''(x)u''(x)dx - v''(L)u'(L) + v''(0)u'(0) + v^{(3)}(L)u(L) - v^{(3)}(0)u(0). \quad (8.48)$$

On a donc pour tout $u \in V$

$$\int_0^L v''(x)u''(x)dx - v''(L)u'(L) + v''(0)u'(0) + v^{(3)}(L)u(L) - v^{(3)}(0)u(0) = \frac{1}{EI} \int_0^L p(s)u(s)ds,$$

soit, compte tenu des conditions aux limites (8.45b), (8.45c), (8.45d) et (8.45e),

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L v''(x)u''(x)dx = \frac{1}{EI} \int_0^L p(s)u(s)ds. \quad (8.49)$$

Ce problème est un cas particulier de (Q.5) et admet donc une unique solution d'après le lemme Q.1. On passe de la formulation faible au problème initial (8.45) avec p dans $L^2(0, L)$ en appliquant (8.49) à tout fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis à toute fonction de $v \in V$ et en réutilisant (8.48).

Ici, a est définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^L u''(x)v''(x)dx, \quad (8.50)$$

et \mathcal{L} par

$$\forall u \in V, \quad \mathcal{L}(u) = \frac{1}{EI} \int_0^L p(s)u(s)ds. \quad (8.51)$$

L'espace V est muni du produit scalaire de $H^2(0, L)$ (voir annexe P).

- (2) Dans le cas général, où p est donné par (8.43), c'est la dérivée au sens des distributions de la fonction de $L^2(0, L)$ donnée par

$$r(x) = \int_0^x q(s)ds + \sum_k F_k H(\cdot - x_k), \quad (8.52)$$

Donc, d'après (8.44a), T est dans $L^2(0, L)$. D'après (8.44b), M est dans $H^1(0, L)$ et donc d'après (8.44c), v est dans $H^3(0, L) \subset C^2(0, L)$. Ainsi, (8.44c) a lieu partout sur $[0, L]$.

Dans le cas où p se réduit à $F\delta_{L/2}$, on a donc

$$p = F\delta_{L/2}, \quad (8.53)$$

et la formulation faible du problème (8.45) s'obtient formellement en considérant (8.45a) et en l'appliquant à une fonction u élément de l'espace défini par (8.46) ce qui donne

$$\langle v^{(4)}, u \rangle = \frac{1}{EI} \langle F \delta_{L/2}, u \rangle = F \frac{u(L/2)}{EI},$$

soit encore de façon formelle

$$\int_0^L v^{(4)}(x)u(x)dx = \frac{u(L/2)}{EI}, \quad (8.54)$$

soit encore grâce à (8.48), pour tout $u \in V$

$$\int_0^L v''(x)u''(x)dx - v''(L)u'(L) + v''(0)u'(0) + v^{(3)}(L)u(L) - v^{(3)}(0)u(0) = F \frac{u(L/2)}{EI},$$

soit, compte tenu des conditions aux limites (8.45b), (8.45c), (8.45d) et (8.45e),

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L v''(x)u''(x)dx = F \frac{u(L/2)}{EI}, \quad (8.55)$$

Ce problème est un cas particulier de (Q.5) et admet donc une unique solution d'après le lemme Q.1.

On passe de la formulation faible au problème initial (8.45) avec p donnée par (8.53) en appliquant (8.55) à tout fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis à toute fonction de $v \in V$ et en réutilisant (8.48).

Ici, a est définie par (8.50) et \mathcal{L} par

$$\forall u \in V, \quad \mathcal{L}(u) = F \frac{u(L/2)}{EI}. \quad (8.56)$$

(3) Enfin, dans le cas général où p est donné par (8.43), on a donc la formulation variationnelle suivante

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L v''(x)u''(x)dx = \frac{1}{EI} \left(\int_0^L q(s)u(s)ds + \sum_k F_k u(x_k) \right). \quad (8.57)$$

8.5.2.2. Autre problème.

On reprend les équations du problème (8.45) avec p nulle et en appliquant un seul effort tranchant T_0 appliqué à l'extrémité L de la poutre : on remplace donc (8.45e) par

$$v^{(3)}(L) = -\frac{T_0}{EI}. \quad (8.58)$$

On peut montrer qu'à ces équations est associée la formulation faible suivante : on considère l'espace défini par (8.46). On cherche u telle que

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L u''(x)v''(x)dx = \frac{T_0}{EI}u(L). \quad (8.59)$$

Ce problème est un cas particulier de (Q.5) et admet donc une unique solution d'après le lemme Q.1. et comme précédemment, l'existence et l'unicité de u est alors assurée ainsi que son approximation par éléments finis.

REMARQUE 8.6. Les équations *a priori* équivalentes (8.44) ne sont pas considérées. En effet, d'une part, si le chargement p est quelconque, le calcul du moment M en fonction de p nécessite un calcul d'intégration que l'on ne sait pas nécessairement mener. D'autre part, cette formulation ne fournit pas de formulation faible.

8.5.2.3. Autre problème : le lézard sur une branche.

En fait, la formulation de la section 8.5.2.1 n'est pas très intéressante en soi : on peut calculer l'expression exacte comme dans l'exemple de la section 6.2. Mais un calcul a été examiné dans une problème rencontré au sein du Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport (CRIS). Il s'agissait d'étudier un lézard s'agitant au bout d'une branche, supposée encadrée à son autre extrémité ; il crée donc un effort tranchant $T_0(t)$ qui dépend du temps, supposé connu. La poutre n'est plus élastique linéaire mais présente un amortissement noté E' .

En dynamique, le problème décrit par (8.45) avec p nulle et (8.58) est remplacé par le problème suivant : on cherche v , une fonction de $[0, L] \times [0, T]$ dans \mathbb{R} vérifiant

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + E' I \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} = 0, \quad (8.60a)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \text{connues}, \quad (8.60b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \text{connues}, \quad (8.60c)$$

et les conditions aux limites

$$u(0, t) = 0, \quad (8.60d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (8.60e)$$

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) + E' I \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(L, t) = 0, \quad (8.60f)$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) + E' I \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3}(L, t) = -T_0(t). \quad (8.60g)$$

Il ne s'agit pas de tout refaire sur cet exemple plus compliqué. Donnons juste les grandes lignes du calcul. On peut montrer qu'il existe des fonctions (dépendant de l'espace seul), appelées fonctions propres, en nombre infini, et sur laquelle on peut décomposer la solution $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t) u_n(x). \quad (8.61)$$

Si on ne prend qu'un nombre fini de ces modes, il nous alors résoudre un nombre fini d'équation différentielles (ordinaires) en temps qui permettent de calculer les différentes fonctions β_n . Les modes propres u_n peuvent être déterminés de façon analytique ou alors en résolvant le problème spatial de la section 8.5.2.2 par éléments finis. On recompose alors la solution u en prenant un nombre de modes suffisant.

Concluons par la donnée de deux vidéos¹ qui reprennent des simulations faites sous matlab, en régime libre (avec T_0 nul) :

avec $E' = 0$: http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/formation_matlab/poutrevibrante_amor_nul.avi

avec $E' > 0$: http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/formation_matlab/poutrevibrante_amortie.avi

8.5.3. Le problème de la chaleur (stationnaire)

Un autre problème, type équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites, est celui de la chaleur en stationnaire : on cherche u d'une partie Ω de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} vérifiant $-\Delta u = f$ dans Ω avec des conditions aux limites imposée en flux et/ou en valeurs. Ce deuxième problème est bien connu et se prête très bien à une formulation faible, mais ne sera pas traité ici. Voir par exemple [RT92, chap. 2, section 2.1].

1. à visualiser plutôt avec VLC.

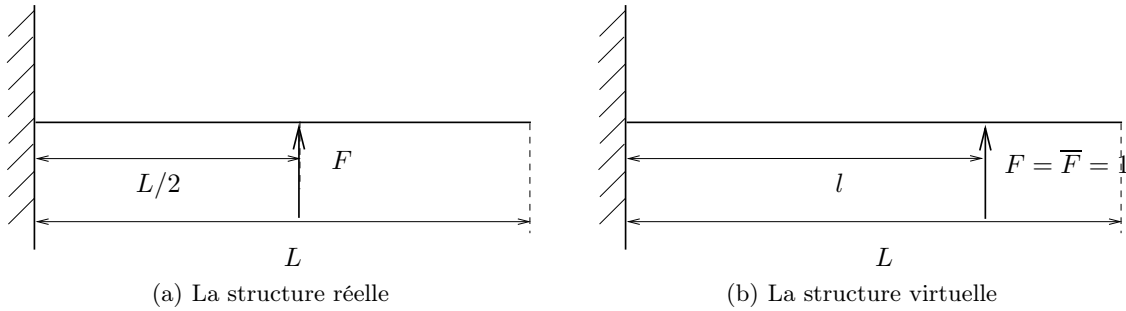


FIGURE 8.3. Les deux structures étudiées .

8.5.4. Un problème complet d'élasticité

On renvoie au problème complet de l'élasticité linéaire en petite déformation en tridimensionnel : voir [Roy05, chap. 6, p. 287–301], [RT92] et [Duv90, chap. 5-6]. Dans ce dernier cas, voir le problème de type I. La formulation faible de ce problème n'est autre que le principe des travaux virtuels.

8.5.5. Autre vision des formulations faibles : théorème des travaux virtuels, du second théorème de Castigliano ou de la force unitaire (en RDM)

8.5.5.1. Théorème des travaux virtuels.

Les trois exemples vus en section 8.5.1, 8.5.2 ou 8.5.4 peuvent aussi se voir comme le théorème des travaux virtuels en RDM ou en MMC (voir [Roy05]).

8.5.5.2. Théorème de la force unitaire (ou de la charge unité)(en RDM).

Montrons maintenant que la formulation faible de l'exemple 3 donné dans la section 8.5.2.1 n'est rien d'autre que le Théorème de la force unitaire (ou de la charge unité) de la RDM (voir par exemple http://membres.multimania.fr/entpsws/down/cours_pdf/Resume_meca_99.PDF, p. 100)

Considérons la même structure (encastée libre), dite « virtuelle », que celle de l'exemple 3 donné dans la section 8.5.2.1 mais qui n'est soumise qu'à une seule force unitaire $F = \bar{F} = 1$, au point d'abscisse $l \in]0, L[$. Notons \bar{v} et \bar{M} les flèches et le moment (« virtuels ») dans cette structure, faciles à calculer, et M et v les flèches et le moment (réels) dans la structure complète de l'exemple 3 donné dans la section 8.5.2.1 (voir figure 8.3).

La formulation faible (8.57) s'écrit donc, pour la structure « virtuelle »,

$$\forall u \in V, \quad \int_0^L \bar{v}''(x)u''(x)dx = \frac{u(l)}{EI}. \quad (8.62)$$

Les deux structures ont la même géométrie donc les espaces V associés aux deux formulations variationnelles (8.57) et (8.62) sont les mêmes. Appliquons la formulation variationnelle (8.62) au déplacement v de la structure réelle : il vient

$$\int_0^L \bar{v}''(x)v''(x)dx = \frac{v(l)}{EI}. \quad (8.63)$$

D'après (M.7a) appliquée aux structure réelles et virtuelles, on a donc

$$\bar{v}'' = \frac{\bar{M}}{EI}, \quad (8.64a)$$

$$v'' = \frac{M}{EI}, \quad (8.64b)$$

qui permet donc d'écrire (8.63) sous la forme

$$v(l) = EI \int_0^L \bar{v}''(x)v''(x)dx = \frac{1}{EI} \int_0^L M\bar{M}dx,$$

et donc, finalement,

$$v(l) = \frac{1}{EI} \int_0^L M\bar{M}dx, \quad (8.65)$$

où \bar{M} est le moment (virtuel) de la structure qui n'est soumise qu'à une seule force unitaire F , au point d'abscisse $l \in]0, L[$ et M est le moment (réel) de la structure réelle : il s'agit bien du théorème de la force unitaire où $\int M\bar{M}$ est appelée intégrale de Mohr.

EXEMPLE 8.7. Calculons ainsi le déplacement de la poutre déjà effectué au début de la section 6.2 (voir (6.6)) au point $l \in]L/2, L[$.

On considère donc la structure virtuelle soumise à une seule force unitaire $F = \bar{F} = 1$, au point d'abscisse $l \in]0, L[$.

Si on suppose (6.5), on a en reprenant le calcul (6.4) pour le moment virtuel

$$\forall x \in [0, L], \quad \bar{M}(x) = \begin{cases} l - x, & \text{si } x \leq l, \\ 0, & \text{si } x \geq l. \end{cases} \quad (8.66)$$

Le moment réel M est donné par (6.4). On a donc d'après (8.65),

$$v(l) = \frac{1}{EI} \int_0^L M\bar{M}dx = \int_0^{1/2} F(1/2 - x)(l - x)dx + \int_{1/2}^l 0 \times (l - x)dx + \int_l^1 0dx,$$

et donc

$$v(l) = \int_0^{1/2} F(1/2 - x)(l - x)dx, \quad (8.67)$$

soit, après calculs,

$$v(l) = -\frac{1}{48} + \frac{l}{8}, \quad (8.68)$$

ce qui est exactement (6.6b). Notons que cette expression est encore exacte si l tend vers 1.

8.5.5.3. Second théorème de Castigliano (en RDM).

Montrons maintenant que la formulation faible de l'exemple 3 donné dans la section 8.5.2.1 permet de retrouver le Second théorème de Castigliano de RDM (voir par exemple section 4.4.3 et Théorème 3.41 p. 66 de [Bas11c]) qui implique aussi le théorème de la charge fictive [Bas11c, Théorème 3.47 p. 71]).

L'application du lemme Q.2 page 269 à la formulation variationnelle (8.57) permet donc d'écrire (en remplaçant Φ par $EI\Phi$)

$$\Phi(v) = \min_{u \in V} \Phi(u), \quad (8.69)$$

où

$$\forall v \in V, \quad \Phi(u) = \frac{EI}{2} \int_0^L u''^2(x)dx - \left(\int_0^L q(s)u(s)ds + \sum_k F_k u(x_k) \right). \quad (8.70)$$

Notons M le moment dans cette structure. D'après (M.7a) on a donc (8.64b) et donc

$$\Phi(u) = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x)dx - \left(\int_0^L q(s)u(s)ds + \sum_k F_k u(x_k) \right),$$

soit

$$\Phi(u) = \underbrace{\frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x)dx}_{=W_1} - \underbrace{\left(\int_0^L q(s)u(s)ds + \sum_k F_k u(x_k) \right)}_{=W_2}, \quad (8.71)$$

On constate que $\Phi(u)$ apparaît comme la somme de W_1 , appelée énergie de déformation et W_2 appelée travail des forces (dans le champ de déplacement u). Ainsi, selon (8.69), la configuration de la poutre minimise l'énergie totale $\Phi(u)$.

Par ailleurs, isolons parmi toutes les forces externes appliquées à la structure (q et F_k), une des forces ponctuelles F_k , notée F , appliquée au point $l \in]0, L[$. On a donc

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx - \left(\int_0^L q(s)u(s) ds + \sum_k F_k u(x_k) \right) \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx - \left(\int_0^L q(s)u(s) ds + Fu(l) + \sum F_k u(x_k) \right),\end{aligned}$$

soit encore

$$\Phi(u) = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx - \mathcal{L}_F(u) - \tilde{\mathcal{L}}(u), \quad (8.72a)$$

où

$$\mathcal{L}_F(u) = Fu(l), \quad (8.72b)$$

qui dépend de F et

$$\tilde{\mathcal{L}}(u) = \sum F_k u(x_k), \quad (8.72c)$$

qui ne dépend de F . Considérons enfin l'application \mathcal{F} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui au réel f associe $\Phi(u_f)$ où u_f est le déplacement dans la poutre correspondant à la valeur $F = f$. On a donc $u = u_F$ et d'après (8.69), on a

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u_f) &\geq \Phi(u), \\ \Phi(u) &= \Phi(u_F),\end{aligned}$$

et donc \mathcal{F} admet un minimum en $f = F$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f}(f = F) = 0.$$

Or, d'après (8.72)

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f}(f = F) = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx - Fu(l) \right) = \frac{1}{2EI} \frac{\partial}{\partial F} \int_0^L M^2(x) dx - u(l),$$

c'est-à-dire,

$$u(l) = \frac{1}{2EI} \frac{\partial}{\partial F} \int_0^L M^2(x) dx, \quad (8.73)$$

soit encore, en dérivant sous le signe somme :

$$u(l) = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx. \quad (8.74)$$

Les équations (8.73) ou (8.74) constituent exactement le Second théorème de Castigliano de RDM (voir par exemple section 4.4.3 et Théorème 3.41 p. 66 de [Bas11c]) qui implique aussi le théorème de la charge fictive [Bas11c, Théorème 3.47 p. 71]).

EXEMPLE 8.8. Reprenons avec cette méthode pour traiter de nouveau l'exemple 8.7.

On applique cette fois-ci une charge fictive f à l'abscisse $l > L/2$. Si on suppose (6.5), on a en reprenant le calcul (6.4)

$$\forall x \in [0, L], \quad \overline{M}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq l, \\ f(l-x), & \text{si } 1/2 \leq x \leq l, \\ f(l-x) + F(1/2-x), & \text{si } x \leq 1/2. \end{cases} \quad (8.75)$$

Calculons donc $\int_0^L M(x) \partial M / \partial F dx$ en y faisant tendre f vers 0 ce qui donnera le déplacement recherché. On a donc

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx = \int_0^{1/2} (f(l-x) + F(1/2-x))(l-x) dx + \int_{1/2}^l f(l-x)(l-x) dx + \int_l^1 0 dx,$$

et donc si f tend vers zéro,

$$u(l) = \int_0^{1/2} F(1/2-x)(l-x) dx, \quad (8.76)$$

ce qui est exactement la même intégrale que (8.67) et qui redonne donc bien (8.68).

Troisième partie

Annexes

Nombres complexes

Cette annexe constitue l'annexe I (en partie enrichie et développée) de [Bas11b].

Cette annexe propose quelques rappels théoriques sur les complexes en section A.1, des exercices en section A.2 ainsi que plusieurs problèmes corrigés de géométrie en section A.3.

On pourra aussi consulter http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe ou [Vél00] et, pour un regard historique et culturel, on pourra se référer à l'ouvrage [EG99] (difficile!).

A.1. Quelques rappels théoriques

A.1.1. Notions de base

On rappelle que

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ avec } i^2 = -1. \quad (\text{A.1})$$

On en déduit la somme, le produit et la division de deux complexes, mis sous forme algébrique (c'est-à-dire définis par (A.1)) :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b'), \quad (\text{A.2a})$$

$$(a + ib).(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b), \quad (\text{A.2b})$$

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}. \quad (\text{A.2c})$$

On rappelle¹ aussi que, pour tout nombre complexe non nul $z = a + ib$, il existe un unique couple (r, θ) appartenant à $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad (\text{A.3})$$

où, par définition,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (\text{A.4})$$

La forme (A.3) est appelée la forme exponentielle. On appelle ρ le module de z et on le note $|z|$; on appelle θ l'argument de z et on le note $\arg z$. Attention, dans le chapitre 2, section 2.5.4.1, l'argument est nécessairement dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Pour calculer (ρ, θ) à partir de (a, b) (ou réciproquement), il suffit de remarquer que (ρ, θ) désignent les coordonnées en polaires du point de coordonnées cartésiennes (a, b) (voir [Bas19, Annexe "Trigonométrie"]).

REMARQUE A.1. La fonction atan_2 , utilisée par Matlab (de nom `atan2`) est souvent utilisée pour définir l'argument d'un nombre complexe, c'est-à-dire, pour définir l'angle θ en fonction de (x, y) ou de $z = x + iy$ ou ce qui revient au même l'angle

1. Cela provient du fait qu'en notant (r, θ) les coordonnées polaires du point (a, b) , on a

$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta, \\ b &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

et donc

$$z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin(\theta) = r(\cos \theta + i \sin(\theta)).$$

On choisit donc la convention (A.4), ce qui permet d'écrire (A.3).

polaire θ en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y) , vérifiant

$$x = r \cos \theta, \quad (\text{A.5a})$$

$$y = r \sin \theta, \quad (\text{A.5b})$$

grâce à l'égalité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \quad \theta = \text{atan}_2(y, x), \quad (\text{A.6})$$

voire même parfois (ce qui est le choix de Matlab)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta = \text{atan}_2(y, x). \quad (\text{A.7})$$

Voir par exemple [Bas19, annexe "La fonction atan₂"].

◇

REMARQUE A.2. En toute rigueur, θ appartient à \mathbb{R} et est donc défini à 2π près. On parle alors d'un argument de z .

L'avantage de l'usage de la notation exponentielle apparaît avec les formules suivantes

$$\rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}. \quad (\text{A.9})$$

Ainsi, la forme exponentielle est donc adaptée au calcul de produit et de rapport de nombres complexes alors que la forme algébrique est utilisée pour le calcul de somme de complexes.

A.1.2. Résolution d'équation du second degré

A.1.2.1. *Extraction de racine carrée.* Tout nombre réel positif admet une racine carrée. Tout nombre complexe admet deux racines carrées. Attention, on ne parle pas de la racine d'un complexe².

Soit un nombre complexe z (non nul). Il existe une unique paire $\{z_1, z_2\}$ de complexes telle que

$$z_1 = -z_2 \text{ et } z_1^2 = z_2^2 = z. \quad (\text{A.11})$$

On pose $z = a + ib$ et on cherche les nombres z_1 et z_2 sous la forme

$$Z = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$z = a + ib = Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha\beta = b/2. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Puisque $|Z|^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est connu, on déduit donc de (A.12) que

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

2. Cela provient du fait qu'il n'existe pas de relation d'ordre (c'est-à-dire un moyen de classer les complexes) compatible avec les lois $+$ et \times ; si c'était le cas, comme dans \mathbb{R} , tout nombre carré serait positif, ce qui est évidemment faux pour $i^2 = -1$!

De même, on n'utilise pas le symbole $\sqrt{}$ pour évoquer l'une des deux racines d'un complexe. On peut aboutir par exemple à l'aberration suivante :

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = i \times i = i^2 = -1. \quad (\text{A.10})$$

Moyennant certaines conventions, on peut tout de même définir la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ et lever le paradoxe de (A.10). Plus de détails dans l'annexe D.

Par somme et différence, on en déduit α^2 et β^2 :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

On vérifie que les deux quantités $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ et $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$ sont nécessairement positives. On en déduit donc alors α (aux signe près, deux solutions) et β (aux signe près, deux solutions), ce qui fait quatre solutions pour Z . On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par la seconde équation de (A.12); on obtient donc bien deux solutions opposées pour Z .

EXEMPLE A.3. Déterminons les racines carrées de $z = 5 + 12i$. On refait les calculs précédents³ avec $a = 5$ et $b = 12$ et on obtient, selon (A.14),

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5^2 + 12^2}) = \frac{1}{2}(5 + 13) = 9, \\ \beta^2 = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{5^2 + 12^2}) = \frac{1}{2}(-5 + 13) = 4. \end{cases}$$

On en déduit donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3, \\ \beta = \pm\sqrt{4} = \pm 2. \end{cases}$$

Selon (A.12), on a $\alpha\beta = b/2 = 6$; ainsi α et β sont de même signe et on en déduit que les racines carrées de $5 + 12i$ sont

$$Z = \pm(3 + 2i).$$

A.1.2.2. Résolution effective d'équation du second degré. Toute équation polynômiale du second degré à coefficients complexes possède exactement deux solutions⁴ complexes.

Soient a, b, c trois complexes (avec a non nul). On cherche à résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (\text{A.15})$$

Excepté le fait qu'on ne peut parler de la racine du discriminant, les formules sont formellement identiques au cas réel : on pose

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

et on appelle δ l'une des racines carrées de Δ (obtenue grâce aux résultats de la section A.1.2.1). Les deux racines de (A.15) sont données par :

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}. \quad (\text{A.16})$$

Elles sont distinctes si $\Delta \neq 0$ et confondues sinon.

Le lecteur vérifiera que si a, b et c sont réels, la formule (A.16) redonne les formules déjà connues dans \mathbb{R} .

A.1.3. Calcul de racines n -ièmes

Selon la note 4 du bas de la page 141, pour tout entier n non nul, tout nombre complexe admet exactement n racines n -ièmes. Plus précisément, si z appartient à \mathbb{C} (non nul), il existe n nombres complexes distincts deux à deux et notés z_0, z_1, \dots, z_{n-1} tels que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k^n = z. \quad (\text{A.17})$$

Contrairement au cas $n = 2$ (vu en section A.1.2.1), on utilise la notation exponentielle : on détermine ρ et ϕ tels que

$$z = \rho e^{i\phi}.$$

3. Mieux vaut savoir les refaire que de se rappeler les formules (A.14)!

4. C'est aussi une des spécificité de \mathbb{C} par rapport à \mathbb{R} . De façon plus générale, pour tout entier n non nuls, toute équation polynômiale de degré n à coefficients complexes possède exactement n solutions complexes

On cherche $Z = Re^{i\Phi}$ tel que

$$Z^n = (Re^{i\Phi})^n = R^n e^{in\Phi} = \rho e^{i\phi}.$$

Par identification, on en déduit donc que

$$\begin{cases} R^n = \rho, \\ n\Phi = \phi + 2k\pi, \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

où k est un entier relatif. On montre alors, puisque R et ρ sont deux réels strictement positifs que (A.18) est équivalent à

$$\begin{cases} R = \sqrt[n]{\rho}, \\ \Phi = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } k \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Ainsi les n racines n -ièmes de $z = \rho e^{i\phi}$ sont données par

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}. \quad (\text{A.19})$$

EXEMPLE A.4. Le lecteur pourra montrer que

- les 2 racines carrées de 1 sont 1 et -1 ;
- les 3 racines cubiques de 1 sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$;
- les 4 racines quatrièmes de 1 sont 1, i , -1 et $-i$.

On pourra aussi tracer ces différentes racines sur le cercle unité.

Le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$ est noté j . Le lecteur pourra vérifier que

$$1 + j + j^2 = 0,$$

et essayer de généraliser cette propriété pour les racines n -ièmes de l'unité.

EXEMPLE A.5. Déterminer les racines troisièmes de $z = 2 + 2i$.

A.1.4. Applications à la géométrie

Selon la formule (A.8), un nombre complexe z multiplié par $Z = \rho e^{i\phi}$ donne un complexe dont le module est multiplié par ρ et dont l'argument est augmenté de ϕ .

Géométriquement, cela signifie que la similitude de centre l'origine, de rapport ρ et d'angle ϕ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe $\rho e^{i\phi} z$ (voir figure A.1).

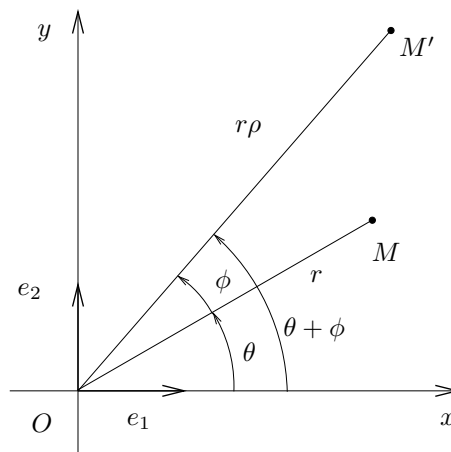


FIGURE A.1. La similitude de centre l'origine, de rapport ρ et d'angle ϕ .

Si $\rho = 1$, la similitude est une rotation d'angle ϕ .

On en déduit ainsi que la similitude de centre Ω , d'affixe ω , de rapport ρ et d'angle ϕ envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe z' avec :

$$z' - \omega = \rho e^{i\phi} (z - \omega). \quad (\text{A.20})$$

On peut aussi déduire de (A.8) que si A , B et M sont trois points du plan d'affixe a , b et z , alors

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right) = \arg \left(\frac{z - b}{z - a} \right). \quad (\text{A.21})$$

On consultera les exercices et problèmes corrigés des sections A.2.5 et A.3.

A.1.5. Applications à la trigonométrie

Rappelons les formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad (\text{A.22})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (\text{A.23})$$

et de Moivre : pour tout entier n , pour tout réel θ

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (\text{A.24})$$

Rappelons que (A.8) permet de retrouver de façon mnémotechnique les deux formules

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \quad (\text{A.25})$$

$$\sin(\theta + \theta') = \cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta. \quad (\text{A.26})$$

En effet, on remplace dans

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'},$$

- $e^{i(\theta+\theta')}$ par $\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$,
- $e^{i\theta}$ par $\cos \theta + i \sin \theta$
- et $e^{i\theta'}$ par $\cos \theta' + i \sin \theta'$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta'), \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta). \end{aligned}$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient donc (A.25) et (A.26).

Avec un peu d'astuce et de métier, on peut retrouver à partir des deux formules (A.25) et (A.26) la plupart des formules de la trigonométrie, sans formulaire ! On pourra aussi, pour des preuves purement géométriques de ces résultats, consulter [Bas19, Annexe "Trigonométrie"].

Les formules (A.22), (A.23) et (A.24) permettent d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$, ainsi que l'opération inverse, qui est appelée linéarisation.

Étudions les deux exemples suivants :

EXEMPLE A.6. On a la formule de linéarisation suivante :

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos(4\theta) + 4 \cos(2\theta) + 3).$$

En effet, on écrit successivement, grâce à (A.22) et en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\cos^4 \theta &= \frac{1}{2^4} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4, \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta} e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta} e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}), \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}), \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta} + 6), \\ &= \frac{1}{2^3} \left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} + 4 \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 3 \right), \\ &= \frac{1}{8} (\cos(4\theta) + 4 \cos(2\theta) + 3)\end{aligned}$$

EXEMPLE A.7. Réciproquement, calculons $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ ou de $\cos \theta$ seul. On a

$$\cos(4\theta) = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta, \quad (\text{A.27a})$$

$$= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1. \quad (\text{A.27b})$$

En effet, d'après la formule de Moivre (A.24) et du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) + i \sin(4\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^4, \\ &= \cos^4 \theta + 4i \cos^3 \theta \sin \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4i \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta.\end{aligned}$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on en déduit en particulier que

$$\cos(4\theta) = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta,$$

ce qui montre (A.27a). On poursuit le calcul en remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \cos^2 \theta$:

$$\begin{aligned}&= \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2, \\ &= \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta + 6 \cos^4 \theta + 1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta,\end{aligned}$$

ce qui montre (A.27b).

A.1.6. Applications à l'électricité

Voir exercice A.26 page 147.

A.2. Quelques exercices

A.2.1. Calculs dans \mathbb{C}

EXERCICE A.8. Calculer (sous la forme qui vous paraît le plus adaptée)

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \overline{5 - 4i} & \text{b) } \overline{(1 - 3i)(10 + i)} & \text{c) } i(34 + i)(2i - 10) & \text{d) } (2 + 3i)^2 \\ \text{e) } (2 + 3i)^3 & \text{f) } (2 + 3i)^6 & \text{g) } \frac{1}{3 + 5i} & \text{h) } \frac{1 + i}{7 + 4i} \end{array}$$

EXERCICE A.9. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 1 + \sqrt{3}i & \text{b) } -1 - i & \text{c) } -1 + i & \text{d) } -3i \\ \text{e) } (1 + \sqrt{3}i)^3 & \text{f) } \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} & \text{g) } \frac{-1 + i}{1 + \sqrt{3}i} & \end{array}$$

EXERCICE A.10. Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } e^{i\pi} \quad \text{b) } 2e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \text{c) } \sqrt{7}e^{-2001i\pi} \quad \text{d) } 5e^{\frac{7i\pi}{2}}$$

EXERCICE A.11. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}.$$

EXERCICE A.12. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π . Calculer le module et l'argument de

$$z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}.$$

A.2.2. Résolution d'équations du second degré

EXERCICE A.13. Déterminer des racines carrées (dans \mathbb{C}) des nombres suivants : 16 , -16 , $16i$, $9 - 40i$, $2i$, $7 + 6\sqrt{2}i$.

EXERCICE A.14. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\text{a) } 4x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$\text{b) } x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$\text{c) } x^2 + 4 = 0,$$

$$\text{d) } x^2 - x + 5 = 0.$$

EXERCICE A.15. Dans le cas où les équations de l'exercice A.14 n'ont pas de solution dans \mathbb{R} , les calculer dans \mathbb{C} .

EXERCICE A.16. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\text{a) } z^2 + 4z - 21 = 0,$$

$$\text{b) } z^2 - (6 - 4i)z + 29 - 2i = 0,$$

$$\text{c) } z^2 - 4(1 + i)z + 8i = 0,$$

$$\text{d) } z^2 - (9 + 2i)z + 18i = 0.$$

A.2.3. Racines n -ièmes

EXERCICE A.17. Calculer les racines 5-ièmes de l'unité.

EXERCICE A.18. Calculer les racines 3-ièmes de i et de $1 + i$.

EXERCICE A.19. Dans \mathbb{C} , résoudre l'équation

$$z^5 = 1 + i.$$

EXERCICE A.20. Soit n un entier non nul. Dans \mathbb{C} , résoudre l'équation

$$(z + i)^n - (z - i)^n = 0.$$

A.2.4. Application à la géométrie

EXERCICE A.21. Tracer dans complexe le plan l'image du point A d'affixe $3 + i$ par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$ puis par la rotation de centre Ω d'affixe $5 + 2i$ et d'angle $\pi/3$.

Calculer les affixes de ces points.

Voir aussi le problème de la section A.3.2 page 149.

A.2.5. Exercices sur les similitudes

EXERCICE A.22. Caractériser les similitudes du plan (grâce aux complexes).

Corrigé

- (1) Grâce à (A.20), on peut écrire que la similitude de centre Ω , d'affixe ω , de rapport $\rho > 0$ et d'angle ϕ envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe z' avec :

$$z' = az + b, \quad (\text{A.28a})$$

avec

$$a = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}^*, \quad (\text{A.28b})$$

$$b = \omega(1 - \rho e^{i\phi}), \quad (\text{A.28c})$$

Si $a = 1$ (ce qui est équivalent à $\rho = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$), alors $b = 0$ et cette similitude est l'identité.

- (2) Réciproquement, on se donne une application du plan dans lui-même définie par (A.28a) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. L'éventuel point fixe d'affixe ω vérifie

$$\omega = a\omega + b,$$

soit encore

$$\omega(1 - a) = b. \quad (\text{A.29})$$

Si $a = 1$, alors $b = 0$ et la similitude est l'identité. On retrouve le cas évoqué ci-dessus. Tout point est invariant. Si $a \neq 1$, alors la similitude admet un point fixe unique défini par

$$\omega = \frac{b}{1 - a}, \quad (\text{A.30})$$

et on retrouve le cas évoqué ci-dessus.

Bref, une similitude est définie par (A.28) avec $a \neq 0$ et si $a = 1$ alors $b = 0$.

REMARQUE A.23. Le cas $a = 1$ et $b \neq 0$ correspond en fait à une translation de vecteur d'affixe b non nul et donc différent de l'identité. En fait, géométriquement, une similitude peut aussi être une translation. Plus de détails par exemple dans [LH90, Dixième leçon] ou la page 2 de <http://bruno.lpbayard.free.fr/MATHS/ESPACESVECTORIELS/MaGeo1-Ch6NbresComplexesEtGeometrie.pdf>.

Correction complète en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

EXERCICE A.24. Que donne le produit de deux similitudes ?

Corrigé

Le produit de deux (voire de plusieurs) similitudes est encore une similitude ou une translation.

Voir aussi la remarque A.23 qui permet d'unifier cela.

Plus de détails par exemple dans [LH90, Dixième leçon] ou les pages 2 et 3 de <http://bruno.lpbayard.free.fr/MATHS/ESPACESVECTORIELS/MaGeo1-Ch6NbresComplexesEtGeometrie.pdf>.

Correction complète en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

EXERCICE A.25. Une similitude est le produit d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Qu'en est-il si les centres ne sont pas identiques ?

Corrigé

Grâce aux résultats des exercices (A.22) et (A.24) on peut très bien supposer que les centres ne sont pas les mêmes.

Plus de détails par exemple dans [LH90, Dixième leçon].

Correction complète en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

A.2.6. Application à l'électricité

EXERCICE A.26. *Attention, dans cet exercice, conformément à l'usage adopté en électricité, j désigne ici le complexe tel que $j^2 = -1$ et non l'une des racines troisièmes de l'unité, comme le veut l'usage en mathématique. On pourra donc noter l'intensité par i . Si X désigne une grandeur, \underline{X} désignera la grandeur complexe associée.*

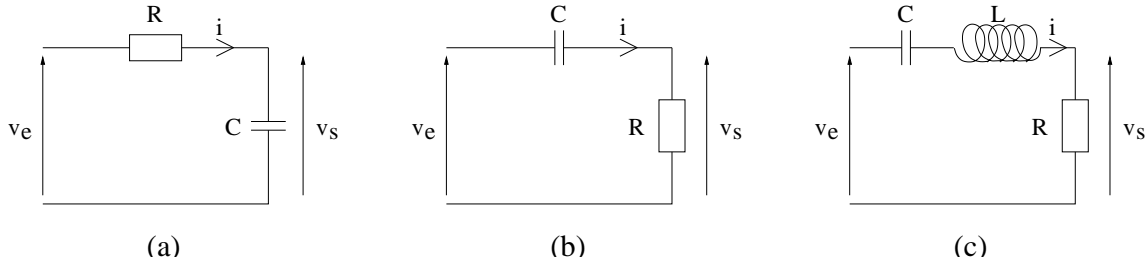


FIGURE A.2. Étude de quelques circuits électriques

- (1) On étudie le circuit électrique représenté en figure (A.2)a. v_e désigne la tension d'entrée et v_s la tension de sortie. On suppose que

$$v_e = V_e \cos(\omega t).$$

Soit, en notation complexe,

$$\underline{v}_e = \underline{V}_e e^{j\omega t}.$$

On cherche à calculer \underline{v}_s .

Pourquoi l'impédance de la résistance R est égale à R ? Pourquoi l'impédance du condensateur C est égale à $1/(jC\omega)$?

- (2) En déduire la fonction de transfert du circuit électrique en tension (c'est à dire le rapport $\underline{v}_s/\underline{v}_e$). On exprimera la réponse en fonction de ω et de $\omega_0 = 1/(RC)$.
- (3) Identifiez la nature du filtre selon le domaine fréquentiel.
- (4) Faites la même étude pour les circuits des figures (A.2)b et (A.2)c. Pour le deuxième montage, on notera $\omega_0 = 1/(RC)$ et pour le troisième

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{L\omega_0}{R}.$$

A.3. Plusieurs problèmes de géométrie

A.3.1. Caractérisation d'un triangle équilatéral direct

Énoncé.

Montrer que ABC est équilatéral (direct, dans cet ordre), si et seulement si les affixes respectives a , b et c des points A , B et C vérifient $a + jb + j^2c = 0$.

Corrigé.

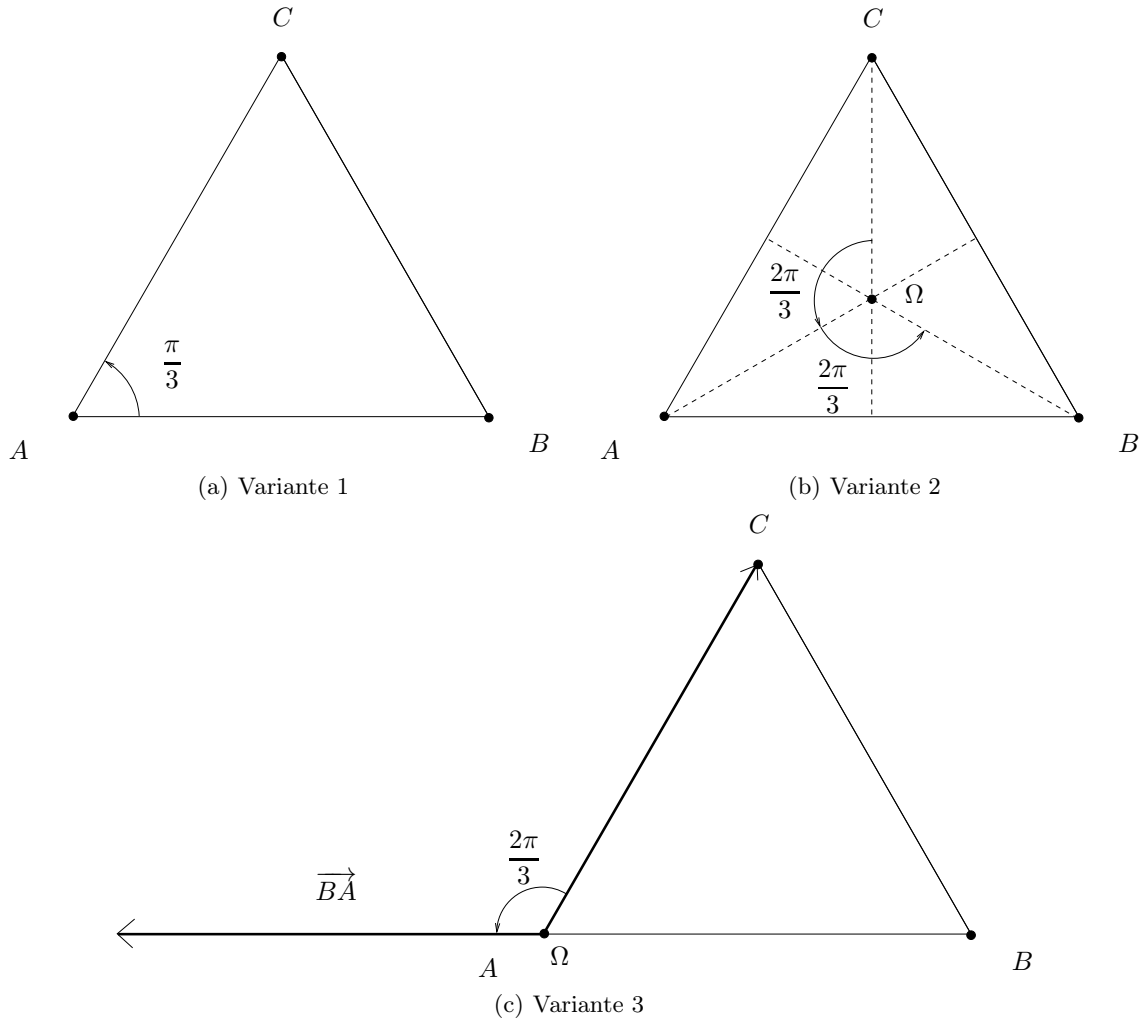
Ce résultat, très classique, est issu de l'exercice 19 de Christophe Jan dans http://833duparc.free.fr/Nouveaux_Exercices_MPSI/Nombres_Complexes.pdf

Donnons trois façons de procéder.

- (1)

Remarquons simplement que ABC est équilatéral (direct, dans cet ordre), si et seulement si, par exemple on passe du point B au point C par une rotation de centre A et d'angle $\pi/3$ (voir figure 3(a) page suivante), c'est-à-dire :

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a). \quad (\text{A.31})$$

FIGURE A.3. Le triangle équilatéral direct ABC dans les trois variantes de preuves.

Or

$$e^{i\pi/3} = -\bar{j}. \quad (\text{A.32})$$

Ainsi (A.31) est équivalent à

$$c - a = -\bar{j}(b - a),$$

et puisque $j\bar{j} = 1$, c'est donc équivalent à

$$j(c - a) = a - b. \quad (\text{A.33})$$

Enfin, on écrit que (A.33) est successivement équivalent à (car $1 + j + j^2 = 0$)

$$\begin{aligned} j(c - a) = a - b &\iff j^2(c - a) = j(a - b), \\ &\iff j^2c + jb = (j + j^2)a, \\ &\iff j^2c + jb + a = 0, \end{aligned}$$

et on a donc bien

$$a + jb + j^2c = 0. \quad (\text{A.34})$$

(2)

De façon plus fondamentale, pour faire apparaître plus explicitement le rôle de j , on écrit que ABC est équilatéral (direct, dans cet ordre), si et seulement si il existe une rotation de centre Ω , d'affixe ω (qui s'avère être en fait le centre de gravité du triangle ABC), d'angle $2\pi/3$ (voir figure 3(b) page ci-contre), qui envoie C sur A et A sur B c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned} a - \omega &= e^{2i\pi/3}(c - \omega), \\ b - \omega &= e^{2i\pi/3}(a - \omega), \end{aligned}$$

Puisque $j = e^{2i\pi/3}$, c'est donc équivalent à

$$\begin{aligned} a - \omega &= j(c - \omega), \\ b - \omega &= j(a - \omega), \end{aligned}$$

soit encore à

$$\begin{aligned} a - jc &= \omega(-j + 1), \\ b - ja &= \omega(-j + 1), \end{aligned}$$

soit encore à

$$a - jc = b - ja,$$

ou

$$a - b = j(c - a).$$

On retrouve donc (A.33) et on finit le calcul comme dans la méthode 1.

(3)

Enfin, plus rapidement encore il suffit de remarquer que ABC est équilatéral (direct, dans cet ordre), si et seulement si on passe du vecteur \overrightarrow{AC} au vecteur \overrightarrow{BA} par une rotation d'angle $2\pi/3$ (voir figure 3(c) page précédente), c'est-à-dire si et seulement si

$$(c - a)e^{2i\pi/3} = a - b,$$

soit encore

$$(c - a)j = a - b.$$

On retrouve donc (A.33) et on finit le calcul comme dans la méthode 1.

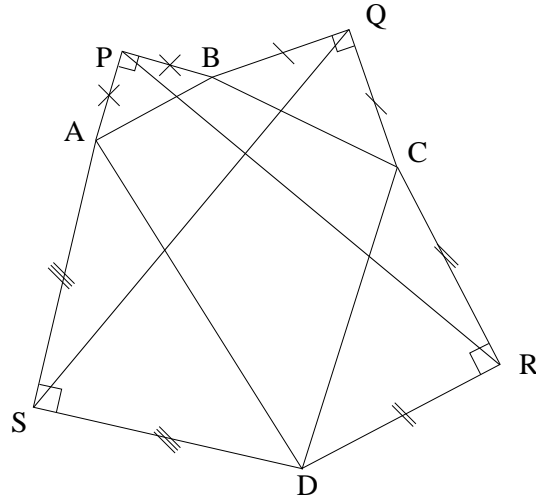
A.3.2. Problème sur un quadrilatère et deux segments orthogonaux et de même longueurs

Énoncé.

On considère un quadrilatère $ABCD$ quelconque (cf. figure ci-dessus). On construit à l'extérieur de ce quadrilatère, quatre triangles rectangles isocèles ABP , BCQ , CDR et DAS . On note a , b , c et d les affixes respectives des points A , B , C et D et p , q , r et s les affixes respectives des points P , Q , R et S .

(1) Traduire analytiquement, qu'il existe une rotation de centre P , d'angle $\pi/2$ qui envoie A sur B . En déduire l'expression de p :

$$p = \frac{ia - b}{i - 1}.$$



On admettra les expressions des autres affixes par permutation circulaire :

$$q = \frac{ib - c}{i - 1},$$

$$r = \frac{ic - d}{i - 1},$$

$$s = \frac{id - a}{i - 1}.$$

(2) En déduire les affixes des vecteurs \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{SQ} .

(3) En déduire que les distances PR et SQ sont égales et que les droites (PR) et (SQ) sont perpendiculaires.

Corrigé.

(1) On note a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et p, q, r et s les affixes respectives des points P, Q, R et S .

(2) On utilise analytiquement le fait qu'il existe une rotation de centre P , d'angle $\pi/2$ qui envoie A sur B . On utilise donc l'équation (A.20) avec

$$\omega = p,$$

$$\rho = 1,$$

$$\phi = \frac{\pi}{2},$$

$$z' = b,$$

$$z = a,$$

ce qui se traduit par

$$b - p = e^{\frac{i\pi}{2}}(a - p). \quad (\text{A.35})$$

L'équation (A.35) est équivalente à :

$$b - p = i(a - p) = ia - ip,$$

et donc

$$p - ip = b - ia,$$

soit

$$p(i - 1) = ia - b,$$

et donc, on déduit l'expression de p :

$$p = \frac{ia - b}{i - 1}.$$

On admettra les expressions des autres affixes par permutation circulaire :

$$\begin{aligned} q &= \frac{ib - c}{i - 1}, \\ r &= \frac{ic - d}{i - 1}, \\ s &= \frac{id - a}{i - 1}. \end{aligned}$$

(3) On calcule alors

$$\begin{aligned} i(q - s) &= \frac{i}{i - 1}(ib - c - id + a), \\ &= \frac{1}{i - 1}(-b - ic + d + ia), \\ &= \frac{1}{i - 1}(ia - b - (ic - d)), \\ &= p - r, \end{aligned}$$

et donc

$$p - r = i(q - s),$$

ce qui traduit que l'on passe du vecteur \overrightarrow{SQ} au vecteur \overrightarrow{RP} par une rotation d'angle $\pi/2$ et donc que les distances PR et SQ sont égales et que les droites (PR) et (SQ) sont perpendiculaires.

A.3.3. Problème sur un triangle et deux segments orthogonaux et de même longueurs

Donnons un exercice proche de celui de la section A.3.2.

Énoncé.

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle, trois triangles rectangles isocèles BCI , ABJ , CDR et ACK , rectangles respectivement en I , J et K .

- (1) Montrer que les distances KJ et AI sont égales et que les droites (KJ) et (AI) sont perpendiculaires.
- (2) Pouvez-vous en proposer une preuve purement géométrique (sans les complexes) ?

Corrigé.

Correction en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

A.3.4. Problème sur un triangle et deux segments orthogonaux et de même longueurs

Donnons un exercice proche de celui de la section A.3.2.

Énoncé.

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle, trois triangles équilatéraux BCA' , CAB' et ABC' et α , β et γ les centres respectifs des cercles circonscrits de ces triangles.

- (1) Montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral.
- (2) Pouvez-vous en proposer une preuve purement géométrique (sans les complexes) ?

Corrigé.

Correction en cours de rédaction pour l'année 2019-2020.

A.3.5. Problème sur le calcul de $\cos(2\pi/5)$ et de la construction du pentagone régulier

Énoncé.

Ce problème traite du calcul de $\cos(2\pi/5)$ et de la construction du pentagone régulier.

Pour tout ce problème, on considère le complexe z défini par

$$z = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \quad (\text{A.36})$$

et on pose

$$c = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \quad s = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right). \quad (\text{A.37})$$

(1) (a) Montrer que

$$z^5 = 1, \quad (\text{A.38})$$

puis que

$$z^3 = \bar{z}^2. \quad (\text{A.39})$$

(b) En déduire deux équations en c et s puis en déduire que

$$4c^2 + 2c - 1 = 0. \quad (\text{A.40})$$

(c) En déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \quad (\text{A.41})$$

(d) Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/5)$?

(2) On cherche dans cette question à tracer le pentagone à la règle et au compas, c'est-à-dire uniquement à partir d'une règle non graduée, d'un compas et d'un segment de référence qui représente la longueur unité.

(a) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer qu'à partir d'un segment de longueur 1 et d'un segment de longueur $1/2$, on peut construire la longueur $\sqrt{5}/2$.

(b) En déduire que la construction suivante (on se reportera à la figure A.4) permet de construire l'angle $2\pi/5$: on montrera que l'angle $\widehat{IOM_1}$ est égal à $2\pi/5$.

- tracer (OIJ) un repère orthonormé et I' le symétrique de I par rapport à O ;
- soit A le milieu de $[I'O]$ et \mathcal{L} le cercle de centre A et passant par J ;
- le cercle \mathcal{L} coupe la demi droite $[OI)$ en B ;
- C est le milieu de $[OB]$;
- la droite perpendiculaire à (OI) passant par C coupe le cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1) en M_1 , point d'ordonnée positive.

(c) En déduire la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle de côté un et tracer la construction sur votre copie.

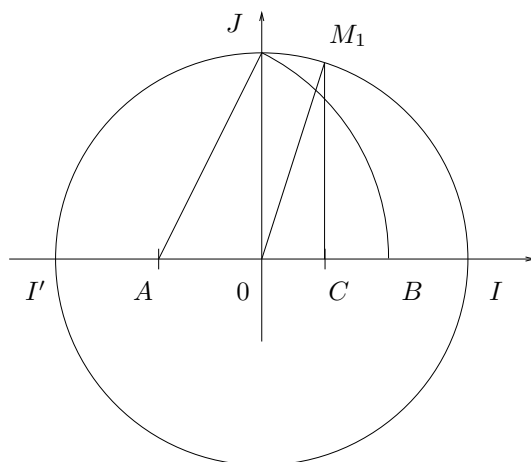
Corrigé.

(1) (a) Il est immédiat que

$$z^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = 1.$$

On pouvait aussi remarquer que z est une racine 5-ième de l'unité. Puisque $z^5 = 1$ et que z est non nul, on a

$$z^3 = \frac{1}{z^2}. \quad (\text{A.42})$$

FIGURE A.4. La construction de $2\pi/5$.

D'autre part, $|z| = 1$, ce qui s'écrit aussi

$$z = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Selon (A.42), on a donc

$$\boxed{z^3 = \bar{z}^2.} \quad (\text{A.43})$$

(b) En remplaçant z par $c + is$ dans (A.43) et en développant, on obtient

$$c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3 = c^2 - 2ics - s^2.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on a donc

$$\boxed{c^3 - 3cs^2 = c^2 - s^2,} \quad (\text{A.44})$$

et

$$\boxed{3c^2s - s^3 = -2cs.} \quad (\text{A.45})$$

Dans l'équation (A.45), on peut factoriser s et le simplifier, puisque $2\pi/5$ n'est pas un multiple de π . On obtient donc

$$3c^2 - s^2 + 2c = 0,$$

et en utilisant

$$s^2 = 1 - c^2, \quad (\text{A.46})$$

on obtient donc

$$\boxed{4c^2 + 2c - 1 = 0.} \quad (\text{A.47})$$

REMARQUE A.27. On pouvait aussi partir de l'équation (A.44) pour obtenir le même résultat, avec un petit plus de calculs.

(c) On résout l'équation du second degré (A.47) : ainsi

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \quad (\text{A.48})$$

Puisque $2\pi/5$ appartient à $[0, \pi/2]$, son cosinus est strictement positif et dans (A.48), on choisit l'unique racine positive. On a donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}. \quad (\text{A.49})$$

(d) De même, le sinus de $2\pi/5$ est strictement positif et de (A.46), on déduit

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}. \quad (\text{A.50})$$

(2) (a) Remarquons tout d'abord qu'il est immédiat de tracer le milieu d'un segment déjà construit ainsi qu'un angle droit, uniquement à la règle et au compas (en traçant une médiatrice par exemple).

L'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés égaux à 1 et $1/2$ est égale à $\sqrt{1+1/4} = \sqrt{5}/2$.

(b) Analysons les différents points de la construction proposée :

- premier point : rien à dire!
- d'après la question précédente, on a $AJ = \sqrt{5}/2$;
- par construction du cercle \mathcal{L} , on a donc

$$AB = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

- ainsi,

$$x_C = OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}(AB - AO) = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4};$$

- d'après (A.49), l'abscisse de M_1 est égale à $\cos(2\pi/5)$ et donc $\widehat{IOM_1} = 2\pi/5$.

(c) On reporte alors à l'aide du compas la corde IM_1 et on obtient les autres sommets M_2 , M_3 et M_4 du pentagone régulier, inscrit dans le cercle trigonométrique.

Voir figure A.5.

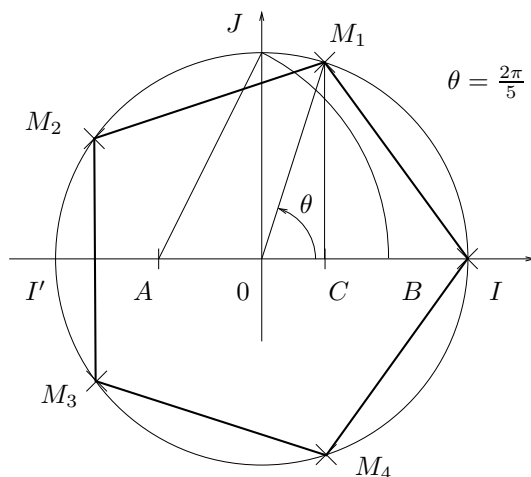


FIGURE A.5. La construction du pentagone.

Pour plus de détails sur les constructions à la règle et au compas (par exemple la construction d'un polygone régulier à 17 côtés!), sur la quadrature du cercle ou sur de nombreux problèmes de géométrie (par exemple la détermination du centre d'un cercle de rayon inconnu, uniquement au compas), on pourra consulter le très bon ouvrage [Car84] ou les deux références [Bod12b; Bod12a].

Compléments.

Le nombre $\cos(2\pi/5)$ est aussi lié au "nombre d'or", égal à $(1 + \sqrt{5})/2$ qui a des tas de propriétés géométriques et algébriques. Les curieux pourront consulter par exemple sur le web le site https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or ou plus généralement chercher à "nombre d'or" sur google, par exemple.

A.3.6. Problème sur un triangle et deux segments orthogonaux et de même longueurs

En cours de frappe

Énoncé.

Corrigé.

A.3.7. Problème sur un triangle équilatéral et un cercle coupé en trois parties égales

Énoncé.

- (1) Soit ABC un triangle équilatéral. On construit le demi-cercle de diamètre $[AC]$ extérieurement au triangle. On partage le diamètre $[AC]$ en trois portions de mêmes longueurs $[AF]$, $[FG]$ et $[GC]$. Les deux droites (BF) et (BG) découpent le demi-cercle en trois portions de cercles. Ces trois portions sont-elles de mêmes longueurs ?
- (2) Proposer une preuve purement géométrique. On "renversera" le problème : On construit le demi-cercle de diamètre $[AC]$ extérieurement au triangle et on partage ce demi-cercle en trois portions égales de cercles, en définissant les points F' et G' . Les deux droites (BF') et (BG') découpent le segment $[AC]$ en trois portions de segment. Les trois portions sont-elles de mêmes longueurs ?

Corrigé.

Exercice issu de la feuille d'exercice (exercice 27) de Christophe Jan dans http://833duparc.free.fr/Nouveaux_Exercices_MPSI/Nombres_Complexes.pdf

(1)

Montrons que les trois portions du demi-cercle sont de mêmes longueurs.

Voir la figure A.6 page suivante, faite sous matlab, grâce aux calculs proposés plus bas.

On choisit un repère de centre $O = B$ tel que $OA = 1$ avec les affixes des points A et B respectivement définies par

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= 0, \end{aligned}$$

et donc, puisque ABC est un triangle équilatéral, l'affixe de C est définie par

$$c = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

On préfère utiliser le nombre j , égal à la première racine cubique de l'unité non égale à 1, donnée par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a donc $c = -j^2$ et, puisque $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$c = 1 + j.$$

On en déduit l'affixe de F en écrivant

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

et donc

$$f = 1 + \frac{2}{3}(c - 1),$$

soit

$$f = 1 + \frac{2}{3}j. \tag{A.51a}$$

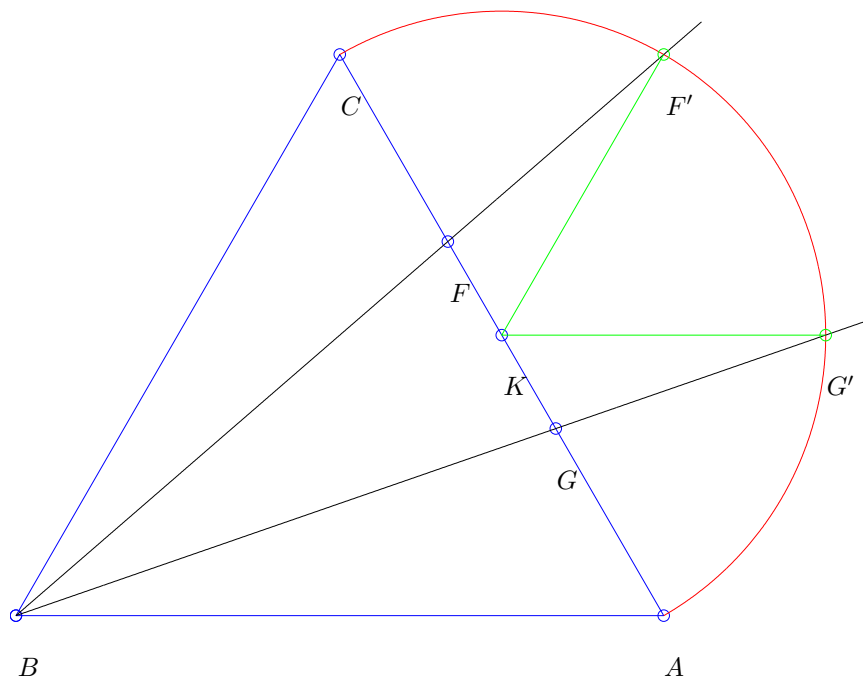


FIGURE A.6. Le triangle équilatéral ABC et les points G, K, F et F' et G' .

On en déduit de même les affixes respectives de G et de K données par

$$g = 1 + \frac{1}{3}j, \quad (\text{A.51b})$$

$$k = 1 + \frac{1}{2}j. \quad (\text{A.51c})$$

À partir de là, deux méthodes sont possibles. La première est numérique, plus facile, mais qui ne constitue pas à proprement parler une preuve.

- (a) Un point M appartient au cercle de diamètre $[AC]$ à l'extérieur de ABC ssi son affixe z vérifie

$$z - k = \frac{1}{2}e^{i\theta} \text{ où } \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]. \quad (\text{A.52})$$

Un point M appartient à la droite (BG) ssi son affixe z vérifie

$$z = Re^{i\alpha}, \quad (\text{A.53})$$

où $R > 0$ et

$$\alpha = \arg(g) = \arg\left(1 + \frac{1}{3}j\right). \quad (\text{A.54})$$

D'après (A.52) et (A.53) Il faut donc déterminer $R > 0$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ tels que

$$z = k + \frac{1}{2}e^{i\theta} = Re^{i\alpha}. \quad (\text{A.55})$$

Ce z étant calculé, on obtient donc l'affixe g' de G' donnée par

$$g' = z. \quad (\text{A.56})$$

On définit numériquement α grâce à (A.54), avec matlab par exemple. Pour résoudre numériquement (A.55), on remarque qu'elle implique

$$|Re^{i\alpha} - k| = \left| \frac{1}{2}e^{i\theta} \right| = \frac{1}{2},$$

et il nous faut résoudre l'équation en R :

$$|Re^{i\alpha} - k| - \frac{1}{2} = 0, \quad (\text{A.57})$$

ce que l'on peut faire avec matlab (de façon numérique, comportant un inévitable arrondi de calculs). On obtient deux solutions et on choisit la plus grande (la plus petite correspondant à un point dans le demi-cercle à l'intérieur de ABC). R étant calculé, on détermine alors z grâce à (A.55) et g' grâce à (A.56). On fait de même pour f' , l'afixe de F' . On vérifie ensuite numériquement, grâce à matlab par exemple que

$$\arg\left(\frac{c-k}{f'-k}\right) = \arg\left(\frac{f'-k}{g'-k}\right) = \arg\left(\frac{g'-k}{a-k}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad (\text{A.58})$$

ce qui permet de montrer que les deux droites $[BF]$ et $[BG]$ découpent le demi-cercle en trois portions de cercles de mêmes longueurs (aux points F' et G'). Cette preuve, faite à partir de calculs numérique de matlab, n'est pas une preuve à proprement parler, à cause des inévitables arrondis de calculs

- (b) Donnons maintenant la seconde preuve, rigoureuse. Cette façon de faire nous permettra d'explicitier f' et g' les affixes de F' et de G' , sans avoir à déterminer explicitement leurs arguments, ce qui n'est pas possible algébriquement. On sait que l'équation de la demi-droite $[BG]$ est

$$y = Ax, \text{ où } A \in \mathbb{R},$$

soit en complexe

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = A\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$

ce qui est équivalent à

$$z - \bar{z} = iAz + iA\bar{z},$$

et donc

$$z(1 - iA) = \bar{z}(1 + iA)$$

et donc

$$\bar{z} = Bz, \quad (\text{A.59})$$

où B est un complexe connu. Puisque la demi-droite $[BG]$ par G , d'afixe définie par (A.51b), on a donc

$$\bar{g} = Bg, \quad (\text{A.60})$$

et d'après (A.60) et (A.59), on a donc

$$\bar{z} = Bz \text{ où } B = \frac{\bar{g}}{g}. \quad (\text{A.61})$$

Enfin, l'équation du cercle de diamètre $[AC]$ et donc de centre K et de rayon $1/2$ est

$$KM^2 = \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire, si M est d'afixe z :

$$(z - k)(\bar{z} - \bar{k}) = \frac{1}{4}. \quad (\text{A.62})$$

L'affixe z de l'intersection de la demi-droite $[BG]$ et du cercle de diamètre $[AC]$ vérifie donc à la fois (A.61) et (A.62). Il faut donc résoudre ce système de deux équations à deux inconnues z et \bar{z} . Pour cela, on écrit, d'après (A.61), $\bar{z} = Bz$ que l'on réinjecte dans (A.62), ce qui donne

$$(z - k)(Bz - \bar{k}) = \frac{1}{4}, \quad (\text{A.63})$$

ce qui fournit une équation du second degré en z . On confie ce calcul à matlab symbolique qui trouve

$$5z^2 - iz^2\sqrt{3} - 9z + 5/2 + 1/2i\sqrt{3} = 0. \quad (\text{A.64})$$

On résoud cette équation en utilisant la section A.1.2 page 140. qui peut être simplifiée par l'utilisation de matlab symbolique! On obtient la solution de plus grande partie réelle (correspondant à celle qui est dans le demi-cercle extérieur à $[AC]$) :

$$g' = -7 \left(-5 + i\sqrt{3} \right)^{-1}. \quad (\text{A.65})$$

On fait de même pour le point F' . L'équation du second degré obtenue est donnée par

$$2z^2 - iz^2\sqrt{3} - 9/2z + 1 + 1/2i\sqrt{3} = 0. \quad (\text{A.66})$$

et on en déduit

$$f' = -7/2 \left(-2 + i\sqrt{3} \right)^{-1}. \quad (\text{A.67})$$

On utilise le résultat classique de la section A.3.1 page 147. On calcule alors les trois nombres complexes donnés par

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= k + jf' + j^2c, \\ \zeta_2 &= k + jg' + j^2f', \\ \zeta_3 &= k + ja + j^2g'. \end{aligned}$$

Ce calcul est confié à matlab symbolique qui trouve que ces trois nombres complexes sont nuls, ce qui prouve que les trois triangles $KF'C$, $KG'F'$ et KAG' sont équilatéraux, ce qui permet de conclure. Puisque tout le calcul a été confié à matlab symbolique, qui calcule algébriquement les expressions, cette preuve est donc tout à fait rigoureuse!

(2)

Montrons que les trois portions de $[AC]$ sont de mêmes longueurs, ce qui sera équivalent à démontrer que dans le problème initial les trois portions du demi-cercle sont de mêmes longueurs.

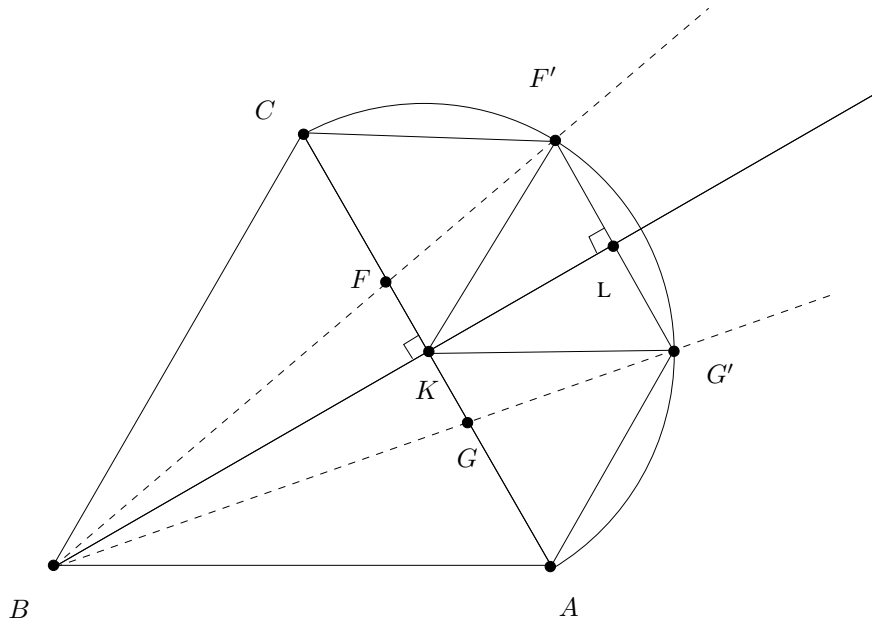
Voir la figure A.7 page suivante.

On trace donc F' et G' qui partagent le demi-cercle de diamètre $[AC]$ en trois portions de mêmes longueurs et on définit les points F et G comme intersections des droites (BF') et (BG') avec $[AC]$ (on peut montrer que ces intersection existent bien!). Notons que

$$\widehat{CKF'} = \widehat{F'KG'} = \widehat{G'KA} = \frac{\pi}{3}.$$

Les trois triangles CKF' , $F'KG'$ et $G'KA$, *a priori* isocèles sont donc équilatéraux. Par ailleurs, F' et G' sont symétriques par rapport à la droite (BK) . D'où $(F'G')$ est perpendiculaire à (BK) . Puisque (BK) est une hauteur du triangle équilatéral ABC , elle est perpendiculaire à (AC) et donc (AC) et $(F'G')$ sont parallèles. On note L , l'intersection de (BK) et de $(F'G')$. Ainsi, dans le triangle $F'LB$, d'après le théoème de Thalès, on a

$$\frac{FK}{F'L} = \frac{BK}{BL}. \quad (\text{A.68})$$

FIGURE A.7. Le triangle équilatéral ABC et les points G, K, F et F' et G' .

Dans le triangle équilatéral ABC , de côté, choisi, sans perte de généralité égal à 1, $[BK]$ est la médiane de (AC) , donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$BK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}},$$

et donc

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{A.69})$$

Le triangle équilatéral $F'KG'$ est deux fois plus petit que le triangle équilatéral ABC (puisque de côté $1/2$). Par symétrie, L est le milieu de $[F'G']$ et on a donc

$$F'L = \frac{1}{4}. \quad (\text{A.70})$$

Le triangle $F'KG'$ a aussi une hauteur $[KL]$ deux fois plus petite que $[BK]$ et, d'après (A.69), il vient donc

$$KL = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (\text{A.71})$$

On a donc, grâce à (A.68), (A.69), (A.70) et (A.71)

$$\begin{aligned}
 FK &= F'L \frac{BK}{BL}, \\
 &= F'L \frac{BK}{BK + KL}, \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}, \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}, \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{3}{4}},
 \end{aligned}$$

et donc

$$FK = \frac{1}{6}. \quad (\text{A.72})$$

Par symétrie, on en déduit que

$$KG = \frac{1}{6}. \quad (\text{A.73})$$

Par symétrie, on a aussi

$$CF = GA. \quad (\text{A.74})$$

On a donc, selon (A.72), (A.73) et (A.74)

$$1 = CA = CF + FK + KG + GA = 2CF + \frac{1}{3},$$

et donc

$$CF = \frac{1}{3}, \quad (\text{A.75})$$

et donc, en utilisant (A.74)

$$GA = \frac{1}{3}, \quad (\text{A.76})$$

et, enfin, grâce à (A.72) et (A.73), on a

$$FG = FK + KG = \frac{2}{6},$$

et donc

$$FG = \frac{1}{3}, \quad (\text{A.77})$$

Finalement, grâce à (A.75), (A.76) et (A.77), on a montré que le segment $[AC]$ est partagé en trois portions de segment de mêmes longueurs.

Cette preuve géométrique, fondée sur des triangles équilatéraux, les théorèmes de Thalès et de Pythagore, est donc plus simple que son homologue complexe !

Une formule de trigonométrie amusante

Pour a, b et c réels, on a,

$$a + b + c = \pi \implies \sin^3 a \cos(b - c) + \sin^3 b \cos(c - a) + \sin^3 c \cos(a - b) = 3 \sin a \sin b \sin c. \quad (\text{B.1})$$

Plusieurs preuves sont proposées. Les deux premières sont purement informatiques (sous matlab), tandis que les deux dernières sont manuelles. Notons aussi que les variantes 2 et 3 peuvent être utilisées pour montrer toute expression trigonométrique, puisqu'elles ramènent celles-ci à une égalité de polynôme (mais qu'elles ne permettent pas d'en trouver la forme!).

PREUVE AVEC MATLAB SYMBOLIQUE (VERSION 1).

Il suffit de taper sous matlab

```
syms a b c;
c=pi-a-b;
S=(sin(a))^3*cos(b-c)+(sin(b))^3*cos(c-a)+(sin(c))^3*cos(a-b)-3*sin(a)*sin(b)*sin(c);
disp(simplify(expand(S)));
```

ou (voir) et lancer le script `preuve_formule_rigolote1.m`, disponible à l'adresse ouaib du cours. On obtiendra donc bien $S = 0$. □

PREUVE AVEC MATLAB SYMBOLIQUE (VERSION 2). On pose

$$c = \pi - a - b$$

et on utilise les formules d'Euler (2.28). En posant

$$\begin{aligned} A &= e^{ia}, \\ B &= e^{ib}, \end{aligned}$$

il vient donc

$$\sin a = \frac{1}{2i} (e^{ia} - e^{-ia})$$

et donc

$$\sin a = \frac{1}{2i} \left(A - \frac{1}{A} \right). \quad (\text{B.2})$$

De même

$$\sin b = \frac{1}{2i} \left(B - \frac{1}{B} \right). \quad (\text{B.3})$$

De même, on a, en ne conservant que a et b et donc A et B :

$$\begin{aligned} \cos(b - c) &= \cos(b + a + b - \pi), \\ &= -\cos(2b + a), \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{i(a+2b)} + e^{-i(a+2b)} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\cos(b - c) = -\frac{1}{2} \left(AB^2 + \frac{1}{AB^2} \right). \quad (\text{B.4})$$

On a aussi

$$\cos(a - c) = \cos(a + a + b - \pi) = -\cos(2a + b),$$

et donc

$$\cos(a - c) = -\frac{1}{2} \left(A^2 B + \frac{1}{A^2 B} \right). \quad (\text{B.5})$$

On a aussi

$$\sin c = \sin(\pi - a - b) = -\sin(-a - b) = \sin(a + b)$$

et donc

$$\sin c = \frac{1}{2i} \left(AB - \frac{1}{AB} \right). \quad (\text{B.6})$$

Enfin, on a

$$\cos(a - b) = \frac{1}{2} \left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} \right).$$

et donc

$$\cos(a - b) = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right). \quad (\text{B.7})$$

Compte tenu de (B.2), (B.3), (B.4), (B.5), (B.6) et (B.7), on peut donc exprimer le terme de gauche de (B.1) uniquement en fonction d'une fraction rationnelle en A et B . On montre donc que la différence entre les deux termes de (B.1) vaut

$$P = (1/(2i)^3/2) [-(A - 1/A)^3(B^2 A + 1/(B^2 A)) - (B - 1/B)^3(A^2 B + 1/(A^2 B)) + (AB - 1/(AB))^3(A/B + B/A) - 3 \times 2(A - 1/A)(B - 1/B)(AB - 1/(AB))]. \quad (\text{B.8})$$

On peut utiliser matlab en tapant :

`syms A B;`

`P = -(A-1/A)^3*(B^2*A+1/(B^2*A)) - (B-1/B)^3*(A^2*B+1/(A^2*B)) + ...`

`(A*B-1/(A*B))^3*(A/B+B/A) - 3*2*(A-1/A)*(B-1/B)*(A*B-1/(A*B));`

`disp(simplify(expand(P)));`

ou (voir) et lancer le script `preuve_formule_rigolote2.m`, disponible à l'adresse ouaib du cours. On obtiendra donc bien $P = 0$. \square

PREUVE MANUELLE (VERSION 3). Cette preuve reprend la précédente (version 2), sans s'appuyer sur matlab symbolique. L'égalité (B.1) est encore équivalente à

$$a + b + c = \pi \implies (2i)^3 \sin^3(a)(2 \cos(b - c)) + (2i)^3 \sin^3(b)(2 \cos(c - a)) + (2i)^3 \sin^3(c)(2 \cos(a - b)) = 6(2i \sin(a))(2i \sin(b))(2i \sin(c)). \quad (\text{B.9})$$

Reprenons les différentes étapes de la version 2.

On pose toujours

$$c = \pi - a - b,$$

et

$$A = e^{ia},$$

$$B = e^{ib},$$

D'après (B.2), on a donc

$$(2i) \sin a = A - \frac{1}{A}. \quad (\text{B.10})$$

De même, on obtient

$$(2i) \sin b = B - \frac{1}{B}, \quad (\text{B.11})$$

et (B.6) donne

$$(2i) \sin c = AB - \frac{1}{AB}. \quad (\text{B.12})$$

On en déduit, après réduction au même dénominateur que le membre de droite de (B.9) est donné par

$$6(2i \sin(a))(2i \sin(b))(2i \sin(c)) = \frac{N}{D}, \quad (\text{B.13a})$$

où

$$N = 6A^4B^4 - 6A^4B^2 - 6A^2B^4 + 6A^2 + 6B^2 - 6, \quad (\text{B.13b})$$

$$D = A^2B^2. \quad (\text{B.13c})$$

On fait maintenant de même pour les trois termes de gauche de (B.9). Les équations (B.4) et (B.10) nous donnent

$$(2i)^3 \sin^3(a)(2 \cos(b-c)) = \left(A - \frac{1}{A}\right)^3 \left(AB^2 + \frac{1}{AB^2}\right), \quad (\text{B.14})$$

et donc, après simplification,

$$(2i)^3 \sin^3(a)(2 \cos(b-c)) = \frac{N_1}{D_1}, \quad (\text{B.15a})$$

où

$$N_1 = -A^8B^4 + 3A^6B^4 - A^6 - 3A^4B^4 + 3A^4 + A^2B^4 - 3A^2 + 1, \quad (\text{B.15b})$$

$$D_1 = A^4B^2. \quad (\text{B.15c})$$

De même, les équations (B.11) et (B.5) fournissent,

$$(2i)^3 \sin^3(b)(2 \cos(a-c)) = \left(B - \frac{1}{B}\right)^3 \left(A^2B + \frac{1}{A^2B}\right) \quad (\text{B.16})$$

et donc, après simplification,

$$(2i)^3 \sin^3(b)(2 \cos(a-c)) = \frac{N_2}{D_2}, \quad (\text{B.17a})$$

où

$$N_2 = -A^4B^8 + 3A^4B^6 - 3A^4B^4 + A^4B^2 - B^6 + 3B^4 - 3B^2 + 1, \quad (\text{B.17b})$$

$$D_2 = A^2B^4. \quad (\text{B.17c})$$

Enfin, on obtient de même, après simplification,

$$(2i)^3 \sin^3(c)(2 \cos(a-b)) = \frac{N_3}{D_3}, \quad (\text{B.18a})$$

où

$$N_3 = A^8B^6 + A^6B^8 - 3A^6B^4 - 3A^4B^6 + 3A^4B^2 + 3A^2B^4 - A^2 - B^2, \quad (\text{B.18b})$$

$$D_3 = A^4B^4. \quad (\text{B.18c})$$

Bref, compte tenu de (B.13), (B.15), (B.17) et (B.18), on obtient

$$\begin{aligned} & - (2i)^3 \sin^3(a)(2 \cos(b-c)) - (2i)^3 \sin^3(b)(2 \cos(c-a)) - (2i)^3 \sin^3(c)(2 \cos(a-b)) \\ & \qquad \qquad \qquad + 6(2i \sin(a))(2i \sin(b))(2i \sin(c)) = \frac{N_0}{D_0}, \end{aligned}$$

où

$$N_0 = NB^2A^2 - N_1B^2 - N_2A^2 - N_3,$$

et après simplification, on obtient donc bien

$$N_0 = 0.$$

□

PREUVE PUREMENT MANUELLE (VERSION 4).

Merci à Dominique Sandri pour la rédaction de cette preuve!

On suppose que

$$a + b + c = \pi \tag{B.19}$$

Montrons que

$$\sin^3 a \cos(b - c) + \sin^3 b \cos(c - a) + \sin^3 c \cos(a - b) = 3 \sin a \sin b \sin c. \tag{B.20}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x,$$

cela revient à montrer que

$$\begin{aligned} 3 \sin a \sin b \sin c &= \frac{3}{4} [\sin a \cos(b - c) + \sin b \cos(c - a) + \sin c \cos(a - b)] \\ &\quad - \frac{1}{4} [\sin 3a \cos(b - c) + \sin 3b \cos(c - a) + \sin 3c \cos(a - b)]. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en montrant les deux relations suivantes :

$$\sin 3a \cos(b - c) + \sin 3b \cos(c - a) + \sin 3c \cos(a - b) = 0, \tag{B.21}$$

$$\sin a \cos(b - c) + \sin b \cos(c - a) + \sin c \cos(a - b) = 4 \sin a \sin b \sin c. \tag{B.22}$$

Montrons ces deux relations.

DÉMONSTRATION DE (B.21). On a

$$\begin{aligned} \sin 3a \cos(b - c) + \sin 3b \cos(c - a) + \sin 3c \cos(a - b) &= \sin(3\pi - 3b - 3c) \cos(b - c) + \sin(3\pi - 3c - 3a) \cos(c - a), \\ &\quad + \sin(3\pi - 3a - 3b) \cos(a - b), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sin 3a \cos(b - c) + \sin 3b \cos(c - a) + \sin 3c \cos(a - b) &= \sin(3b + 3c) \cos(b - c) + \sin(3c + 3a) \cos(c - a) \\ &\quad + \sin(3a + 3b) \cos(a - b). \end{aligned} \tag{B.23}$$

On pose :

$$\frac{p + q}{2} = 3b + 3c, \quad \frac{p - q}{2} = b - c,$$

et donc

$$p = 4b + 2c, \quad q = 2b + 4c.$$

On obtient

$$\begin{aligned} 2 \sin(3b + 3c) \cos(b - c) &= 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}, \\ &= \sin p + \sin q = \sin(4b + 2c) + \sin(2b + 4c). \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} 2 \sin(3c + 3a) \cos(c - a) &= \sin(4c + 2a) + \sin(2c + 4a), \\ 2 \sin(3a + 3b) \cos(a - b) &= \sin(4a + 2b) + \sin(2a + 4b). \end{aligned}$$

D'où, (B.23) devient :

$$\sin 3a \cos(b-c) + \sin 3b \cos(c-a) + \sin 3c \cos(a-b) = \frac{1}{2} [\sin(4b+2c) + \sin(2c+4a) + \sin(4a+2b) + \sin(2b+4c) + \sin(4c+2a) + \sin(2a+4b)].$$

Posons

$$p = 4b + 2c, \quad q = 2c + 4a,$$

et donc

$$\frac{p+q}{2} = 2b + 2c + 2a = 2\pi, \quad \frac{p-q}{2} = 2b - 2a.$$

On obtient alors

$$\sin(4b+2c) + \sin(2c+4a) = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} = 2 \sin 2\pi \cos(2b-2a) = 0.$$

On obtient de même :

$$\sin(4a+2b) + \sin(2b+4c) = 0, \quad \sin(4c+2a) + \sin(2a+4b) = 0.$$

On obtient finalement la relation (B.21) :

$$\sin 3a \cos(b-c) + \sin 3b \cos(c-a) + \sin 3c \cos(a-b) = 0$$

□

DÉMONSTRATION DE (B.22). On a

$$\sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b) = \sin(\pi - (b+c)) \cos(b-c) + \sin(\pi - (a+c)) \cos(c-a) + \sin(\pi - (a+b)) \cos(a-b)$$

et donc

$$\sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b) = \sin(b+c) \cos(b-c) + \sin(a+c) \cos(c-a) + \sin(a+b) \cos(a-b)$$

Posons :

$$\frac{p+q}{2} = b+c, \quad \frac{p-q}{2} = b-c,$$

et donc

$$p = 2b, \quad q = 2c.$$

On obtient

$$2 \sin(b+c) \cos(b-c) = \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} = \sin p + \sin q = \sin 2b + \sin 2c.$$

De même, on obtient :

$$2 \sin(a+c) \cos(c-a) = \sin 2a + \sin 2c, \quad 2 \sin(a+b) \cos(a-b) = \sin 2b + \sin 2a.$$

Donc (B.22) devient :

$$\begin{aligned}
 & \sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b) \\
 &= \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c, \\
 &= 2 \sin a \cos a + 2 \sin b \cos b + 2 \sin c \cos c, \\
 &= 2 \sin a \cos(\pi - (b+c)) + 2 \sin b \cos(\pi - (a+c)) + 2 \sin c \cos(\pi - (a+b)), \\
 &= -2 \sin a \cos(b+c) - 2 \sin b \cos(a+c) - 2 \sin c \cos(a+b), \\
 &= -2 \sin a \cos b \cos c + 2 \sin a \sin b \sin c - 2 \sin b \cos a \cos c + 2 \sin b \sin a \sin c \\
 &\quad - 2 \sin c \cos a \cos b + 2 \sin c \sin a \sin b,
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b) &= -2 \sin a \cos b \cos c - \\
 &\quad 2 \sin b \cos a \cos c - 2 \sin c \cos a \cos b + 6 \sin a \sin b \sin c. \quad (\text{B.24})
 \end{aligned}$$

Montrons que

$$\sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b = \sin a \sin b \sin c. \quad (\text{B.25})$$

On a

$$\begin{aligned}
 0 &= \sin \pi = \sin(a+b+c), \\
 &= \sin((a+b)+c), \\
 &= \sin(a+b) \cos c + \cos(a+b) \sin c, \\
 &= (\sin a \cos b + \sin b \cos a) \cos c + (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \sin c, \\
 &= \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne (B.25) puis avec (B.24), la relation (B.22) :

$$\sin a \cos(b-c) + \sin b \cos(c-a) + \sin c \cos(a-b) = 4 \sin a \sin b \sin c,$$

Ceci montre le résultat. □

On consultera les URL suivantes :

- Pour (B.21) : <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?2,19194,19194,quote=1>
- Pour (B.25) : <http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20101023042615AACnyth>

□

PREUVE « NATURELLE » ?

En remarquant que a , b et c sont les trois angles d'un triangle, essayer de mettre la quantité de gauche de (B.1) sous la forme d'un produit vectoriel ? Un cadeau à celui qui trouve !! □

Comportement d'une série entière au bord de convergence

Cette annexe est en partie issue et adaptée de [RDO88, Chapitre 3], enrichi d'extraits de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf> et <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/DN.pdf>

C.1. Rappels sur le rayon de convergence

LEMME C.1 (Lemme d'Abel). *Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe tel que la suite $a_n z_0^n$ soit bornée. Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z_0^n| \leq M. \quad (\text{C.1})$$

Si $z = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on écrit pour tout z tel que $|z| < |z_0|$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| = \left| a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n z_0^n \right|$$

et donc, de (C.1) déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| \leq M r^n \text{ où } r = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1.$$

La série géométrique de terme général r^n est convergente et d'après ce qui précède, la série de terme général $a_n z^n$ est donc absolument convergente. \square

THÉORÈME C.2 (Définition et propriété du rayon de convergence).

À toute série entière $\sum_n a_n z^n$, on peut associer un unique réel $R \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ qui possède les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout z tel que $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.
- (2) Pour tout z tel que $|z| > R$, la série de terme général $a_n z^n$ est grossièrement divergente (avec $|a_n z^n|$ non bornée).

DÉMONSTRATION.

- (1) Montrons l'existence de R .

Soit \mathcal{A} l'ensemble des nombres positifs r tel que la suite $a_n r^n$ est bornée. Cet ensemble est non vide, car il contient zéro et il possède donc une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, notée R .

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$.

- (a) Supposons que $|z| < R$. Par définition de R , il existe r tel $|z| \leq r < R$ et donc la suite $a_n r^n$ est bornée. D'après le lemme d'Abel C.1, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.
- (b) Supposons que $|z| > R$. La série de terme général $a_n z^n$ est divergente, sans quoi $a_n |z|^n$ serait bornée et on aurait $|z| \in \mathcal{A}$ en contradiction avec $|z| > R$. Dans ce cas, la suite $a_n |z|^n$ n'est donc pas bornée. Il y a divergence grossière.

(2) L'unicité de R est évidente.

□

Pour déterminer en pratique R , on utilise les formules d'Hadamard ou de d'Alembert (voir les lemmes 2.4 page 14 et 2.5 page 14).

C.2. Rappels sur le comportement d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence

THÉORÈME C.3. Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et un nombre $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < R$. Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur $D_f(0, r)$.

DÉMONSTRATION. En effet,

$$\sup_{|z| \leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n,$$

et comme $r < R$, la série de terme général $|a_n| r^n$ est convergente.

Cela prouve aussi le lemme 2.3 page 14.

□

On déduit de la convergence uniforme que

THÉORÈME C.4. La somme d'une série entière est continue en tout point de son disque de convergence.

C.3. Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence

Le bord du disque de convergence est le cercle de centre O et de rayon R , appelé cercle de convergence.

Sur ce cercle de convergence, nous allons voir que tout peut arriver (voir exemple C.8 page 170).

Commençons par donner les clés de cette section : la transformation d'Abel (qui correspondrait à une "intégration par partie discrète") et les règles d'Abel, issues par exemple de [RDO87, section 1.3.2], rappelées ci dessous dans les lemmes C.5, C.6 et C.7.

LEMME C.5 (Transformation d'Abel).

Soient trois suites d'éléments de \mathbb{C} , notées $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n = \alpha_n b_n$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k. \quad (\text{C.2})$$

Alors, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=1}^p a_{n+k} = \sum_{k=1}^p (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}. \quad (\text{C.3})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire par définition :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad b_{n+k} = B_{n+k} - B_{n+k-1}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p a_{n+k} &= \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} b_{n+k}, \\ &= \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} (B_{n+k} - B_{n+k-1}), \\ &= \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} B_{n+k-1}, \end{aligned}$$

on pose $k' = k - 1$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k'=0}^{p-1} \alpha_{n+k'+1} B_{n+k'}, \\
&= \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{n+k+1} B_{n+k}, \\
&= \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} B_{n+k} - \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k+1} B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}, \\
&= \sum_{k=1}^p (\alpha_{n+k} B_{n+k} - \alpha_{n+k+1} B_{n+k}) - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}, \\
&= \sum_{k=1}^p (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}.
\end{aligned}$$

□

De la transformation d'Abel (C.3), on déduit les deux règles d'Abel C.6 et C.7.

LEMME C.6 (Règle d'Abel I).

Pour que la série de terme général $a_n = \alpha_n b_n$ converge, il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

- (1) La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (C.2) est bornée ;
- (2) La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 0 pour limite ;
- (3) La série de terme général $|\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ est convergente.

De plus, dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k. \quad (\text{C.4})$$

DÉMONSTRATION. La version de la preuve faite dans [RDO87, section 1.3.2] utilise le critère de Cauchy. Présentons une preuve légèrement alternative, sans ce critère, désormais hors programme !

Appliquons la transformation d'Abel (C.2) aux trois suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n = \alpha_n b_n$. Avec (C.2), on a donc pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=1}^p a_{n+k} = \sum_{k=1}^p (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n+k} - \alpha_{n+1} B_n + \alpha_{n+p+1} B_{n+p}.$$

Cette égalité est en fait valable aussi pour $n = -1$ (par convention $B_{-1} = 0$), ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^p a_{k-1} = \sum_{k=1}^p (\alpha_{k-1} - \alpha_k) B_{k-1} + \alpha_p B_{p-1}.$$

ce qui donne en posant $k' = k - 1$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p-1} a_k = \sum_{k=0}^{p-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k + \alpha_p B_{p-1}. \quad (\text{C.5})$$

La série de terme général $(\alpha_n - \alpha_{n+1}) B_n$ est absolument convergente puisque, d'après l'hypothèse 1, il existe M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) B_n| \leq M |\alpha_n - \alpha_{n+1}|,$$

et l'hypothèse 3 assure la convergence de la série de terme général $|\alpha_n - \alpha_{n+1}|$. De plus, les hypothèses 1 et 2 impliquent que la limite de $\alpha_p B_{p-1}$ est nulle. D'après (C.5), on peut donc passer à la limite quand p tend vers l'infini et obtenir la convergence de la série de terme général a_n et (C.4). \square

LEMME C.7 (Règle d'Abel II).

Le lemme C.6 est vrai si on remplace la condition 3 par

$$\text{la suite } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est réelle et décroissante.} \quad (\text{C.6})$$

DÉMONSTRATION. En effet, si (C.6) est satisfaite, on a, pour tout k :

$$|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \alpha_k - \alpha_{k+1}$$

et pour tout n :

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \alpha_0 - \alpha_{n+1}.$$

La série de terme général $|\alpha_k - \alpha_{k+1}|$ est donc convergente, de somme α_0 . \square

EXEMPLE C.8. Soit un réel α . Considérons la série entière $\sum_n a_n z^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{n^\alpha}. \quad (\text{C.7})$$

On a, pour tout n :

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln(1 + \frac{1}{n})},$$

qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Le rayon de convergence est donc égal à $R = 1$.

On se place maintenant au bord du disque de convergence, où $|z| = 1$. On a donc

$$\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha},$$

et les cas suivants :

- (1) Si $\alpha \leq 0$, il y a divergence grossière car $1/n^\alpha$ ne tend pas vers zéro. Il y a donc divergence sur tout le cercle de convergence.
- (2) Si $0 < \alpha \leq 1$, elle converge en tout point du cercle de convergence distinct de 1. Voir en effet l'exemple C.9.
- (3) Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue en tout point du cercle de convergence (critère de Riemann) et donc en tout point du disque $D_f(O, 1)$.

Ce ne sont d'ailleurs pas les seuls types de comportements possibles.

EXEMPLE C.9. Étudions la série entière définie par $\sum_n a_n z^n$ avec a_n défini par (C.7) sur le cercle de convergence dans le cas où $0 < \alpha \leq 1$. Il suffit donc de considérer un réel t et d'étudier la série de terme général \tilde{a}_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{a}_n = \frac{e^{int}}{n^\alpha}. \quad (\text{C.8})$$

Remarquons tout d'abord que si α_n est une suite de réels positifs, décroissante et admetant 0 comme limite, alors la série de terme général $\alpha_n e^{int}$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Il suffit en effet d'appliquer le lemme C.6 page précédente. En effet, on a, en posant $b_k = e^{ikt}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

et donc

$$\begin{aligned} |B_n| &= \left| \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right|, \\ &\leq \frac{2}{|e^{it} - 1|}, \\ &= \frac{2}{|e^{it/2}| |e^{it/2} - e^{-it/2}|}, \\ &= \frac{1}{|\sin(t/2)|}. \end{aligned}$$

On déduit donc de cela la convergence de la série de terme général \tilde{a}_n en choisissant $\alpha_n = 1/n^\alpha$.

On peut aussi déduire de tout cela, le comportement des séries réelles de terme général $\cos(nt)/n^\alpha$ et $\sin(nt)/n^\alpha$. Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, la première série diverge et la seconde est nulle. Si $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, les deux séries sont convergentes. Plus de détails dans [RDO87, section 1.3.2 p.18].

EXEMPLE C.10. On retrouve ainsi le cas classique des séries réelles alternées. Plus de détails dans [RDO87, section 1.3.3]

EXEMPLE C.11. En particulier, si on considère la série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n$, on constate que son rayon vaut 1. Si $z = 1$, elle diverge. Si $z = -1$, elle converge (série alternée) et sinon, elle converge (voir exemple C.8 page précédente avec $\alpha = 1$).

Donnons maintenant un résultat fondamental, le Théorème d'Abel (à ne pas confondre avec le lemme d'Abel C.1 page 167 ni avec les deux règles d'Abel C.6 page 169 et C.7).

THÉORÈME C.12 (Théorème d'Abel).

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et z_0 un nombre complexe de module R tel que la série $\sum_n a_n z_0^n$ converge. Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$, c'est-à-dire, l'ensemble des nombres complexes de la forme tz_0 avec $t \in [0, 1]$.

REMARQUE C.13. Remarquons que cela implique le résultat suivant (puisque la convergence uniforme entraîne la continuité sur $[0, z_0]$ et donc en particulier la continuité en z_0 si t s'approche de z_0 en restant sur $[0, z_0]$) : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et z_0 un nombre complexe de module R tel que la série $\sum_n a_n z_0^n$ converge. Alors

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0, 1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n. \quad (\text{C.9})$$

DÉMONSTRATION DIRECTE DE (C.9). Remarquons que par changement de variable

$$Z = \frac{z}{z_0}, \quad (\text{C.10})$$

on peut supposer sans perte de généralité que

$$z_0 = 1. \quad (\text{C.11})$$

Notons

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \quad (\text{C.12})$$

Soit donc $t \in [0, 1]$. Appliquons de nouveau la transformation d'Abel (C.2) appliquée au couple de suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\alpha_n = t^n$ et $b_n = a_n$ et raisonnons comme dans les premières pages concernant la preuve du Théorème 2.2 de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/bordddudisque.pdf>. En notant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

on a

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=1}^p a_{n+k} t^{n+k} = \sum_{k=1}^p (t^{n+k} - t^{n+k+1}) B_{n+k} - t^{n+1} B_n + t^{n+p+1} B_{n+p}.$$

et donc

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=1}^p a_{n+k} t^{n+k} = (1-t) \sum_{k=1}^p t^{n+k} B_{n+k} - t^{n+1} B_n + t^{n+p+1} B_{n+p} \quad (\text{C.13})$$

Cette égalité est en fait valable aussi pour $n = -1$ (par convention $B_{-1} = 0$), ce qui donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^p a_{k-1} t^{k-1} = (1-t) \sum_{k=1}^p t^{k-1} B_{k-1} - t^0 B_{-1} + t^p B_{p-1},$$

ce qui donne en posant $k' = k - 1$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p-1} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{p-1} t^k B_k + t^p B_{p-1}. \quad (\text{C.14})$$

Supposons maintenant que $t \in [0, 1[$. On sait que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k t^k$ tend vers $f(t)$ si p tend vers l'infini. De plus, la somme B_{p-1} est bornée (car elle a pour limite $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$) et donc $t^p B_{p-1}$ tend vers zéro quand p tend vers l'infini. De cela et de (C.14) on déduit donc que la série de terme général $t^k B_k$ converge et à la limite $p \rightarrow \infty$, on obtient donc

$$\forall t \in [0, 1[, \quad f(t) = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k B_k. \quad (\text{C.15})$$

On écrit l'égalité classique

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}. \quad (\text{C.16})$$

On déduit donc de (C.15) et (C.16)

$$\forall t \in [0, 1[, \quad f(t) - S = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k B_k - (1-t) S \sum_{k=0}^{+\infty} t^k,$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1[, \quad f(t) - S = (1-t) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (B_k - S) t^k \right), \quad (\text{C.17})$$

avec la convergence de la série de terme général $(B_k - S)t^k$. Une fois que l'on a obtenu l'égalité (C.17), on conclut rapidement. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. En effet, puisque par définition

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n - S = 0,$$

il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |B_n - B| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et, d'après (C.17)

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1[, \quad |f(t) - S| &\leq (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} |B_k - B| t^k, \\ &\leq (1-t) \sum_{k=N}^{+\infty} |B_k - B| t^k + (1-t) \sum_{k=0}^N |B_k - B| t^k, \\ &\leq (1-t) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N}^{+\infty} t^k + (1-t) \sum_{k=0}^N |B_k - B| t^k, \end{aligned}$$

On a aussi, grâce à (C.16)

$$\forall \in [0, 1[, \quad (1-t) \sum_{k=N}^{+\infty} t^k \leq (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = 1,$$

et finalement (puisque c'est aussi vrai pour $t = 1$)

$$\forall \in [0, 1], \quad |f(t) - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-t) \sum_{k=0}^N |B_k - B| t^k, \quad (\text{C.18})$$

L'entier N étant désormais fixé, l'application $t \mapsto (1-t) \sum_{k=0}^N |B_k - B| t^k$ tendant vers zéro quand t tend vers 1, on a donc

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [1-\eta, 1], \quad (1-t) \sum_{k=0}^N |B_k - B| t^k \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et de (C.18) on tire finalement

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [1-\eta, 1], \quad |f(t) - S| \leq \varepsilon.$$

REMARQUE C.14. La convergence de la série de terme $t^k B_k$ et le résultat (C.15) peuvent être en fait obtenus directement via l'équation (C.4) qui donne en effet ici

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1[, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (t^k - t^{k+1}) B_k, \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} t^k B_k, \end{aligned}$$

et la convergence de la série de terme général $t^k B_k$.

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME C.12. Comme précédemment, on peut supposer sans perte de généralité que (C.11) a lieu.

Il existe deux types de preuves légèrement différentes. La première utilise le critère de Cauchy uniforme et la transformation d'Abel (C.3). On renvoie à la preuve de [RDO88, section 3.1.3.2].

La seconde preuve, n'utilise pas directement le critère de Cauchy uniforme. Elle consiste à montrer que le reste R_N de la somme $\sum_n a_n z^n$ tend uniformément vers zéro quand z appartient à $[0, 1]$ quand N tend vers l'infini (une convergence ayant lieu indépendamment de z). C'est la preuve faite dans les premières pages concernant la preuve du Théorème 1 de de <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/DN.pdf> et que nous allons présenter

On considère, pour tout $t \in [0, 1]$, $R_n(t)$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k t^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k, \quad (\text{C.19})$$

qui est défini pour $t < 1$ comme pour $t = 1$, compte tenu des hypothèses faites, et R_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k. \quad (\text{C.20})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \quad (\text{C.21})$$

- (1) Remarquons que si la série $\sum_n a_n z_0^n = \sum_n a_n$ converge absolument, le résultat est immédiat. En effet, on a pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout n et Q

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^Q a_k t^k \right| &\leq \sum_{k=n}^Q |a_k t^k|, \\ &\leq \sum_{k=n}^Q |a_k| |t^k|, \\ &\leq \sum_{k=n}^Q |a_k|, \end{aligned}$$

on peut faire ensuite faire tendre Q vers l'infini puisque la série de $\sum_n a_n$ converge absolument, on obtient

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k t^k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|,$$

ce qui donne donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |R_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|, \quad (\text{C.22})$$

qui tend uniformément vers zéro quand t appartient à $[0, 1]$ quand N tend vers l'infini (une convergence ayant lieu indépendamment de t).

Plus rapidement encore, il suffit d'écrire que la série de fonction de terme général $a_n t^n$ converge normalement sur $[0, 1]$ (puisque $|a_n t^n| \leq |a_n|$) et donc uniformément.

- (2) Remarquons que si la série $\sum_n a_n$ est une série alternée, la preuve est, dans ce cas, simplifiée. Dans ce cas, la convergence n'est plus normale mais uniforme. On procède en effet comme on avait déjà fait dans la section T.2 page 281 et le résultat (T.1). On remarque que, pour tout $t \in [0, 1]$, la série de terme général $a_n t^n$ est aussi alternée puisque (il suffit de faire l'étude pour $t \neq 0$)

$$\frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} t,$$

et donc $a_n t^n$ est bien de la forme $\pm |a_n t^n| (-1)^n$. On a aussi

$$\left| \frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} t \right| \leq 1,$$

et donc la suite $|a_n t^n|$ est décroissante. Comme la suite a_n tend vers zéro, il en est de même pour la suite $a_n t^n$. On peut donc majorer le reste de la série de terme général $a_n x^t$ par le premier terme négligé :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \left| R_N(t) \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n \right| \leq |a_{N+1} t^{N+1}| \leq |a_{N+1}|.$$

La série de terme général $a_n t^n$ converge donc uniformément sur $[0, 1]$.

- (3) On se place maintenant dans le cas où la série $\sum_n a_n z_0^n = \sum_n a_n$ converge sans hypothèse supplémentaire. Il va falloir utiliser la transformation d'Abel (C.3). Donnons ici une preuve un peu plus simple où on utilise directement une transformation adaptée. On écrit directement d'après (C.19) pour tout

$t \in [0, 1[$ et pour tout $(q, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $q \leq p$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^p a_k t^k &= \sum_{k=q}^p (R_k - R_{k+1}) t^k, \\ &= \sum_{k=q}^p R_k t^k - \sum_{k=q}^p R_{k+1} t^k, \end{aligned}$$

puis on pose dans la seconde somme $k' = k + 1$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=q}^p R_k t^k - \sum_{k'=q+1}^{p+1} R_{k'} t^{k'-1}, \\ &= \sum_{k=q}^p R_k t^k - \sum_{k=q+1}^{p+1} R_k t^{k-1}, \\ &= \sum_{k=q}^p R_k t^k - \sum_{k=q}^p R_k t^{k-1} + R_q t^{q-1} - R_{p+1} t^p, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \text{ tel que } q \leq p, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k = \sum_{k=q}^p R_k t^{k-1} (1-t) + R_q t^{q-1} - R_{p+1} t^p,$$

et donc

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \text{ tel que } q \leq p, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=q}^p R_k t^{k-1} + R_q t^{q-1} - R_{p+1} t^p. \quad (\text{C.23})$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après (C.21), il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{C.24})$$

Il vient donc (puisque $t \leq 1$) selon (C.23) :

$$\forall p \geq q, \quad \forall q \geq N, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \left((1-t) \sum_{k=q}^p t^{k-1} + 2 \right). \quad (\text{C.25})$$

Enfin, on écrit pour tout $t < 1$:

$$\begin{aligned} (1-t) \sum_{k=q}^p t^{k-1} &\leq (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puisque cela est aussi valable pour $t = 1$ (tout est nul), on a donc d'après (C.25)

$$\forall p \geq q, \quad \forall q \geq N, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=q}^{p-1} a_k t^k \right| \leq \varepsilon \quad (\text{C.26})$$

On peut faire tendre p vers l'infini et on obtient

$$\forall q \geq N, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |R_q(t)| \leq \varepsilon$$

soit encore la convergence uniforme.

□

L'égalité (C.9) est utile en pratique, quand il est plus facile de voir la limite de f que la somme de la série. Voir les exemples qui suivent.

EXEMPLE C.15. On peut déduire de l'égalité (C.9) le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2), \quad (\text{C.27})$$

résultat qui avait été démontré dans la section T.2 page 281 et le résultat (T.1). Il suffit de remarquer que la série entière de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ a un rayon égal à 1 et est égale à $\ln(1+x)$ sur $[0, 1[$ dans \mathbb{R} ou égale à $\text{Ln}(1+z)$ sur le disque de convergence en enlevant l'axe \mathbb{R}_- . Voir la proposition 2.38 page 26. Par ailleurs, on sait que la série de terme général $(-1)^{n-1}/n$ converge (série alternée ou voir l'exemple C.8 page 170). De (C.9) et $a_n = (-1)^{n-1}/n$ avec $n \geq 1$, on déduit donc

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0, 1[}} \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

dont découle (C.27) par continuité du logarithme en 2.

EXEMPLE C.16. On peut déduire de l'égalité (C.9) le résultat suivant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{C.28})$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente (série alternée). Pour cela, on considère la fonction arctan dont le développement en série entière est

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

ce qui peut se vérifier par exemple en utilisant la dérivée de arctan qui est $1/(1+x^2)$. On raisonne exactement comme dans l'exemple C.15 et en utilisant $\arctan(1) = \pi/4$.

EXEMPLE C.17. On peut déduire de l'égalité (C.9) les résultats suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \cup]-1, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 2^\alpha, \quad (\text{C.29a})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \cup \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 0. \quad (\text{C.29b})$$

- (1) Remarquons que si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors à partir de $n = \alpha + 1$, tous les termes de la somme de (C.29a) sont nuls et il faut donc montrer que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 2^\alpha. \quad (\text{C.30})$$

Cela vient tout simplement de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\text{C.31})$$

Le développement de la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \end{aligned}$$

et on trouve le résultat en prenant $x = 1$. On fait de même pour montrer (C.29b) mais en choisissant $x = -1$.

- (2) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, aucun des coefficients des sommes (C.29) n'est nul. On considère de nouveau la fonction f dont on sait que le développement en série entière est donné par

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \quad (\text{C.32})$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Or, on a, pour tout n :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!} \times \left(\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right)^{-1}, \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)} \frac{n!}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1}, \quad (\text{C.33})$$

et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

La formule de d'Alembert donne donc un rayon de convergence égal à $R = 1$.

- (a) Étudions tout d'abord la convergence de la série de terme général a_n . D'après (C.33) pour tout n assez grand (tel que $n > \alpha$), on a $\alpha - n < 0$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \alpha \implies a_{n+1}a_n < 0. \quad (\text{C.34})$$

Enfin, d'après (C.33), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \alpha \implies \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n-\alpha}{n+1}, \quad (\text{C.35})$$

et donc, pour n tendant vers l'infini, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{n-\alpha}{n+1} &= \frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}}, \\ &= \left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}, \\ &= \left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \left(1-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \\ &= 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 - \frac{1+\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (\text{C.36})$$

De (C.36), on peut déduire [RDO87, Proposition du cas "douteux" p. 14 de la section 1.2.3] qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|a_n| \sim \frac{A}{n^{1+\alpha}}. \quad (\text{C.37})$$

On peut aussi déduire de (C.35)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > -1 \text{ et } n > \alpha \implies \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1. \quad (\text{C.38})$$

Ainsi, on en déduit :

- (i) si $\alpha > -1$, alors la suite de terme $|a_n|$ tend vers zéro. De plus, d'après (C.38), elle est décroissante. Enfin, d'après (C.34), le signe de a_n (pour $n > \alpha$) est $\pm(-1)^n$. La série de terme général a_n est donc une série alternée et donc convergente (voir par exemple [RDO87, section 1.3.3]).
- (ii) Au contraire, si $\alpha \leq -1$, alors la suite a_n ne tend pas vers zéro et la série de terme général ne saurait converger.

Bref, la série de terme général a_n converge ssi $\alpha > -1$. Dans ce cas, on applique (C.9) avec $x = 1$ et on obtient (C.29a).

- (b) Étudions maintenant la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$. Dans ce cas, (C.33) est remplacé par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{n+1} a_{n+1}}{(-1)^n a_n} = \frac{n - \alpha}{n + 1},$$

et donc

$$\text{Pour tout } n \geq \alpha, \quad (-1)^n a_n \text{ est signe constant.} \quad (\text{C.39})$$

L'équation (C.37) est toujours valable. Dans ce cas, la série de terme général $(-1)^n a_n$, de signe constant, est donc convergente ssi $\alpha > 0$. Dans ce cas, si on choisit $x = -1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = (1-1)^\alpha$$

et donc (C.29b).

EXEMPLE C.18. On peut déduire de l'égalité (C.9) les résultats suivant :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (\text{C.40a})$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \quad (\text{C.40b})$$

Or, on connaît les valeurs connues des deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{C.41a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (\text{C.41b})$$

Voir par exemple (T.45) et (T.46) et l'établissement ces formules par exemple la section T.3 page 284 par les séries de Fourier ou plus subtilement dans la section T.4 ou encore plus élégant dans la section T.5 page 299. On a donc explicité les valeurs des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{C.42a})$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \frac{\pi^2}{12}. \quad (\text{C.42b})$$

Pour montrer (C.40), on considère la série entière définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (\text{C.43})$$

dont le rayon de convergence vaut $R = 1$, ce que l'on détermine en utilisant la formule de d'Alembert. On a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n^2},$$

et donc

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (\text{C.44})$$

On sait aussi que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \quad (\text{C.45})$$

Ainsi, d'après (C.44) et (C.45)

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x),$$

et donc pour tout $c \in]-1, 1[$ tel que l'intervalle $[c, 1]$ ne contienne pas zéro :

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\}, \quad f(x) = f(c) - \int_c^x \frac{\ln(1-u)}{u} du.$$

la fonction $\frac{\ln(1-u)}{u}$ est en fait prolongeable par continuité en zéro et on peut donc écrire en prenant $c = 0$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u} du. \quad (\text{C.46})$$

et donc puisque $f(0) = 0$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u} du. \quad (\text{C.47})$$

Les séries de terme général $\frac{1}{n^2}$ et $(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ sont convergente et on peut déduire de l'égalité (C.9) par passage à la limite quand $x \rightarrow 1$ dans (C.47) l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(1) = - \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du$$

et en faisant $x \rightarrow -1$ dans (C.47), on obtient l'égalité suivante :

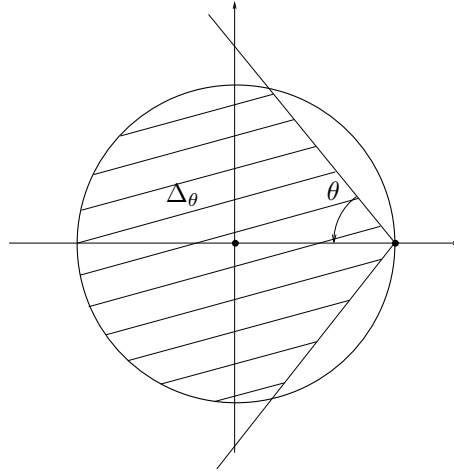
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -f(1) = \int_0^{-1} \frac{\ln(1-u)}{u} du,$$

et on transforme la dernière intégrale en posant $v = -u$.

REMARQUE C.19. La fonction définie par (C.47) est appelée le dilogarithme. Voir par exemple <https://fr.wikipedia.org/wiki/Dilogarithme>.

Nous reprendrons les exemples C.15, C.16 et C.18 plus rapidement plus tard, sans avoir à montrer la convergence de la série de terme général a_n .

Voici maintenant une version un peu plus forte du théorème C.12 page 171 et de (C.13), le théorème d'Abel non-tangentiel, qui est présenté dans le cas $z_0 = 1$ et $R = 1$ mais qui se généralise pour z_0 et R fini quelconque en faisant le changement de variable (C.10).

FIGURE C.1. Δ_θ .

THÉORÈME C.20 (Théorème d'Abel non-tangentiel).

Soit une série entière $\sum_a a_n z^n$ de rayon 1 et de somme f sur le disque de convergence, $D(0,1)$ Soient $\theta \in [0, \pi/2[$ et Δ_θ (voir figure C.1) défini par

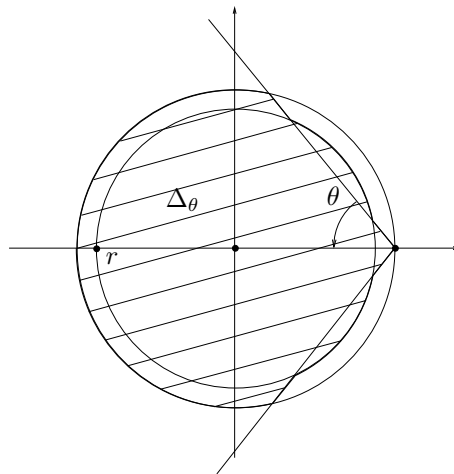
$$\Delta_\theta = \{1 - \rho e^{i\phi}, \quad \rho > 0, \quad \phi \in [-\theta, \theta]\} \cap D(0,1) \quad (\text{C.48})$$

Si la série de terme général a_n converge, alors

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \quad (\text{C.49})$$

DÉMONSTRATION. On renvoie aux pages 3 et 4 de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/bordddudisque.pdf>, elle-même inspirées de [Gou20] et [ZQ13]. \square

REMARQUE C.21. On parle aussi parfois du théorème de continuité en "bec de canard" en élargissant Δ_θ

FIGURE C.2. Δ_θ^r .

en le remplaçant par Δ_θ^r pour tout $r \in [0, 1[$ défini par

$$\Delta_\theta^r = \Delta_\theta \cup D(0, r),$$

comme le montre la figure C.2.

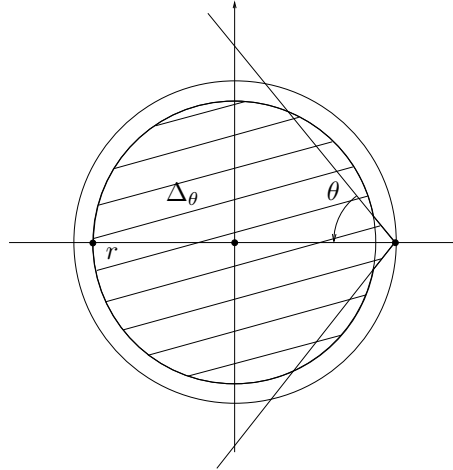


FIGURE C.3. $\tilde{\Delta}_\theta^r$.

De plus, dans ce cas, la fonction f est uniformément continue sur

$$\tilde{\Delta}_\theta^r = (\Delta_\theta \setminus \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}) \cup D_f(0, r).$$

représenté sur la figure C.3.

Venons-en maintenant au problème beaucoup plus délicat, la réciproque. En se plaçant sans perte de généralité en $z_0 = 1$ et en prenant $R = 1$, on suppose que la série entière $\sum_n a_n z^n$ de somme f a un rayon égal à R et que la limite de $f(t)$ quand t tend vers 1 en restant sur $[0, 1[$ existe et vaut l . On se demande alors d'une part si la série de terme général converge et d'autre part si sa somme vaut l . Si la série converge, sa somme est nécessairement l , d'après tout ce qui précède.

On donne la définition suivante :

DÉFINITION C.22 (Série Abel-sommable).

Soit une série de terme général a_n . Elle est dite Abel-sommable si la série entière $\sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à un 1 et si la fonction f de la variable réelle $t \in [0, 1[$ définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (\text{C.50})$$

admet une limite finie quand t tend vers un par valeurs strictement inférieures.

On pourra supposer $R = 1$, car le cas $R > 1$ est immédiat, par convergence uniforme.

On a déjà vu précédemment que l'existence de la série de terme général a_n entraîne son aspect Abel-sommable avec

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0, 1[}} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Maintenant, on se demande si l'Abel-sommabilité entraîne la convergence de la série de terme général a_n .

EXEMPLE C.23. Les séries des exemples C.15, C.16 et C.17, sont Abel-sommables et correspondent à des cas où la série de terme général a_n converge.

Cependant, assurément, sans hypothèses supplémentaires sur les a_n , cette réciproque est fautive, c'est-à-dire que la série de terme général a_n ne converge pas.

EXEMPLE C.24. Les exemples de la section C.4 le prouvent. Les séries entières $\sum_n a_n t^n$, $\sum_n b_n t^n$ et $\sum_n c_n t^n$ (qui peuvent aussi être définies sur \mathbb{C}) données

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n, \quad (\text{C.51a})$$

$$b_n = (-1)^{n+1}n, \quad (\text{C.51b})$$

$$c_n = n. \quad (\text{C.51c})$$

ont un rayon de convergence égal à 1. Les sommes $A(t) = \sum_n a_n t^n$, $B(t) = \sum_n b_n t^n$ et $C(t) = \sum_n c_n t^n$ sont données par

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad A(t) = \frac{1}{1+t}, \quad (\text{C.52a})$$

$$B(t) = \frac{t}{(1+t)^2}, \quad (\text{C.52b})$$

$$C(t) = \frac{t}{(t-1)^2}. \quad (\text{C.52c})$$

Les deux premières séries sont Abel-sommables mais pas la dernière puisque l'on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0,1[}} A(t) = \frac{1}{2}, \quad (\text{C.53a})$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0,1[}} B(t) = \frac{1}{4}, \quad (\text{C.53b})$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0,1[}} C(t) = +\infty. \quad (\text{C.53c})$$

Il est clair que les séries de terme général respectivement égal à a_n , b_n et c_n ne convergent pas puisque a_n est bornée mais ne tend pas vers zéro, b_n et c_n ne sont pas bornées.

Tout d'abord, remarquons que la série de terme général c_n est en fait gérée par le théorème suivant, qui est un cas trivial de série non Abel-sommable :

THÉORÈME C.25.

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose que la série de terme général a_n diverge et que, pour tout n , $a_n \geq 0$. On a alors

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = +\infty. \quad (\text{C.54})$$

DÉMONSTRATION. Voir Théorème 2 p. 2 de <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/DN.pdf>

Notons

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k,$$

et

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k.$$

Soit $A > 0$. Puisque la série de terme général a_n diverge, il existe un entier N tel que

$$\sum_{k=0}^N a_k = g_N(1) \geq A + 1.$$

Pour ce N fixé, comme la fonction g_N est continue en 1 et croissante sur \mathbb{R} (car les a_n sont positifs), il existe η tel que

$$\forall t \in [1 - \eta, 1], \quad 0 \leq g_N(1) - g_N(t) < 1,$$

et donc

$$\forall t \in [1 - \eta, 1], \quad g(t) \geq g_N(t) = g_N(1) - (g_N(1) - g_N(t)) \geq A + 1 - 1 = A,$$

ce qui montre (C.54). \square

Donnons maintenant enfin un théorème permettant d'assurer que l'Abel-sommabilité entraîne la convergence de la série :

THÉORÈME C.26 (Tauber, 1897, Théorème "faible").

Si la série de terme général a_n est Abel-sommable et vérifie

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{C.55})$$

alors la série de terme général a_n converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n. \quad (\text{C.56})$$

DÉMONSTRATION. On renvoie à la démonstration du théorème 3.1 de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf> elle-même issue de [Gou20]. \square

Finissons enfin un théorème beaucoup plus fort où on affaiblit (C.55) :

THÉORÈME C.27 (Théorème "fort" de Tauber, dit Théorème O de Hardy-Littlewood (1911)).

Si la série de terme général a_n est Abel-sommable et vérifie

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{C.57})$$

alors la série de terme général a_n converge et (C.56) a lieu.

DÉMONSTRATION. On renvoie à la démonstration beaucoup plus technique du théorème 3.2 de <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tuntr932/borddudisque.pdf> elle-même issue de [Gou20] et surtout de [Tos]. \square

EXEMPLE C.28. Grâce au théorème C.27, on peut reprendre les exemples C.15, C.16 et C.18. sans avoir à vérifier *a priori* la convergence de la série de terme général a_n qui est assurée ! Pour l'exemple C.17, on laisse au lecteur vérifier le soin que l'hypothèse (C.57) n'est vraie que pour $\alpha > 0$ donc que pour la preuve de (C.29b). Le cas $\alpha > -1$ et la preuve de (C.29a) n'est plus couvert par ce théorème C.27 et il faut raisonner en montrant à la main la preuve de la série de terme général a_n , comme montré dans l'exemple C.17.

C.4. Des faux paradoxes fondés sur l'Abel-sommabilité

Nous donnons un exercice et son corrigé, illustrant les notions vues précédemment.

Énoncé

(1) On tient le raisonnement suivant.

(a) Posons

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

On écrit

$$-A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

et en ajoutant 1

$$1 - A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = A.$$

Ainsi, $1 - A = A$ et donc

$$A = \frac{1}{2}.$$

(b) Posons

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

On a d'après la définition de A

$$\begin{aligned} B - A &= (1 - 1) + (-2 + 1) + (3 - 1) + (-4 + 1) + (5 - 1) + (-6 + 1) + \dots, \\ &= 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots, \\ &= -B. \end{aligned}$$

Ainsi $B - A = -B$ et $B = A/2$ et donc, d'après ce qui précède

$$B = \frac{1}{4}.$$

(c) Enfin, posons

$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

On a

$$\begin{aligned} C - B &= (1 - 1) + (2 + 2) + (3 - 3) + (4 + 4) + (5 - 5) + (6 + 6) + \dots, \\ &= 4(1 + 2 + 3 + \dots), \\ &= 4C. \end{aligned}$$

Ainsi, $C - B = 4C$ et $C = -B/3$ et donc, d'après ce qui précède

$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Montrer pourquoi ce raisonnement n'est pas correct.

Attention, hormis la propriété (C.58), les techniques de cet exercice, utilisées pour expliquer un paradoxe, ne doivent pas être utilisées dans un contexte "académique".

(2) (a) En adaptant le calcul présenté et sans calculer explicitement les séries entières suivantes, déterminez-les :

$$\begin{aligned} \text{on pose pour tout } x \in]-1, 1[, \quad A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \\ B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n, \\ C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n, \end{aligned}$$

et donner un sens aux sommes définies ci-dessus.

(b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une série absolument convergente. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (\text{C.58a})$$

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $(a_n x^n)$ est supérieur à 1, que f est définie et continue sur $[-1, 1]$ et en particulier que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \leq 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (\text{C.58b})$$

Cela revient à adopter la définition C.22 page 181.

- (c) On suppose maintenant que la série de terme général a_n n'est plus nécessairement convergente, mais que la fonction f définie par (C.58a) sur tout l'intervalle $[-1, 1]$ est définie et continue.

La méthode de sommation d'Abel consiste à écrire que la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est alors formellement définie grâce à l'égalité (C.58b).

Conclure sur les valeurs de sommes A , B et C données dans le raisonnement problématique de la question (1).

Corrigé

- (1) On manipule des sommes infinies qui n'existent pas.

- (2) (a) On vérifie que les trois rayons de convergence des séries entières introduites sont égaux à 1 et on peut donc faire tous les calculs souhaités si x appartient à $] - 1, 1[$, en remarquant que les sommes sont absolument convergentes, à x fixé. Reprenons les calculs présentés en introduisant la variable x , appartenant donc à $] - 1, 1[$ et qui sont donc, cette fois-ci, tout à fait valables !

- (i) Posons

$$A(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

On écrit

$$\begin{aligned} -A(x) &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n, \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n, \\ &= -1 + x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}, \\ &= -1 + x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \\ &= -1 + xA(x), \end{aligned}$$

et en ajoutant 1

$$1 - A(x) = xA(x)$$

Ainsi, $1 = A(x) + xA(x)$ et donc

$$A(x) = \frac{1}{1+x}. \quad (\text{C.59})$$

Formellement, si on remplace x par 1, ce qu'on n'a pas le droit de faire en toute rigueur, puisque la somme n'existe pas, on retrouve donc le 1/2 annoncé.

REMARQUE C.29. On peut aussi se passer du raisonnement incorrect et calculer directement A en écrivant, pour x dans $] - 1, 1[$,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

mais ce n'était pas le but de cet exercice !

(ii) Posons

$$B(x) = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n.$$

On a d'après la définition de $A(x)$

$$-A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n,$$

et donc, pour x non nul,

$$\begin{aligned} B(x) - A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n (n+1), \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1} (n+1), \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (n), \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (n), \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n (n), \\ &= -\frac{1}{x} B(x), \end{aligned}$$

Ainsi $B(x) - A(x) = -B(x)/x$ et $B(x) = xA(x)/(x+1)$ et donc, d'après ce qui précède

$$B(x) = \frac{x}{(1+x)^2}. \tag{C.60}$$

Cette égalité est encore valable pour $x = 0$. Formellement, si on remplace x par 1, ce qu'on n'a pas le droit de faire en toute rigueur, puisque la somme n'existe pas, on retrouve donc le 1/4 annoncé.

REMARQUE C.30. Comme dans la remarque C.29, on peut aussi se passer du raisonnement incorrect et calculer directement B en écrivant, pour x dans $] -1, 1[$

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^n, \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n-1}, \\ &= -x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)x^n. \end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)x^n$$

Par intégration, à une constante additive près (ce qui est valide pour les séries entières sur l'intervalle de convergence)

$$\begin{aligned} \int \tilde{B}(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \frac{x^{n+1}}{n+1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^{n+1}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - 1, \\ &= \frac{1}{1+x} - 1, \end{aligned}$$

et par dérivation

$$\tilde{B}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

D'après ce qui précède, on retrouve bien (C.60), puisque

$$B(x) = x \times \frac{1}{(1+x)^2},$$

mais ce n'était pas le but de cet exercice!

(iii) Enfin, posons

$$C(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

On a

$$\begin{aligned}
 C(x) - B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n nx^n, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n (1 + (-1)^n), \\
 &= \sum_{\substack{n=0, \\ n \text{ pair}}}^{\infty} 2nx^n, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 4nx^{2n}, \\
 &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n}, \\
 &= 4C(x^2).
 \end{aligned}$$

Ainsi, $C(x) - B(x) = 4C(x^2)$ et

$$C(x) - 4C(x^2) = B(x) \tag{C.61}$$

Formellement, si on remplace x par 1, ce qu'on n'a pas le droit de faire en toute rigueur, puisque la somme n'existe pas, on aurait donc $-3C(1) = C(1) - 4C(1) = B(1)$ et donc, puisqu'on a montré formellement que $B(1) = 1/4$, on aurait donc $C(1) = -B(1)/3 = -1/12$.

REMARQUE C.31. Comme dans la remarque C.29 et C.30, on pourrait aussi se passer du raisonnement incorrect et calculer directement C en dérivant et en intégrant pour x dans $] -1, 1[$ et obtenir l'expression explicite de C . Posons en effet

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

et donc

$$C(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{C(x)}{x} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} n \int x^{n-1} dx, \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \\
 &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \\
 &= -1 - \frac{1}{x-1},
 \end{aligned}$$

et par dérivation,

$$C(x) = \frac{x}{(x-1)^2}. \tag{C.62}$$

On peut aussi écrire, de façon alternative, d'après (C.60) :

$$\begin{aligned} C(-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^n, \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} x^n, \\ &= -B(x), \\ &= -\frac{x}{(x+1)^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$C(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

et on retrouve donc bien (C.62). Ici, on ne peut plus passer à la limite quand x tend vers 1, car

$$\lim_{x \rightarrow 1} C(x) = +\infty. \quad (\text{C.63})$$

- (iv) Reprenons les calculs pour faire apparaître le $-1/12$. Il suffit de considérer l'expression de C donnée par (C.61) qui donne

$$C(x) - 4C(x^2) = B(x),$$

et "en trichant", en oubliant (C.63), on fait tendre x vers 1 ce qui donne si la limite de $C(x)$ en 1 existait, d'après (C.60) :

$$-3 \lim_{x \rightarrow 1} C(x) = \lim_{x \rightarrow 1} B(x) = \frac{1}{4},$$

ce qui donnerait

$$\lim_{x \rightarrow 1} C(x) = -\frac{1}{12}. \quad (\text{C.64})$$

D'autres auteurs, pour faire apparaître la valeur donnée par (C.64), suggèrent de poser $x = e^{-t}$, de considérer $t > 0$ et de faire tendre t vers zéro par valeurs strictement positives. D'après (C.62), on a donc pour tout $t > 0$:

$$G(x) = C(e^{-t}) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t} - 1)^2}. \quad (\text{C.65})$$

On vérifie aisément que l'on a le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\frac{t^2 e^{-t}}{(e^{-t} - 1)^2} = 1 - \frac{1}{12} t^2 + o(t^2),$$

et donc

$$\frac{e^{-t}}{(e^{-t} - 1)^2} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{t^2} + o(1), \quad (\text{C.66})$$

On retrouve donc en faisant tendre t vers zéro que l'on a (C.63). De plus, d'après (C.65) et (C.66), on retrouve en "oubliant" le terme $\frac{1}{t^2}$ la valeur donnée par (C.64).

- (b) Puisque la série (a_n) est absolument convergente, $|a_n|$ est bornée et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n|$. D'après le lemme d'Abel du cours, le rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1. Ainsi, la fonction f , comme somme de la série entière, est C^∞ sur $] -1, 1[$. En revanche, on ne peut rien dire sur f en 1 et -1 , *a priori*. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Puisque, la série (a_n) est absolument convergente, $f(\varepsilon)$ existe. De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n|$. La série $(a_n x^n)$ est donc

normalement convergente et sa somme est donc continue sur $[-1, 1]$. En particulier, f est définie et continue sur $[-1, 1]$ et en particulier $f(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \leq 1}} f(x)$ et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \leq 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (\text{C.67})$$

REMARQUE C.32. Cette propriété est aussi vraie si la série (a_n) est une série alternée, voire même une série convergente. Voir théorème C.12 page 171

(c) (i) D'après (C.59), on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \leq 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \leq 1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

et donc, on peut poser, au sens d'Abel :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2},$$

et on retrouve donc le $1/2$ annoncé.

(ii) De même, d'après (C.60), on peut poser, comme dans l'énoncé, $B = 1/4$.

(iii) Voir le point 2(a)iv page précédente et notamment (C.64).

REMARQUE C.33. Quelques citations extraites de l'Internet sur ces paradoxes.

- (1) On pourra consulter une note de Jérôme Germoni, disponible sur http://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=pmi:sommes_infinies_paradoxales.pdf, pour mieux comprendre ce qui est relatif au calcul de C .

"Le vrai miracle, ce n'est pas tant de pouvoir donner une valeur à une somme infinie qui diverge : c'est que plusieurs méthodes donnent la même valeur. L'expliquer et trouver des méthodes systématiques, c'est un chapitre amusant de l'analyse – que je ne connais pas d'ailleurs. On parle de procédés de resommation : ils consistent à trouver des valeurs finies cachées sous des infinis que l'on met sous le tapis. Fantaisie de mathématicien ? Pas du tout ! La théorie de la renormalisation en physique quantique consiste à appliquer des procédés de ce genre et conduit à la meilleure coïncidence de toute la physique entre une prédiction théorique et une valeur expérimentale pour la constante de structure fine $\alpha \approx 1/137$.

Voir

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Renormalisation>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_structure_fine

Sur les somme de séries divergentes, voir aussi

https://fr.wikipedia.org/wiki/Série_divergente#Méthodes_de_sommation_d'Abel

https://fr.wikipedia.org/wiki/Sommation_de_Cesàro"

- (2) Donnons, pour conclure, un extrait de <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?5,983951,986057,quote=1>

"Jean Lismonde : Le résultat que tu exhibes $1/12$ et qui faisait "la une" du New-York Times en début d'année 2014 provient de la relation fonctionnelle qui existe entre la série de Riemann définie pour $x > 1$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

et celle des entiers naturels alternés à savoir

$$\zeta_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

soit

$$\zeta(x) = \frac{\zeta_a(x)}{1 - 2^{1-x}}.$$

Il s'agit d'une relation qui permet de prolonger pour $x < 1$ la fonction ζ sachant que ζ_a est elle définie sur \mathbb{R} . On sait que $\zeta_a(-1) = 1/4$ que l'on obtient directement ou par le théorème de Cesàro. On en déduit immédiatement le prolongement de ζ pour $x = 1$ soit $1/12$."

(3) Extrait de

<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?5,983951,986057,quote=1>

"Pour ma part, je l'ai croisée pour la première fois lors d'une étude sur l'effet Casimir. Cet effet (qui n'a rien à voir avec l'île aux Enfants) a été prédit par le physicien hollandais Hendrik Casimir, et prévoit que deux plaques parallèles conductrices placées dans le vide vont s'attirer à cause des fluctuations de l'énergie du vide (énergie dont je parlais dans ce billet).

Et pour calculer la force subie par les plaques, on utilise l'égalité $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12!$ Et ça marche, car cette force a été mesurée expérimentalement !

Mais il existe une autre branche de la physique où cette égalité joue un rôle essentiel, il s'agit de la fameuse théorie des cordes. Comme vous le savez peut-être, cette théorie affirme nous vivons dans un monde à 26 dimensions (ou 10 ou 11, c'est selon). Les cordistes aiment dire que c'est ce que "prédit" la théorie, mais la réalité est un peu différente : ce nombre de dimensions n'est pas une prédiction de la théorie, mais plutôt un prérequis pour que la théorie ait mathématiquement un sens.

J'ai déjà eu l'occasion d'évoquer cette histoire (dans ce billet), mais en gros ce qu'il faut savoir, c'est que si vous essayez de construire une théorie des cordes en dimension $D = 4$, ça ne marche pas, car on trouve plein d'infinis partout. On pourrait être tentés d'abandonner l'idée, sauf qu'un jour quelqu'un a remarqué que les infinis disparaissaient si on choisissait $D = 26$. Et c'est comme ça que les théoriciens des cordes, pour sauver leur belle théorie, ont décidé de se placer en dimension $D = 26$ et de continuer l'aventure comme si de rien n'était.

Mais au fait, pourquoi $D = 26$ est-elle la dimension magique dans laquelle la théorie marche sans que les infinis apparaissent ? Si on fait le détail du calcul, on trouve que le terme infini qui fout le bazar est en fait proportionnel à

$$\left[1 + \frac{D-2}{2}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots) \right]$$

Or si vous observez cette équation deux minutes, et que vous admettez que $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$, vous remarquez que tout ce terme devient nul pour $D = 26$, et les infinis disparaissent de la théorie ! Voilà d'où vient le nombre magique, appelé "dimension critique"."

Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$ (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe la redéfinition des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$, sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (Automne 2019) :

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2.

(1) On rappelle que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad (\text{D.1a})$$

et que formellement

$$i = \sqrt{-1}. \quad (\text{D.1b})$$

On écrit donc successivement

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i \times i = i^2 = -1$$

et donc

$$\boxed{1 = -1.}$$

Où est la faute commise ?

(2) (a) Montrer que l'application $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de la partie Q de \mathbb{C} définie par

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right[\right\} \quad (\text{D.2})$$

sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(b) Montrer que si l'on pose

$$\tilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right[\right\}, \quad (\text{D.3})$$

alors f_n est une bijection de \tilde{Q} sur \mathbb{C} .

(c) En déduire qu'il est légitime de noter $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et que l'on a

$$\forall z \in Q, \quad \forall \zeta \in U, \quad \zeta = z^n \iff z = \zeta^{\frac{1}{n}} \quad (\text{D.4})$$

et

$$\forall z \in \tilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \iff z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{D.5})$$

(d) Retrouver la définition de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(3) (a) (i) Dans le cas où $n = 2$, écrire, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions z de l'équation

$$z^2 = \zeta \quad (\text{D.6})$$

en fonction de $\sqrt[2]{\zeta}$, noté comme dans le cas réel, $\sqrt{\zeta}$, et commenter.

(ii) Calculer, de deux façons différentes, $\sqrt{1+i}$.

- (b) Généraliser au cas $n \geq 2$ quelconque les résultats de la question (3(a)i) et commenter.
- (4) Montrer que $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, avec la définition de la question 2c coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, à condition d'étendre le logarithme complexe à \mathbb{R}_- (voir remarque 2.34 page 23 et 2.42 page 28.)
- (5) Lever alors le paradoxe de la question 1

Corrigé

On pourra aussi consulter l'exercice de TD 5.16, où on utilise aussi la fonction $\sqrt{\cdot}$. Attention, dans cet exercice 5.16, la coupure du logarithme, utilisée, n'est pas \mathbb{R}_- . Une autre convention, aussi utilisée dans [AF03], y est utilisée.

On pourra aussi consulter le TP 1.4, en lien avec ces calculs.

- (1) La faute commise est l'utilisation de la formule

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad (\text{D.7})$$

qui n'est valable que dans le cas où a et b sont des réels positifs. On verra plus bas qu'il est légitime de parler de la racine d'un complexe, moyennant certaines précaution. Ainsi, l'équation

$$i = \sqrt{-1}. \quad (\text{D.8})$$

est correcte. Cependant, nous expliquerons aussi pourquoi le fait d'écrire

$$\sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}, \quad (\text{D.9})$$

n'est en revanche pas correct. Nous expliquerons aussi comment rendre ce calcul correct.

- (2) (a) Par définition, pour tout $z \in \mathcal{Q}$, on a

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right[. \quad (\text{D.10})$$

On a donc

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta},$$

qui appartient bien au plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, puisque θ est dans $] -\pi, \pi[$.

Réciproquement, si $z \in U$, on a

$$z = Re^{i\phi}, \quad R > 0, \quad \phi \in]-\pi, \pi[. \quad (\text{D.11})$$

Montrons qu'il existe un unique $\zeta \in \mathcal{Q}$ tel que

$$\zeta^n = z. \quad (\text{D.12})$$

On a

$$\zeta = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right[. \quad (\text{D.13})$$

Ainsi, (D.12) est équivalent à

$$\begin{aligned} r^n &= R, \\ n\theta &\equiv \phi [2\pi]. \end{aligned}$$

Puisque $n\theta$ et ϕ appartiennent tous les deux à $] -\pi, \pi[$, ils sont égaux et on a donc

$$r = \sqrt[n]{R}, \quad (\text{D.14a})$$

$$\theta = \frac{\phi}{n}, \quad (\text{D.14b})$$

ce qui définit bien unique $\zeta \in \mathcal{Q}$ vérifiant (D.12) Ainsi l'application $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de la partie \mathcal{Q} de \mathbb{C} définie par

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right[\right\} \quad (\text{D.15})$$

sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(b) L'ensemble \tilde{Q} de l'énoncé est aussi défini par

$$\tilde{Q} = Q \cup \mathcal{Q} \quad (\text{D.16})$$

où

$$\mathcal{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta = \frac{\pi}{n} \right\} \quad (\text{D.17})$$

On remarque que l'ensemble \mathcal{Q} est envoyé par la fonction f_n sur \mathbb{R}_- , complémentaire de U dans \mathbb{C} . Ainsi

$$f_n \text{ est une bijection de } \tilde{Q} \text{ sur } \mathbb{C}. \quad (\text{D.18})$$

Notons que

$$0^n = 0. \quad (\text{D.19})$$

(c) Il est légitime de noter $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et par définition de f_n^{-1} , notée comme dans le cas réel $z^{1/n}$, on a donc

$$\forall z \in \mathcal{Q}, \quad \forall \zeta \in U, \quad \zeta = z^n \iff z = \zeta^{\frac{1}{n}} \quad (\text{D.20})$$

et

$$\forall z \in \tilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \iff z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{D.21})$$

REMARQUE D.1. On peut vérifier que matlab utilise bien la même définition des fonctions $z^{1/n}$ en traçant l'image d'un ensemble de points appartenant à D , défini par

$$z \in D \iff \operatorname{Re}(z) \in [-1, 1] \text{ et } \operatorname{Im}(z) \in [-1, 1].$$

Voir les figures D.1 et D.2. On consultera le TP 1.4 pour retrouver ces figures.

(d) On retrouve alors une extension à \mathbb{C} des fonctions x^n et $x^{1/n}$ qui sont définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x = y^n \iff y = x^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{D.22})$$

REMARQUE D.2. Montrons que

$$\forall z \in \tilde{Q}, \quad (z^n)^{\frac{1}{n}} = z, \quad (\text{D.23})$$

et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = \left(z^{\frac{1}{n}} \right)^n, \quad (\text{D.24})$$

mais que on n'a pas nécessairement :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z^n)^{\frac{1}{n}} = z. \quad (\text{D.25})$$

Les équations (D.23) et (D.24), proviennent tout simplement de la définition de f_n et de f_n^{-1} , comme bijection respectives de \tilde{Q} sur \mathbb{C} et de \mathbb{C} sur \tilde{Q} .

Démontrons (D.25) en explicitant $(z^n)^{\frac{1}{n}}$.

On utilise la définition

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln}(z^n)}, \quad (\text{D.26})$$

et la difficulté est que l'on n'a pas comme dans le cas réel :

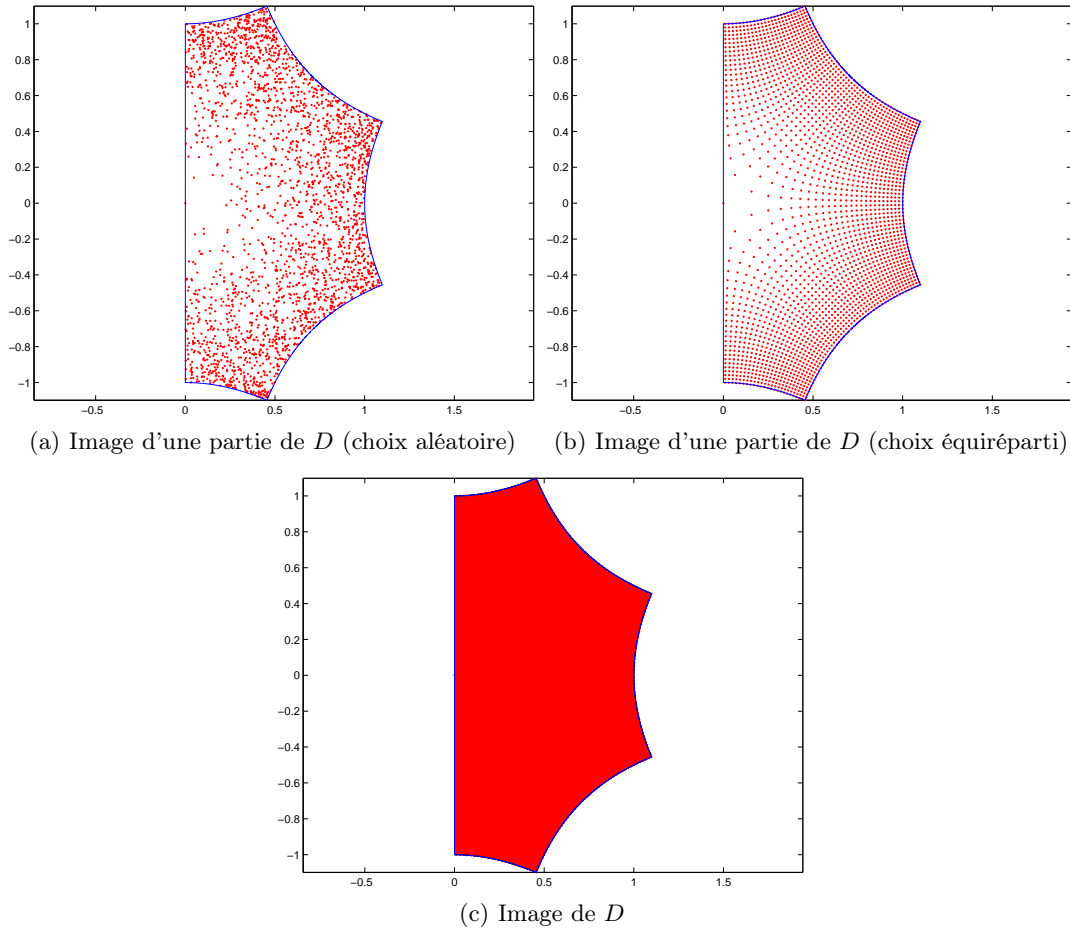
$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln}(z), \quad (\text{D.27})$$

puisqu'on peut montrer, comme dans le cas de l'équation (2.53) du cours, que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi, \quad (\text{D.28})$$

où $k \in \{-n, \dots, n\}$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, on a

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = 0 = z.$$

FIGURE D.1. Image d'une partie ou de la totalité de D par $z^{1/2}$.

On a donc z non nul et on peut supposer que

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad (\text{D.29})$$

où $\theta \in]-\pi, \pi]$. On a donc, d'après (D.26)

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \text{Ln}((\rho e^{i\theta})^n)} = e^{\frac{1}{n} \text{Ln}(\rho^n e^{in\theta})},$$

et donc

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i\frac{1}{n} \arg(e^{in\theta})} \quad (\text{D.30})$$

On peut découper \mathbb{C}^* de telle sorte que, pour z donné par (D.29), on ait

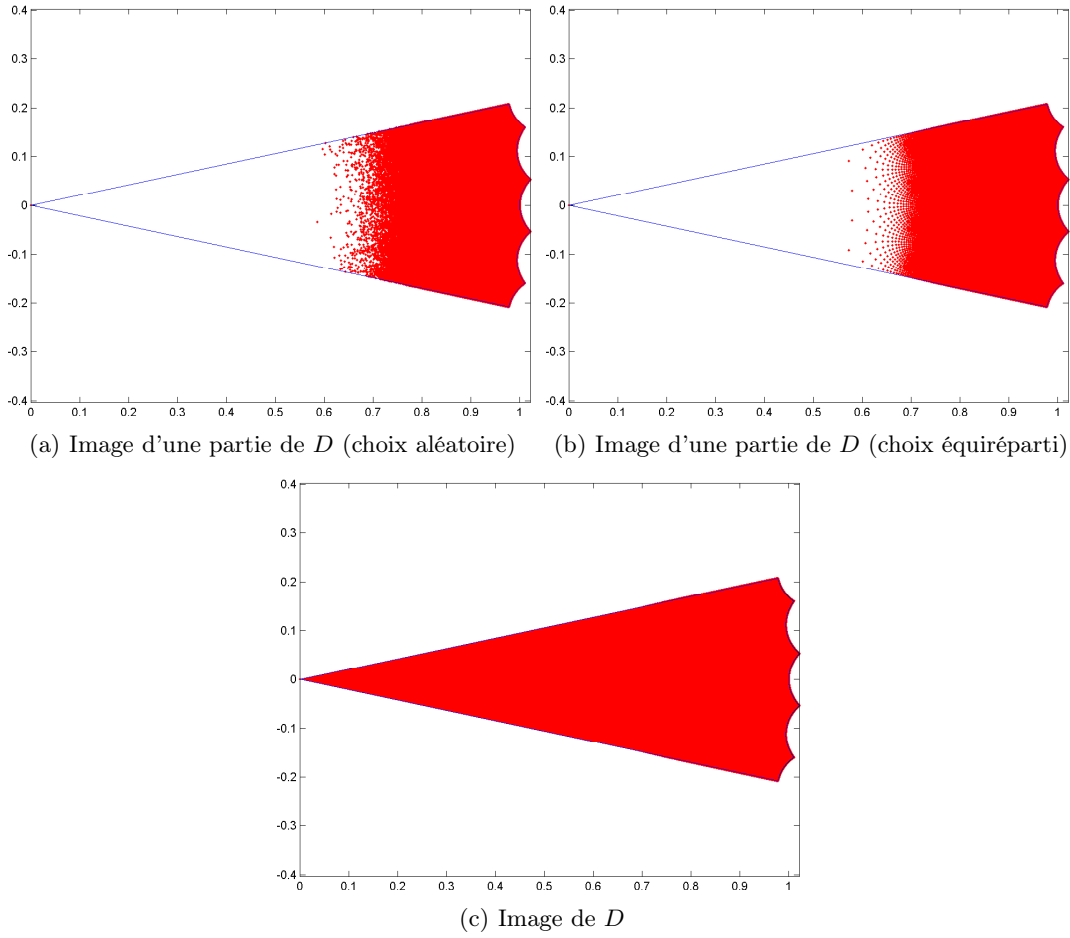
$$-\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \theta \leq \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (\text{D.31})$$

où k est compris entre deux valeurs entières. Attention, au voisinage de \mathbb{R}_- , il faut affiner cette définition en prenant deux-sous cas, non décrits ici. On a donc

$$e^{in\theta} = e^{i\phi}$$

où $\phi = n\theta$ et donc

$$-\pi < n\theta - 2k\pi \leq \pi,$$

FIGURE D.2. Image d'une partie ou de la totalité de D par $z^{1/15}$.

de sorte que

$$\arg(e^{in\theta}) = n\theta - 2k\pi,$$

et donc grâce à (D.30),

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i(\theta - \frac{2k\pi}{n})}.$$

et donc

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = z e^{-\frac{2ki\pi}{n}}. \quad (\text{D.32})$$

Par exemple, on peut montrer, pour $n = 2$, que si $Z \in \tilde{Q}$,

$$(z^2)^{\frac{1}{2}} = z,$$

et sinon

$$(z^2)^{\frac{1}{2}} = -z,$$

autrement dit, on retrouve le cas réel :

$$(z^2)^{\frac{1}{2}} = \pm z,$$

à ne pas écrire ici sous la forme

$$(z^2)^{\frac{1}{2}} = |z|!$$

(3) (a) (i) D'après (D.21) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z_0 \in \tilde{Q}$ tel que $\zeta = z_0^2$, noté $\sqrt{\zeta}$. Ainsi

$$z^2 = \zeta \quad (\text{D.33})$$

est équivalent à

$$z^2 = z_0^2. \quad (\text{D.34})$$

Si ζ est nul, il en est de même de z_0 et de z . Sinon z_0 est non nul, on peut diviser par z_0 et obtenir

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1. \quad (\text{D.35})$$

Les deux nombres complexes τ vérifiant

$$\tau^2 = 1, \quad (\text{D.36})$$

sont ± 1 de sorte que (D.33) est équivalent à

$$z = \pm \sqrt{\zeta}, \quad (\text{D.37})$$

ce qui est vrai, que ζ soit nul ou non et ce qui est identique au cas réel.

(ii) Pour calculer, de deux façons différentes, $\sqrt{1+i}$, on procède ainsi :

On donne deux méthodes différentes.

(A) On utilise le calcul habituel de calcul de racine carré d'un nombre complexe. Rappelons à ce propos les formules habituelles, par exemple issues de l'annexe A : soit un nombre complexe z (non nul). Il existe une unique paire $\{z_1, z_2\}$ de complexes telle que

$$z_1 = -z_2 \text{ et } z_1^2 = z_2^2 = z. \quad (\text{D.38})$$

On pose $z = a + ib$ et on cherche les nombres z_1 et z_2 sous la forme

$$Z = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$z = a + ib = Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha\beta = b/2. \end{cases} \quad (\text{D.39})$$

Puisque $|Z|^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est connu, on déduit donc de (D.39) ue

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (\text{D.40})$$

Par somme et différence, on en déduit α^2 et β^2 :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{cases} \quad (\text{D.41})$$

On vérifie que les deux quantités $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ et $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$ sont nécessairement positives. On en déduit donc alors α (aux signe près, deux solutions) et β (aux signe près, deux solutions), ce qui fait quatre solutions pour Z . On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par la seconde équation de (D.39) on obtient donc bien deux solutions opposées pour Z . Si on prend $a = 1$ et $b = 1$, on obtient donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2}). \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})}, \\ \beta = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})}. \end{cases}$$

Puisque $\alpha\beta > 0$, on a donc les deux racine sous la forme

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})} \right).$$

On ne garde que le complexe à partie réelle strictement positive (c'est-à-dire celui qui est dans \tilde{Q}) :

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})}. \quad (\text{D.42})$$

Le carré du module de ce nombre complexe vaut

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

et on admet que l'argument de ce nombre vaut $\pi/8$, de sorte que (D.42) est équivalent à

$$z = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}}. \quad (\text{D.43})$$

(B) La seconde façon de calculer $\sqrt{1+i}$ est d'anticiper sur la question (4) On a donc, d'après la définition du cours,

$$\sqrt{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(1+i)} = e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{i\pi}{4})} = e^{\frac{1}{4} \ln(2) + \frac{i\pi}{8}} = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}},$$

ce qui est bien identique à (D.43)

(b) On reprend les calculs de la question 3(a)i pour un entier n quelconque.

D'après (D.21) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z_0 \in \tilde{Q}$ tel que $\zeta = z_0^n$, noté $\sqrt[n]{\zeta}$. Ainsi

$$z^n = \zeta \quad (\text{D.44})$$

est équivalent à

$$z^n = z_0^n. \quad (\text{D.45})$$

Si ζ est nul, il en est de même de z_0 et de z . Sinon z_0 est non nul, on peut diviser par z_0 et obtenir

$$\left(\frac{z}{z_0} \right)^n = 1. \quad (\text{D.46})$$

Les n complexes τ vérifiant

$$\tau^n = 1, \quad (\text{D.47})$$

sont les n racines n -ième de l'unité définie par $\tau = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $0 \leq k \leq n-1$, de sorte que (D.44) est équivalent à

$$z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \sqrt[n]{\zeta}, \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1. \quad (\text{D.48})$$

ce qui est vrai, que ζ soit nul ou non.

(4) Reprenons les calculs de la question 2a On y a montré que l'unique $\zeta \in Q$ vérifiant (D.12) est donné par (D.13) avec r et θ définis par (D.14). On a donc

$$\zeta = r e^{i\theta} = \sqrt[n]{R} e^{\frac{i\phi}{n}},$$

soit encore en utilisant les propriétés du logarithme réel et de l'exponentielle complexe :

$$\zeta = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\phi}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(R)} e^{\frac{i\phi}{n}},$$

et donc

$$\zeta = e^{\frac{1}{n}(\ln(R) + i\phi)}. \quad (\text{D.49})$$

D'après la définition (D.11) de z , R et ϕ et la définition du logarithme complexe 2.31 page 23 du cours, on a

$$\ln(R) + i\phi = \text{Ln}(z),$$

Ainsi, d'après (D.49), on a

$$\forall z \in U, \quad z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \text{Ln}(z)}, \quad (\text{D.50})$$

ce qui est exactement la définition de $z^{1/n}$ correspondant à la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, donnée par (2.59). *Attention*, dans cette définition, z ne peut appartenir à \mathbb{R}_- . Si c'est le cas, d'après ce qui précède, f_n envoie \mathcal{Q} sur \mathbb{R}_- et donc f_n^{-1} envoie \mathbb{R}_- sur \mathcal{Q} . Ainsi, si z est un réel négatif, on a en reprenant les calculs précédents

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|) + i\pi)}. \quad (\text{D.51})$$

Si on adopte les conventions des remarques remarque 2.34 page 23 et 2.42 page 28, on a $\arg(z) = \pi$ et $\text{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\pi$ et donc d'après (D.51),

$$\forall z \in \mathbb{R}_-, \quad z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|) + i\arg(z))} = e^{\frac{1}{n} \text{Ln}(z)}. \quad (\text{D.52})$$

D'après l'équation (2.63) du cours, cette équation a aussi un sens pour $z = 0$ et est cohérente avec (D.19).

D'après (D.50) et (D.52), on a donc montré que $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, avec la définition de la question 2c, coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, à condition d'étendre le logarithme complexe à \mathbb{R}_* .

- (5) Levons alors le paradoxe de la question 1. On peut écrire rigoureusement en utilisant tout ce qui précède :

$$\sqrt{-1} = i. \quad (\text{D.53})$$

Car i est dans $\tilde{\mathcal{Q}}$ (avec $n = 2$) et $i^2 = -1$. On a donc rigoureusement

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)},$$

et donc

$$1 = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}((-1) \times (-1))} \quad (\text{D.54})$$

On aussi

$$-1 = i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$

soit encore

$$-1 = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(-1)} e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(-1)} = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(-1) + \frac{1}{2} \text{Ln}(-1)},$$

et donc

$$-1 = e^{\frac{1}{2}(\text{Ln}(-1) + \text{Ln}(-1))}. \quad (\text{D.55})$$

Dire que " $-1 = 1$ ", d'après (D.54) et (D.55), revient à donc écrire que

$$\text{Ln}(-1) + \text{Ln}(-1) = \text{Ln}((-1) \times (-1)), \quad (\text{D.56})$$

ce qui est tout à fait aussi faux que d'utiliser (D.7) avec a et b non réels positifs. D'après l'équation (2.53) page 24 du cours, on a

$$\text{Ln}((-1) \times (-1)) = \text{Ln}(-1) + \text{Ln}(-1) + 2ik\pi, \quad (\text{D.57})$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$. dans la mesure où le logarithme complexe est étendu à \mathbb{C} tout entier. Ainsi, dire que (D.56) est faux revient à montrer que $k \neq 0$.

Montrons-le : Si on reprend la preuve de l'équation (2.53) du cours avec $z_1 = -1$ et $z_2 = -1$, on a : Pour $l \in \{1, 2\}$, on écrit $z_l = \rho_l e^{i\theta_l}$ où $\theta_l \in]-\pi, \pi]$ (et non dans $]-\pi, \pi[$) On a donc

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}(\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}),$$

et puisque $\theta_1 + \theta_2$ n'est pas nécessairement dans $] -\pi, \pi]$, d'après les points 5 et 6 page 24 du cours

$$\begin{aligned} &= \ln(\rho_1 \rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2) + 2ik\pi, \\ &= \ln(\rho_1) + i\theta_1 + \ln(\rho_2) + i\theta_2 + 2ik\pi, \\ &= \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2 + 2ik\pi. \end{aligned}$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned} -\pi &< \theta_1 \leq \pi, \\ -\pi &< \theta_2 \leq \pi, \end{aligned}$$

et donc

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi.$$

On a vu dans la preuve du cours que si

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 < -\pi,$$

alors $k = 1$. De même, si

$$\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi,$$

on a $k = -1$. Enfin, si

$$-\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi,$$

on a $k = 0$. Ici, on a $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ et donc

$$k = -1, \tag{D.58}$$

et le paradoxe est levé!! Plus précisément, on a, de plus, d'après (D.57),

$$\text{Ln}((-1) \times (-1)) = \text{Ln}(-1) + \text{Ln}(-1) - 2i\pi. \tag{D.59}$$

Si on reprend le faux calcul paradoxal, d'après (D.54) et (D.59), on a donc

$$\begin{aligned} 1 &= e^{\frac{1}{2} \text{Ln}((-1) \times (-1))}, \\ &= e^{\frac{1}{2}(\text{Ln}(-1) + \text{Ln}(-1) - 2i\pi)}, \\ &= e^{\frac{1}{2}(\text{Ln}(-1) + \text{Ln}(-1))} e^{\frac{1}{2}(-2i\pi)}, \\ &= e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(-1)} e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(-1)} e^{-i\pi}, \\ &= \sqrt{-1} \sqrt{-1} e^{-i\pi}, \\ &= i^2 \times (-1), \\ &= 1. \end{aligned}$$

la présence du -1 salvateur provient donc de la valeur non nulle de k !!

REMARQUE D.3. Montrons aussi :

$$\forall A \in \mathbb{R}_-, \quad \forall B \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{AB} = i\sqrt{-A}\sqrt{B}, \tag{D.60}$$

où à gauche de l'inégalité $\sqrt{}$ est la racine complexe que l'on vient de définir et à droite, c'est la racine réelle usuelle (qui correspondent!). On a en particulier, pour $B = 1$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_-, \quad \sqrt{A} = i\sqrt{-A}. \tag{D.61}$$

Par définition, on a donc successivement grâce aux résultats (D.52),

$$\begin{aligned}\sqrt{AB} &= e^{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(AB)\right)}, \\ &= e^{\left(\frac{1}{2} (\ln |AB| + i \arg(AB))\right)},\end{aligned}$$

et puisque AB est un réel négatif, $\arg(AB) = \pi$

$$\begin{aligned}&= e^{\left(\frac{1}{2} (\ln |AB| + i\pi)\right)}, \\ &= e^{\left(\frac{1}{2} (\ln |A| + \ln |B| + i\pi)\right)}, \\ &= e^{\left(\frac{1}{2} \ln |A| + \frac{1}{2} \ln |B| + \frac{i\pi}{2}\right)}, \\ &= e^{\left(\frac{1}{2} \ln |A|\right)} e^{\left(\frac{1}{2} \ln |B|\right)} e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}, \\ &= i\sqrt{|A|}\sqrt{|B|}, \\ &= i\sqrt{-A}\sqrt{B}\end{aligned}$$

REMARQUE D.4. Il est important de se rappeler que le logarithme complexe étendu sur \mathbb{C} n'est pas continu. Cette absence de continuité peut induire des erreurs comme le montre le raisonnement faux suivant : Soit $\varepsilon > 0$.

On a

$$(-1 + \varepsilon i)(-1 - \varepsilon i) = 1 + \varepsilon^2. \quad (\text{D.62})$$

On écrit, fort du raisonnement précédent,

$$\operatorname{Ln}((-1 + \varepsilon i)(-1 - \varepsilon i)) = \operatorname{Ln}(-1 + \varepsilon i) + \operatorname{Ln}(-1 - \varepsilon i). \quad (\text{D.63})$$

En effet, avec les notations utilisées dans la correction de la question 5, on a

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arg(-1 + \varepsilon i) \in]0, \pi[, \\ \theta_2 &= \arg(-1 - \varepsilon i) \in]-\pi, 0[,\end{aligned}$$

et donc

$$\theta_1 + \theta_2 \in]-\pi, \pi[,$$

et donc $k = 0$, ce qui justifie (D.62). D'après (D.62), on a donc

$$\operatorname{Ln}(1 + \varepsilon^2) = \operatorname{Ln}(-1 + \varepsilon i) + \operatorname{Ln}(-1 - \varepsilon i). \quad (\text{D.64})$$

Ainsi, on a successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \varepsilon^2} &= e^{\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(\sqrt{1 + \varepsilon^2})}, \\ &= e^{\frac{1}{2} (\operatorname{Ln}(-1 + \varepsilon i))} e^{\frac{1}{2} (\operatorname{Ln}(-1 - \varepsilon i))}, \\ &= \sqrt{-1 + \varepsilon i} \sqrt{-1 - \varepsilon i}\end{aligned}$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2} = \sqrt{-1 + \varepsilon i} \sqrt{-1 - \varepsilon i}. \quad (\text{D.65})$$

On passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, et on a

$$1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1, \quad (\text{D.66})$$

et de nouveau un problème!

Ce paradoxe vient du fait que le logarithme complexe n'est pas continu au voisinage de \mathbb{R}_- ! Si $\varepsilon > 0$, le complexe $-1 + \varepsilon i$ est au-dessus de cet axe et son argument est dans $]0, \pi[$ et tend vers π quand ε tend vers 0. Avec les conventions des remarques 2.34 et 2.42 cours, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-1 + \varepsilon i) = i\pi. \quad (\text{D.67})$$

En revanche, le complexe $-1 - \varepsilon i$ est au-dessous de cet axe et son argument est dans $] -\pi, 0[$ et tend vers $-\pi$ quand ε tend vers 0. Avec les conventions des précédentes, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(-1 - \varepsilon i) = -i\pi. \quad (\text{D.68})$$

On pourra consulter la correction de l'exercice de TD 2.1. On passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (D.65) et on a donc

$$1 = e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2}} = i \times (-i) = 1,$$

et il n'y a plus de paradoxe!

Définitions des fonctions complexes arcsin et arccos (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe la définition et l'étude des des fonctions complexes arcsin et arccos, sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (Automne 2019) :

Énoncé

On donne les résultats suivants, admis pour cet exercice :

PROPOSITION E.1. Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2. Si l'on pose

$$\tilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \left] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right] \right\}, \quad (\text{E.1})$$

alors $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de \tilde{Q} sur \mathbb{C} . On note alors $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et on a

$$\forall z \in \tilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \iff z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{E.2})$$

Enfin, $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$ (voir équation (2.59)), à condition d'étendre le logarithme complexe à \mathbb{R}_*^- (voir remarque 2.34 page 23 et 2.42 page 28.)

◇

L'énoncé de l'exercice est le suivant :

- (1) Rappeler la définition du sinus complexe.
- (2) (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, montrer que l'équation (en ξ)

$$\sin \xi = z. \quad (\text{E.3})$$

est équivalente à l'équation du second degré suivante (en Z) :

$$Z^2 - 2izZ - 1 = 0, \quad (\text{E.4})$$

où

$$Z = e^{i\xi}. \quad (\text{E.5})$$

- (b) Montrer que les deux racines de l'équation (E.4) ont données par

$$Z = iz \pm \sqrt{1 - z^2}, \quad (\text{E.6})$$

où la racine complexe est définie par la proposition E.1 pour $n = 2$.

- (c) En déduire que l'on peut poser

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad (\text{E.7})$$

et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\arcsin(z)) = z. \quad (\text{E.8})$$

- (3) Calculer

$$\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{e} \right) i \right) \right).$$

- (4) Montrer que, si pour tout z tel que $1 - z^2$ et que $iz + \sqrt{1 - z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors arcsin est dérivable (au sens de \mathbb{C}) en z et que

$$(\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (\text{E.9})$$

Les questions suivantes sont facultatives

- (5) (a) Simplifier l'expression de arcsin(z) si z est un réel.
 (b) Que retrouve-t-on dans le cas de arcsin(z) si z est un réel dans l'intervalle $[-1, 1]$?
 (6) (a) Comment définiriez-vous arccos(z) pour z complexe ?
 (b) En admettant que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad (\arccos(z))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\text{E.10})$$

montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{E.11})$$

Corrigé

REMARQUE E.2. Les résultats de la proposition E.1 de l'énoncé sont montrés dans l'annexe D.

Donnons maintenant le corrigé à proprement parler de l'exercice.

On pourra consulter les url suivantes :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_cosinus

https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_sinus

https://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonométrie_complexe

- (1) La fonction sinus complexe étend la fonction réelle à \mathbb{C} tout entier et est donnée par la proposition 2.27 page 21 du cours et est rappelée ici :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (\text{E.12})$$

- (2) (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, on cherche donc un complexe ξ vérifiant

$$\sin \xi = z. \quad (\text{E.13})$$

Compte tenu de la définition du sinus, cela est équivalent à

$$\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = z,$$

soit encore à

$$e^{i\xi} - e^{-i\xi} = 2iz,$$

et puisque $e^{i\xi}$ est non nul, c'est équivalent à

$$(e^{i\xi})^2 - e^{-i\xi} e^{i\xi} = 2ize^{i\xi},$$

soit encore à

$$(e^{i\xi})^2 - 2ize^{i\xi} - 1 = 0.$$

En posant

$$Z = e^{i\xi}. \quad (\text{E.14})$$

on obtient donc l'équation du second degré suivante (en Z) :

$$Z^2 - 2izZ - 1 = 0, \quad (\text{E.15})$$

(b) Pour résoudre (E.15) on calcule le discriminant réduit donné par

$$\delta' = (iz)^2 + 1 = 1 - z^2.$$

On sait que ce nombre complexe admet deux racines carrées. On a vu précédemment (voir proposition rappelée en début d'énoncé avec $n = 2$) que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est définie sur \mathbb{C} et est la fonction réciproque de $z \mapsto z^2$. On peut considérer l'une des racines de $1 - z^2$ définie par $\sqrt{1 - z^2}$. Les deux racines Z de (E.15) sont données par

$$Z = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \quad (\text{E.16})$$

(c) Ces deux racines sont non nulles, car leur produit vaut :

$$\alpha = \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right) = (iz)^2 - \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2 = -z^2 - \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2,$$

soit encore, d'après la formule (D.24) de l'annexe du cours, avec $n = 2$:

$$\alpha = -z^2 - 1 + z^2 = -1 \neq 0.$$

On choisit arbitrairement l'une des deux racines, donnée par $iz + \sqrt{1 - z^2}$. D'après (E.14), on sait que ξ vérifie donc

$$e^{i\xi} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

et donc, d'après ce qu'on a vu sur le logarithme complexe, défini sur \mathbb{C}^* , on peut donc choisir ξ vérifiant

$$i\xi = \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

qui est défini puisque

$$iz + \sqrt{1 - z^2} \neq 0. \quad (\text{E.17})$$

On pose donc conventionnellement

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right). \quad (\text{E.18})$$

Par construction, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\arcsin(z)) = z. \quad (\text{E.19})$$

REMARQUE E.3. On aurait pu considérer l'autre racine et poser conventionnellement

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \text{Ln} \left(iz - \sqrt{1 - z^2} \right). \quad (\text{E.20})$$

(3) Pour calculer

$$\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{e} \right) i \right) \right), \quad (\text{E.21})$$

on utilise (E.18). On a successivement, en posant

$$z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{e} \right) i \right), \quad (\text{E.22})$$

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{2}{16} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right)^2 - \left(e - \frac{1}{e} \right)^2 + 2i \left(e + \frac{1}{e} \right) \left(e - \frac{1}{e} \right) \right), \\ &= \frac{1}{8} \left(e^2 + \frac{1}{e^2} + 2 - e^2 - \frac{1}{e^2} + 2 + 2i \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \right), \\ &= \frac{1}{4} \left(2 + i \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \right) \end{aligned}$$

et donc

$$1 - z^2 = \frac{1}{4} \left(4 - 2 - i \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \right),$$

et donc

$$1 - z^2 = \frac{1}{4} \left(2 - i \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \right). \quad (\text{E.23})$$

Pour chercher $\zeta = \sqrt{1 - z^2}$, on utilise la méthode de l'annexe de l'annexe A du cours : On pose $u = 1 - z^2 = a + ib$ où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{4} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \end{cases}$$

et on cherche le nombre ζ sous la forme

$$\zeta = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ \beta^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{cases}$$

On a

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \left(e^4 + \frac{1}{e^4} - 2 \right) = \frac{1}{16} \left(e^4 + \frac{1}{e^4} + 2 \right) = \left(\frac{1}{4} \left(e^2 + \frac{1}{e^2} \right) \right)^2$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^2 + \frac{1}{e^2} \right) \right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^2 + \frac{1}{e^2} \right) \right), \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{8} \left(2 + e^2 + \frac{1}{e^2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(e + \frac{1}{e} \right) \right)^2, \\ \beta^2 = \frac{1}{8} \left(-2 + e^2 + \frac{1}{e^2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right) \right)^2. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e + \frac{1}{e} \right), \\ \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right), \end{cases}$$

On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par

$$\alpha\beta = b/2 < 0$$

et donc on a les deux racines suivantes :

$$\zeta = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) - i \left(e - \frac{1}{e} \right) \right)$$

Conformément au choix de l'annexe D, on choisit la racine à partie réelle positive :

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) - i \left(e - \frac{1}{e} \right) \right)$$

Il nous reste donc à calculer

$$\begin{aligned}
 \eta &= -i \operatorname{Ln} \left(i \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{e} \right) i \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) - i \left(e - \frac{1}{e} \right) \right) \right) \right), \\
 &= -i \operatorname{Ln} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) (i+1) + \left(e - \frac{1}{e} \right) (-i-1) \right) \right), \\
 &= -i \operatorname{Ln} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(e(i+1-i-1) + \frac{1}{e}(i+1+i+1) \right) \right), \\
 &= -i \operatorname{Ln} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{e}(2+2i) \right) \right), \\
 &= -i \operatorname{Ln} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1+i}{e} \right).
 \end{aligned}$$

Or on a

$$1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}},$$

et donc

$$\eta = -i \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{e} e^{\frac{i\pi}{4}} \right)$$

et par définition du logarithme complexe

$$\eta = -i \left(\ln \left(\frac{1}{e} \right) + i \frac{\pi}{4} \right) = -i \left(-\ln(e) + i \frac{\pi}{4} \right),$$

et donc, finalement :

$$\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(e + \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{e} \right) i \right) \right) = \frac{\pi}{4} + i. \quad (\text{E.24})$$

- (4) On a vu en cours (proposition 2.43 page 28) que la fonction $z^{1/2}$ est dérivable de dérivée $1/2z^{-1/2}$. Cela est vrai sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Compte tenu des résultats précédents sur la racine, on en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}. \quad (\text{E.25})$$

De même, le logarithme complexe est dérivable sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de dérivée $1/z$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}. \quad (\text{E.26})$$

Grâce à la proposition 1.7 page 5 du cours, on peut donc dériver successivement en utilisant (E.25) et (E.26), si $1 - z^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, on a

$$\left(\sqrt{1 - z^2} \right)' = -\frac{2z}{2\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}},$$

et si $1 - z^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, on a donc

$$\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)' = i - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{i}{\sqrt{1 - z^2}} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Ainsi, si $1 - z^2$ et $iz + \sqrt{1 - z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors

$$\left(\operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \right)' = \frac{\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)'}{iz + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{i}{\sqrt{1 - z^2}} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \times \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{i}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Ainsi, grâce à (E.18), on a si $1 - z^2$ et $iz + \sqrt{1 - z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors

$$(\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (\text{E.27})$$

On peut montrer que $1 - z^2$ n'est pas un réel négatif ssi z appartient à \mathbb{C} privé de $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. L'étude des z tels que $iz + \sqrt{1 - z^2}$ n'est pas un réel négatif est plus difficile et, en fait, inutile. On admet en utilisant (E.27), que arcsin est dérivable sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ et que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad (\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (\text{E.28})$$

(5) (a) Supposons z réel. On a alors

$$|z| > 1 \iff 1 - z^2 < 0. \quad (\text{E.29})$$

— Dans le cas

$$|z| > 1, \quad (\text{E.30})$$

le réel $1 - z^2$ est négatif et d'après le résultat (D.61), on a

$$\sqrt{1 - z^2} = i\sqrt{z^2 - 1}. \quad (\text{E.31})$$

et par définition

$$\arcsin(z) = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{z^2 - 1} i \right),$$

et donc

$$\arcsin(z) = -i \operatorname{Ln} \left(\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) i \right). \quad (\text{E.32})$$

On a

$$\forall z > 1, \quad z + \sqrt{z^2 - 1} > 0, \quad (\text{E.33a})$$

$$\forall z < -1, \quad z + \sqrt{z^2 - 1} < 0. \quad (\text{E.33b})$$

En effet, si $z > 1$, c'est immédiat. Sinon, c'est équivalent à

$$\sqrt{z^2 - 1} < -z,$$

et donc à

$$z^2 - 1 < z^2,$$

ce qui est vrai. Compte tenu de (E.33), on a donc

$$\begin{aligned} \forall z > 1, \quad \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) i &= \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| e^{\frac{i\pi}{2}}, \\ \forall z < -1, \quad \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) i &= \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| e^{-\frac{i\pi}{2}}, \end{aligned}$$

Dans le premier cas, d'après (E.32), on a donc, d'après la définition du logarithme

$$\arcsin(z) = -i \left(\ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| + \frac{i\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - i \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|.$$

Dans le second cas, on a

$$\arcsin(z) = -i \left(\ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| - \frac{i\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2} - i \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|.$$

Bref, on a donc, pour tout z réel dans $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$,

$$\forall z > 1, \quad \arcsin(z) = \frac{\pi}{2} - i \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|, \quad (\text{E.34a})$$

$$\forall z < -1, \quad \arcsin(z) = -\frac{\pi}{2} - i \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| \quad (\text{E.34b})$$

ce qui peut se condenser en

$$\forall z \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \quad \arcsin(z) = \operatorname{signe}(z) \frac{\pi}{2} - i \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|. \quad (\text{E.35})$$

— Dans le cas

$$|z| < 1, \quad (\text{E.36})$$

la nombre $\sqrt{1 - z^2}$ est un réel positif sa racine est sa racine réelle habituelle et en posant

$$\eta = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

on a alors

$$|\eta| = \sqrt{z^2 + 1 - z^2} = 1.$$

De plus, l'argument de η est dans $] -\pi/2, \pi/2[$. On a donc

$$\eta = e^{i\theta}$$

où

$$\theta = \arcsin \left(\frac{z}{|\eta|} \right) = \arcsin(z),$$

où ici \arcsin est la fonction réelle (de $[-1, 1]$ dans $[\pi/2, \pi/2]$). D'après (E.18), on a donc

$$\arcsin(z) = -i(i\theta) = \arcsin(z)$$

On a donc

$$\text{la fonction } \arcsin \text{ définie sur } \mathbb{C} \text{ coïncide avec l'arcsin réel habituel sur }]-1, 1[. \quad (\text{E.37})$$

— Enfin, dans le cas

$$|z| = 1, \quad (\text{E.38})$$

on a $z = \pm 1$ et d'après (E.18),

$$\arcsin(z) = -i \operatorname{Ln}(\pm i) = -i \left(\pm \frac{i\pi}{2} \right) = \pm \frac{\pi}{2} = \arcsin(z),$$

où ici \arcsin est la fonction réelle (de $[-1, 1]$ dans $[\pi/2, \pi/2]$). On peut donc prolonger (E.37), par

$$\text{la fonction } \arcsin \text{ définie sur } \mathbb{C} \text{ coïncide avec l'arcsin réel habituel sur } [-1, 1]. \quad (\text{E.39})$$

Dans ce cas, on remarque que (E.35), peut se prolonger en

$$\forall z \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \quad \arcsin(z) = \operatorname{signe}(z) \frac{\pi}{2} - i \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|. \quad (\text{E.40})$$

(b) On retrouve l'arcsin réel (voir (E.39)).

(6) (a) On raisonne comme dans les questions 1 et 2a. La fonction cosinus complexe étend la fonction réelle à \mathbb{C} tout entier et est donnée par la proposition 2.27 page 21 du cours et est rappelée ici :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, on cherche donc un complexe ξ vérifiant

$$\cos \xi = z.$$

On procéderait comme précédemment.

(b) On admet que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad (\arccos(z))' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \quad (\text{E.41})$$

Si on compare à (E.28), on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad (\arcsin(z))' + (\arccos(z))' = 0,$$

et il existe donc C telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = C.$$

Pour $z = 0$, on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{E.42})$$

Les fonctions \arcsin et \arccos sont continues au voisinage de $(]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ par dessus et il vient donc en faisant tendre z vers un point de $(]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{E.43})$$

REMARQUE E.4. L'équation (E.43) est aussi valable naturellement pour les fonctions réelles (sur $[-1, 1]$) et la preuve se fait de la même façon, dans \mathbb{R} !

REMARQUE E.5. L'équation (E.43) nous fournit l'expression suivante

$$\arccos(z) = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right). \quad (\text{E.44})$$

Calcul d'une intégrale impropre (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul d'intégrale suivante sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (à l'automne 2020) :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \quad (\text{F.1})$$

Une généralisation de ce calcul sera proposé en annexe G page 219.

Énoncé

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \quad (\text{F.2})$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les dans le plan complexe.

(2) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.8 page 56 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \quad ? \quad (\text{F.3})$$

(3)

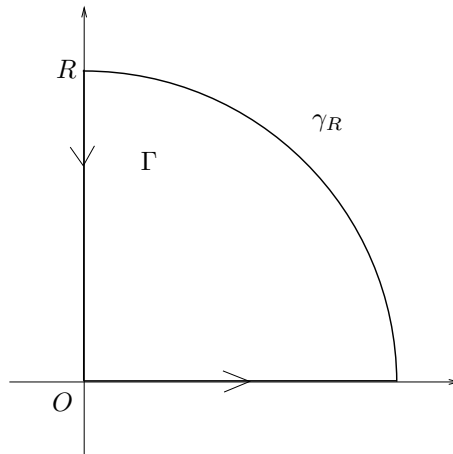


FIGURE F.1. Le chemin Γ considéré.

Pour $R > 0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure F.1.

(a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ fixé ?

- (b) Conclure sur la valeur de l'intégrale donnée par (F.3), en faisant tendre R vers l'infini. On *admettra* que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (\text{F.4})$$

- (4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (F.3) à la main ?

Corrigé

- (1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \quad (\text{F.5})$$

Les pôles de f sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les z complexes tels que

$$1+z^4=0. \quad (\text{F.6})$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (F.6), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

puisque

$$z_0^4 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions z de (F.6) sous la forme

$$Z = z z_0,$$

ce qui donne

$$Z^4 = (z z_0)^4 = z^4 z_0^4 = -1,$$

et donc, puisque $z_0^4 = -1$, on a

$$z^4 = 1,$$

ce qui nous montre que z est une racine quatrième de l'unité, donc dans l'ensemble $\{1, i, -1, -i\}$, ce qui nous donne :

les pôles de f sont les nombres complexes $\{z_0, z_1 = iz_0, z_2 = -z_0, z_3 = -iz_0\}$ où $z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, (F.7)

ce qui est encore équivalent à

les pôles de f sont les nombres complexes $z_k = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{ik\pi}{2}}$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. (F.8)

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

sur le cercle trigonométrique, de module $\pi/4$, par l'identité et les trois rotations, d'angles $\pi/2$, π et $3\pi/2$ de centre 0.

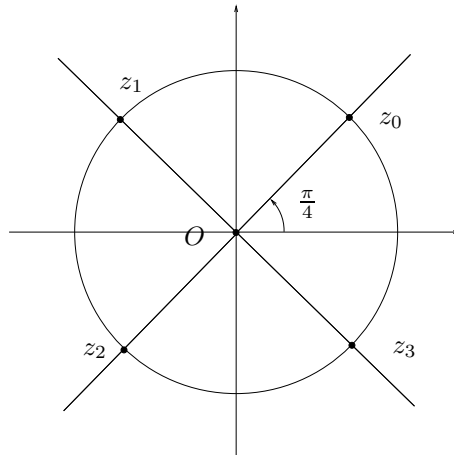
Voir la figure F.2.

- (2) Si on applique la proposition 5.8 page 56 du cours à la fonction f donnée par (F.5), on aura

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x}{1+x^4} dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés au dessus de l'axe des x . Or, la fonction $\frac{x}{1+x^4}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

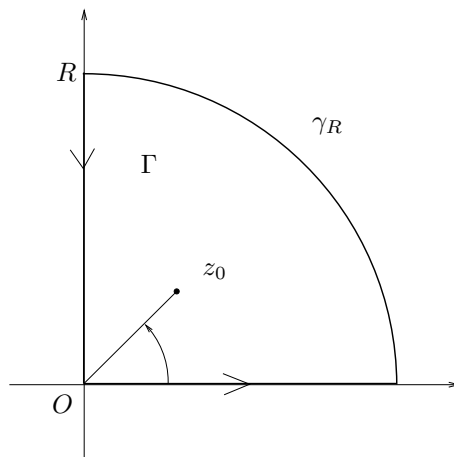
FIGURE F.2. Les pôles z_0, z_1, z_2 et z_3 de f .

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx. \quad (\text{F.9})$$

(3) La technique utilisée ci-dessous est proche de celle de l'annexe H page 227 du cours.

(a)

FIGURE F.3. Le chemin Γ considéré et l'unique pôle z_0 de f à l'intérieur de Γ .

Pour $R > 0$ assez grand, le seul pôle de f à l'intérieur de Γ est z_0 , comme le montre la figure F.3. Le théorème 3.37 page 41 du cours appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ donne :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, z_k), \quad (\text{F.10})$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ . Ici, le seul pôle est z_0 d'ordre un, car le polynôme $z^4 + 1$ est égal à $(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. On a donc, d'après le lemme 3.39 page 43

du cours :

$$\begin{aligned}
 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) &= 2i\pi \text{Rés}(f, z_0), \\
 &= 2i\pi \frac{z_0}{[1+z^4]_{z=z_0}'}, \\
 &= 2i\pi \frac{z_0}{[4z^3]_{z=z_0}'}, \\
 &= 2i\pi \frac{z_0}{4z_0^3}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} \frac{1}{z_0^2}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} z_0^{-2}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right)^{-2}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} e^{-\frac{2i\pi}{4}}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} e^{-\frac{i\pi}{2}}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} \frac{1}{i},
 \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{F.11})$$

Décomposons maintenant l'intégrale de gauche de (F.11) en deux trois terme, chacun correspondant à l'arc de cercles de centre l'origine O et de rayon et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure F.3 page précédente. Le premier segment, inclus dans l'axe des x , est paramétré par

$$z = \gamma(t), \text{ où } \gamma(t) = t \text{ avec } t \in [0, R], \quad (\text{F.12})$$

le second, inclus dans l'axe des y est paramétré par

$$z = \gamma(t), \text{ où } \gamma(t) = it \text{ avec } t \in [R, 0]. \quad (\text{F.13})$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_0^R f(t) dt + \int_R^0 f(it) i dt + \int_{\Gamma_R} f(z) dz, \\
 &= \int_0^R \frac{t}{t^4+1} dt - i \int_0^R \frac{it}{(it)^4+1} dt + \int_{\Gamma_R} f(z) dz, \\
 &= \int_0^R \frac{t}{t^4+1} dt + \int_0^R \frac{t}{i^4 t^4+1} dt + \int_{\Gamma_R} f(z) dz,
 \end{aligned}$$

et donc, d'après (F.11),

$$\int_0^R \frac{t}{t^4+1} dt + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{F.14})$$

(b) Démontrons la formule suivante, donnée dans l'énoncé :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (\text{F.15})$$

Elle provient du lemme 5.6 page 55 du cours, de Jordan appliqué à $z_0 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $z_0 = 0$ et $R_0 = +\infty$. L'égalité (5.13) du cours a lieu, puisque, quand $|z|$ tend vers l'infini :

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^2}{z^4 + 1} \right| \sim \left| \frac{z^2}{z^4} \right| = \frac{1}{|z|^2},$$

tend vers zéro. On en déduit (F.15). De (F.14), on déduit donc en faisant tendre R vers l'infini :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{F.16})$$

- (4) De façon générale, pour intégrer ce type de fonctions, il faut décomposer en éléments simples et appliquer les techniques présentées par exemple dans [Bas19, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"]. Mais, ici, il est très rapide de procéder ainsi : Faisons le changement de variable $u = x^2$ qui donne $du = 2x dx$ et donc

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx = \int \frac{x dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan(u) = \frac{1}{2} \arctan(x^2),$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} (\arctan(+\infty) - \arctan(0)) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

ce qui permet de retrouver (F.16).

Calcul d'une intégrale impropre (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul de l'intégrale suivante sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen (à l'automne 2020) :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx, \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont définis plus bas.} \quad (\text{G.1})$$

Ce calcul est une généralisation du calcul de l'annexe F page 213.

Énoncé

(1) Soient p et q deux entiers vérifiant

$$p \geq q + 2, \quad (\text{G.2a})$$

$$q \geq 0. \quad (\text{G.2b})$$

On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^q}{1+z^p}. \quad (\text{G.3})$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les si possible dans le plan complexe.

(2) Pourquoi, de façon générale, ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.8 page 56 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx \quad ? \quad (\text{G.4})$$

(3)

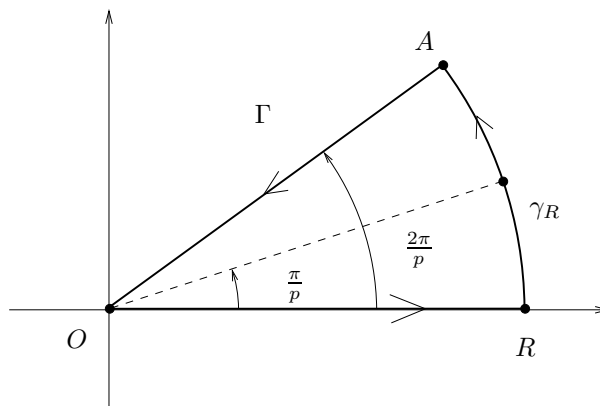


FIGURE G.1. Le chemin Γ considéré.

Pour $R > 0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments, le premier est $[O, R]$, inclus sur l'axe des x , le second est $[AO]$, où A est le point de module R est d'argument $\frac{2\pi}{p}$, comme montre la figure G.1 page précédente.

- (a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ fixé ?
 (b) Conclure sur la valeur de l'intégrale J donnée par (G.4), en faisant tendre R vers l'infini. On admettra que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (\text{G.5})$$

- (c) Quelle est la valeur de J pour $q = 0$ et $p = 3$?
 (d) Quelle est la valeur de J pour $q = 1$ et $p = 4$?

(4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (G.4) à la main ?

(5) *Question facultative*

- (a) Les calculs de cet exercice sont-ils encore valables si on remplace p et q deux entiers vérifiant (G.2), par p entier et q réel vérifiant

$$p > q + 1, \quad (\text{G.6a})$$

$$q \geq 0. \quad (\text{G.6b})$$

- (b) Quelle est la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^p} dx \quad ?$$

(6) *Question facultative*

- (a) Les calculs de cet exercice sont-ils encore valables si on remplace p et q deux entiers vérifiant (G.2), par p entier et q réel vérifiant

$$p > q + 1, \quad (\text{G.7a})$$

$$q > -1 \quad ? \quad (\text{G.7b})$$

- (b) Quelle est la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^p)} dx \quad ?$$

Corrigé

- (1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^q}{1+z^p}. \quad (\text{G.8})$$

Les pôles de f sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les z complexes tels que

$$1 + z^p = 0. \quad (\text{G.9})$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (G.9), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{p}},$$

puisque

$$z_0^p = \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^p = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions z de (G.9), sous la forme

$$Z = zz_0,$$

ce qui donne

$$Z^p = (zz_0)^p = z^p z_0^p = -1,$$

et donc, puisque $z_0^p = -1$, on a

$$z^p = 1,$$

ce qui nous montre que z est une racine p -ième de l'unité, donc dans l'ensemble

$$U_p = \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{p}}, \quad k \in \{0, \dots, p-1\} \right\} \quad (\text{G.10})$$

et donc

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } \{z_k\}_{0 \leq k \leq p-1} \text{ où } z_k = e^{\frac{2ki\pi}{p}} e^{\frac{i\pi}{p}}, \quad (\text{G.11})$$

ce qui est encore équivalent à

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } z_k = e^{\frac{(1+2k)i\pi}{p}}, \text{ pour } k \in \{0, \dots, p-1\}. \quad (\text{G.12})$$

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{p}},$$

sur le cercle trigonométrique, d'argument π/p , par l'identité et les $p-1$ rotations, d'angles $\frac{(1+2k)\pi}{p}$, pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Voir la figure G.2.

- (2) Avant de répondre à la question, déterminons les pôles réels de f , avec deux cas, selon la parité de p .
- Premier cas : p est pair. On a alors, pour tout x réel, $x^p \geq 0$ et donc, $x^p + 1 \geq 1 > 0$. Le dénominateur de f n'est donc jamais nul pour x réel et f n'a donc pas de pôle réel.
 - Second cas : p est impair. Puisque $p \geq 2$, on a donc $p = 2q + 1$ avec $q \geq 1$. Parmi les pôles de f , donnés par (G.12), considérons $k = q$. Il est clair que $k \geq 1$ et que $k \leq p-1$, ce qui est équivalent à $q \leq 2q$, ce qui est vrai. Pour ce $k = q$, on a

$$z_q = e^{\frac{(1+2q)i\pi}{2q+1}} = e^{i\pi} = -1,$$

et donc $z_q = -1$ est un unique pôle réel de f . On vérifie que c'est l'unique pôle réel de f .

Bref,

$$\text{Si } p \text{ est pair, } f \text{ n'a aucun pôle réel.} \quad (\text{G.13a})$$

$$\text{Si } p \text{ est impair, } f \text{ a un unique pôle réel (égal à } -1). \quad (\text{G.13b})$$

$$(\text{G.13c})$$

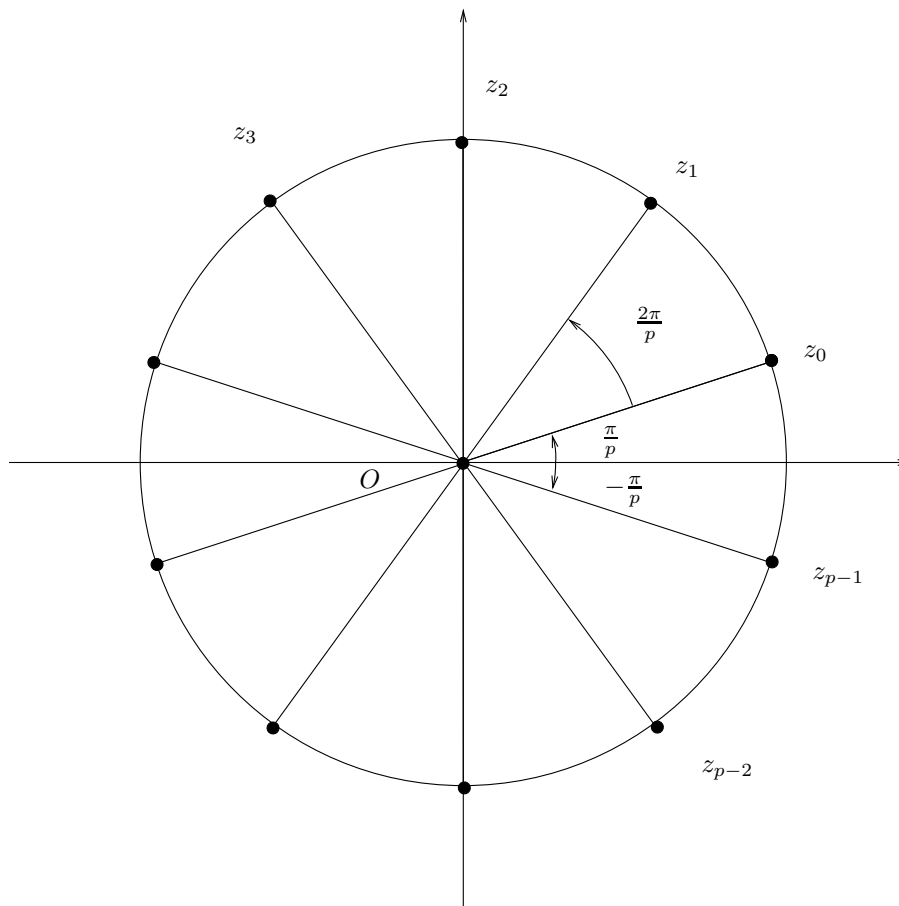
Ainsi, si p est impair, on ne peut appliquer la proposition 5.8 page 56 à la fonction f .

Examinons, ce qui se passe si p est pair. Si q est impair, et si on applique la proposition 5.8 page 56 du cours à la fonction f donnée par (G.8), on aura

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx, \frac{x^q}{1+x^p} dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés au dessus de l'axe des x . Or, la fonction $\frac{x^q}{1+x^p}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

FIGURE G.2. Les pôles $\{z_k\}_{0 \leq k \leq p-1}$ de f .

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx. \quad (\text{G.14})$$

Si q est pair, l'application de la proposition 5.8 page 56 à la fonction f est techniquement possible, mais nous verrons ici que la variante présentée sera plus rapide.

La suite de cette correction est partiellement rédigée. Voir rédaction provisoire sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/complementmanuscrits/01.pdf>

(3)

- (a) Le choix du chemin est proche de celui utilisé dans l'annexe I.
- (b) On obtient

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}. \quad (\text{G.15})$$

REMARQUE G.1. Cela est confirmé par matlab : si on tape

```
syms p q x;
f=x^q/(1+x^p);
int(f,x)
```

`simple(int(f,x,0,inf))`

On obtient

$$\int f(x)dx = x^{q+1} \text{hypergeom}\left(\left[1, \frac{q}{p} + p^{-1}\right], \left[1 + \frac{q}{p} + p^{-1}\right], -x^p\right) p^{-1} \left(\frac{q}{p} + p^{-1}\right)^{-1},$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \pi \left(\sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)\right)^{-1} p^{-1}.$$

Attention, cela ne fonctionne que sous Matlab 2007! Pour la version 2019, on ne pourra obtenir par exemple que

```
syms x;
f=x^2/(1+x^9);
int(f,x)
simplify(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = 1/9 \ln(1+x^3) - 1/18 \ln(x^6 - x^3 + 1) + 1/9 \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3}(2x^3 - 1)\sqrt{3}\right),$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{2}{27} \pi \sqrt{3}.$$

ou bien

```
syms x;
f=sqrt(x)/(1+x^9);
int(f,x)
simplify(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = 2/9 \arctan(x^{3/2}) + 1/18 \sqrt{3} \ln(x^3 + \sqrt{3}x^{3/2} + 1) + 1/9 \arctan(2x^{3/2} + \sqrt{3}) - 1/18 \sqrt{3} \ln(x^3 - \sqrt{3}x^{3/2} + 1) + 1/9 \arctan(2x^{3/2} - \sqrt{3})$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2/9 \pi.$$

◇

(c) La valeur de J pour $q = 0$ et $p = 3$ est donnée par

$$J = \frac{\pi}{3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{3 \frac{\sqrt{3}}{2}},$$

soit

$$J = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

(d) La valeur de J pour $q = 1$ et $p = 4$ est donnée par

$$J = \frac{\pi}{4 \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{4 \sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{4},$$

et on retrouve donc le résultat (F.16).

(4) Il faudrait utiliser les techniques d'intégration des fractions rationnelles, présentées par exemple dans [Bas19, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"].

REMARQUE G.2. D'après la remarque G.1, matlab sait d'une certaine façon intégrer f .

◇

(5) (a) Le choix du chemin est proche de ceux utilisés à la fois dans l'annexe H et dans l'annexe I.

$$p > q + 1, \quad (\text{G.16a})$$

$$q \geq 0. \quad (\text{G.16b})$$

Et donc, les calculs de cet exercice sont encore valables si par p est un entier et q réel vérifiant (G.16).

REMARQUE G.3. D'après la remarque G.1, matlab connaît ces résultats pour tout p et q .

◇

(b) La valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^p} dx$$

est donné par (G.15) avec $q = 1/2$, c'est-à-dire :

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}.$$

soit encore

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{3\pi}{2p}\right)},$$

REMARQUE G.4. Cela est confirmé par matlab (2007) : On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^q} dx = \pi \csc\left(3/2 \frac{\pi}{p}\right) p^{-1},$$

où $\csc(y) = 1/\sin(y)$.

◇

(6) (a)

$$p > q + 1, \quad (\text{G.17a})$$

$$q > -1. \quad (\text{G.17b})$$

Et donc, les calculs de cet exercice sont encore valables si par p est un entier et q réel vérifiant (G.17).

Remarquons que la condition nécessaire et suffisante constitue aussi une condition nécessaire pour que l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \quad (\text{G.18})$$

converge. En effet, sur \mathbb{R}_+^* , $f(x)$ est strictement positive et on a

$$\text{quand } x \text{ tend vers zéro : } f(x) \sim x^q, \quad (\text{G.19a})$$

$$\text{quand } x \text{ tend vers } +\infty : f(x) \sim x^{q-p}, \quad (\text{G.19b})$$

Pour l'intégrabilité de f en zéro, d'après le critère de Rieman, il faut et il suffit que $q + 1 > 0$ ce qui donne (G.17b). Pour l'intégrabilité de f en $+\infty$, d'après le critère de Rieman, il faut et il suffit que $q - p + 1 < 0$ ce qui donne $p > q + 1$ et donc (G.17a).

(b) La valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^p)} dx,$$

est donnée par (G.15) avec $q = -1/2$, c'est-à-dire :

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}.$$

soit encore

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)},$$

REMARQUE G.5. Cela est confirmé par matlab (2007) : On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^q} dx = \pi \csc\left(1/2 \frac{\pi}{p}\right) p^{-1},$$

où $\csc(y) = 1/\sin(y)$.

◇

Calcul de l'intégrale de Dirichlet (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul de l'intégrale de Dirichlet sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{H.1})$$

On utilise la méthode des résidus et on pourra consulter par exemple [Buc92, p. 118-119] (qui a inspiré directement cette annexe) ou une méthode très légèrement différente sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_de_Dirichlet

Énoncé

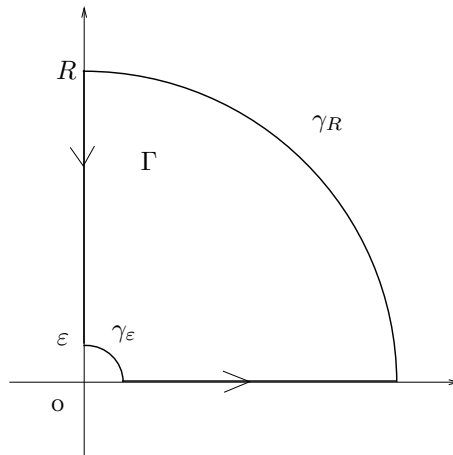


FIGURE H.1. Le chemin Γ considéré.

Pour ε et R deux réels tels que $0 < \varepsilon < R$, on considère le chemin fermé Γ constitué des deux arcs de cercles de centre l'origine O et de rayons respectifs ε et R (notés respectivement γ_ε et γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure H.1. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \quad (\text{H.2})$$

- (1) Paramétrer correctement les deux cercles et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (\text{H.3})$$

- (2) (a) Montrer que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = i \int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \quad (\text{H.4})$$

(b) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta. \quad (\text{H.5})$$

(c) En déduire que

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{2R} \quad (\text{H.6})$$

puis que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (\text{H.7})$$

(3) On admet (comme (H.4)) que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -i \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \quad (\text{H.8})$$

(a) À $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, quelle est la limite de $e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ quand ε tend vers zéro par valeur strictement positive.

(b) Est-ce une condition suffisante pour assurer que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} -i \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = -\frac{i\pi}{2} ? \quad (\text{H.9})$$

On admettra néanmoins ce résultat.

(4) Que vaut $\int_\Gamma f(z) dz$?

(5) Conclure et montrer que que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0, \quad (\text{H.10a})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{H.10b})$$

Corrigé

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants des deux arcs de cercles de centre l'origine O et des deux segments constituant Γ :

$$\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [\pi/2, 0]; \quad (\text{H.11a})$$

$$\gamma_R : z = R e^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0, \pi/2]; \quad (\text{H.11b})$$

$$[\varepsilon, R] : z = t \text{ pour } t \in [\varepsilon, R]; \quad (\text{H.11c})$$

$$[iR, i\varepsilon] : z = it \text{ pour } t \in [R, \varepsilon]. \quad (\text{H.11d})$$

On a aussi

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{[\varepsilon, R]} f(z) dz + \int_{[iR, i\varepsilon]} f(z) dz.$$

Ainsi, grâce aux deux paramétrages (H.11c) et (H.11d), il vient pour chacun d'eux $dz = dt$ et $dz = it$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z) dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_\varepsilon^R f(t) dt + i \int_R^\varepsilon f(it) dt, \\ &= \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt - i \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{it} dt \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (\text{H.12})$$

(2) (a) D'après la définition (H.11b), on a $dz = Rie^{i\theta} d\theta$ et

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta} d\theta, \\ &= Ri \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i(Re^{i\theta})}}{Re^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta, \\ &= i \int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i \int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \quad (\text{H.13})$$

(b) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0, \pi/2]$, ce dont on déduit que la courbe est au-dessus de sa corde, d'équation $y = 2\theta/\pi$, soit

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin \theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \quad (\text{H.14})$$

(c) D'après (H.13), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq \int_0^{\pi/2} |e^{iRe^{i\theta}}| d\theta, \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

et on déduit de (H.14) que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta, \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta, \\ &= -\frac{\pi}{2R} \left(e^{-\frac{2R \times \pi}{2\pi}} - 1 \right), \\ &= \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}), \\ &\leq \frac{\pi}{2R} \end{aligned}$$

et donc

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi}{2R} \quad (\text{H.15})$$

dont on déduit immédiatement que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \quad (\text{H.16})$$

(3) De la même façon que l'on a établi (H.13), on a $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$ et

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \int_{\pi/2}^0 f(\varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta, \\ &= -\varepsilon i \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}}{\varepsilon e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta, \\ &= -i \int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -i \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \quad (\text{H.17})$$

(a) À $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} = 1. \quad (\text{H.18})$$

(b) On a donc la convergence simple de la fonction $\theta \mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ vers 1 sur $[0, \pi/2]$. Si la convergence était uniforme, on pourrait écrire donc que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et en déduire, selon (H.17) que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -\frac{i\pi}{2}. \quad (\text{H.19})$$

Malheureusement, cette convergence n'est pas *a priori* uniforme. Cependant, le théorème de convergence dominée de Lebesgue O.3 du cours est aussi valable pour une fonction à valeurs dans \mathbb{C} . Il suffit donc, pour pouvoir l'appliquer de majorer chaque fonction $\theta \mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ de façon indépendante de ε par une fonction intégrable sur $[0, \pi/2]$, ce qui est aisé car

$$\left| e^{\varepsilon i e^{i\theta}} \right| = e^{-\varepsilon \sin \theta} \leq 1.$$

REMARQUE H.1. Puisque, à $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\left| e^{R i e^{i\theta}} \right| \leq e^{-R \sin \theta}$$

on déduit d'une part que à $\theta \in]0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{R i e^{i\theta}} = 0$$

et d'autre part que, que pour tout $R > 0$, on a

$$\left| e^{R i e^{i\theta}} \right| \leq 1.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue O.3 assure encore que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

et cela pouvait nous permettre d'éviter de passer par la question 2!

(4) La fonction $f : z \mapsto e^{iz}/z$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* . Ainsi, elle n'a aucune singularité à l'intérieur du chemin Γ . Ainsi, d'après la formule du résidu (formule 3.37) du cours, on a

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (\text{H.20})$$

Ici, on n'a même pas de résidu à calculer!

(5) Synthétisons tous les résultats : d'après (H.12) et (H.20), il vient, pour tout ε et R

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

ce qui donne, en séparant partie réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt + \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz \right) &= 0, \\ \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t} dt + \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz \right) &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, d'après (H.16) et (H.19), il vient en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt &= 0, \\ \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t} dt &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

ce que l'on peut noter sous la forme finale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0, \quad (\text{H.21a})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{H.21b})$$

REMARQUE H.2. Les intégrandes de (H.21) sont prolongeables par continuité en zéro donc la convergence en zéro était acquise dès le début. Attention cependant, ces intégrales ne sont que semi-convergentes au sens de l'intégration de Riemann : on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos t - e^{-t}}{t} \right| dt = +\infty,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty.$$

Au sens de l'intégration de Lebesgue, les fonctions intégrandes ne sont donc pas dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Calcul de l'intégrale de Fresnel (sous la forme d'un exercice corrigé)

Nous proposons dans cette annexe le calcul des intégrales de Fresnel sous la forme d'un exercice corrigé donné en examen :

$$\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \quad (\text{I.1a})$$

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \quad (\text{I.1b})$$

On utilise la méthode des résidus. et on pourra consulter par exemple [Buc92, p. 118-119] (qui a inspiré directement cette annexe) ou

http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_de_Fresnel

L'utilisation de l'intégrale de Fresnel pour la longueur de la spirale de Cornu et dans les Clothoïdes est illustrée dans

- <http://fr.wikipedia.org/wiki/Clothoïde>
- ou dans l'exercice 2 de l'examen médian de MT25 donné au Printemps 2006, disponible sur
 - http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt25/medianMT25_P06.zip
 - http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt25/source_matlab_medianP06.zip
 - http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt25/mediancorrigeMT25_P06.zip

Énoncé

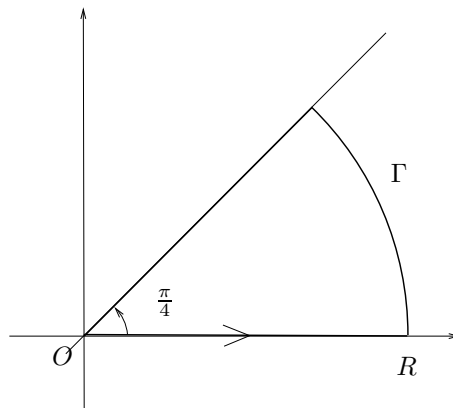


FIGURE I.1. Le chemin Γ_T considéré.

Pour R un réel strictement positif, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et d'angle $\pi/4$, noté Γ_R et de deux segments comme le montre la figure I.1. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = e^{-(z^2)}, \quad (\text{I.2})$$

notée e^{-z^2} pour simplifier.

(1) Paramétrer correctement l'arc de cercle Γ_R et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2} Ri \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt. \quad (\text{I.3})$$

(2) (a) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \psi \in [0, \pi/2], \quad \sin \psi \geq \frac{2}{\pi} \psi. \quad (\text{I.4})$$

(b) En déduire que

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} d\phi \right| \leq \frac{\pi}{2R^2}. \quad (\text{I.5})$$

(3) On admet que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (\text{I.6})$$

En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \quad (\text{I.7a})$$

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \quad (\text{I.7b})$$

Corrigé

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants de l'arc de cercle Γ_R et les deux segments constituant Γ :

$$\gamma_R : z = Re^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0, \pi/4]; \quad (\text{I.8a})$$

$$\text{segment horizontal } I_1 : z = t \text{ pour } t \in [0, R]; \quad (\text{I.8b})$$

$$\text{segment oblique } I_2 : z = te^{i\frac{\pi}{4}} \text{ pour } t \in [R, 0]. \quad (\text{I.8c})$$

On a aussi

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz.$$

Ainsi, grâce aux paramétrages (I.8), il vient pour chacun d'eux, $dz = Rie^{i\theta}d\theta$, $dz = dt$ et $dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dt$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= Ri \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} e^{-R^2 e^{2i\theta}} d\theta + \int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt, \\ &= Ri \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} e^{-R^2 \cos(2\theta) - iR^2 \sin(2\theta)} d\theta + \int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt, \end{aligned}$$

soit, en posant $\phi = 2\theta$ dans la première intégrale :

$$= \frac{1}{2} Ri \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt,$$

et donc

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2} Ri \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt. \quad (\text{I.9})$$

- (2) (a) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0, \pi/2]$, dont on déduit que la courbe est au dessus de sa corde, d'équation $y = 2\phi/\pi$, soit

$$\forall \psi \in [0, \pi/2], \quad \sin \psi \geq \frac{2}{\pi} \psi. \quad (\text{I.10})$$

- (b) On en déduit donc

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} d\phi \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} \right| d\phi, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi} d\phi, \end{aligned}$$

soit, en posant $\psi = \pi/2 - \phi$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \psi} d\psi, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \psi} d\psi, \\ &= -\frac{\pi}{2R^2} (e^{-R^2} - 1), \\ &= \frac{\pi}{2R^2} (1 - e^{-R^2}), \\ &\leq \frac{\pi}{2R^2}, \end{aligned}$$

et donc que

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - iR^2 \sin \phi} d\phi \right| \leq \frac{\pi}{2R^2}. \quad (\text{I.11})$$

- (3) Posons

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (\text{I.12})$$

On admet que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (\text{I.13})$$

REMARQUE I.1. Formellement (mais ce calcul est totalement justifié *a posteriori*), on écrit successivement

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy, \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \end{aligned}$$

ce que l'on écrit en polaire sous la forme (puisque $dx dy = dS = r dr d\theta$) :

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{\theta \in [0, \pi/2], r \in \mathbb{R}_+} e^{-r^2} r dr d\theta, \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr, \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La fonction f est holomorphe sur \mathbb{C} et la formule des résidus et (I.9) impliquent donc, pour tout R ,

$$\frac{1}{2} R i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi - i R^2 \sin \phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt = 0. \quad (\text{I.14})$$

Si on fait tendre R vers l'infini dans (I.14), les résultats (I.11) et (I.13) impliquent donc que $\int_0^R e^{-it^2} dt$ admet une limite quand R tend vers l'infini qui vérifie

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = 0$$

On en déduit donc

$$\int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1 - i),$$

et en séparant partie réelle et imaginaire, on en déduit finalement

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos^2 x dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \\ \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Calcul d'une intégrale (sous la forme d'un exercice et d'un problème corrigés)

Nous proposons dans cette annexe le calcul de l'intégrale suivante sous la forme d'un problème corrigé donné en examen :

$$J(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + bt^2)}{a^2 + t^2} dt,$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

Ceci constitue un contre exemple où le calcul par les résidus, habituellement plus rapide, est presque plus long que le calcul habituel ; de plus, le calcul par résidu est moins général que le calcul habituel !

Ce problème nécessitait au préalable le traitement du petit exercice suivant préliminaire, lui aussi donné en examen :

Énoncé de l'exercice

(1) À partir de l'inégalité triangulaire rappelée ici :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

montrer que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z - z'| \geq ||z| - |z'||. \quad (\text{J.1})$$

(2) Pour toute la suite, c est un réel strictement positif. Dédurre de ce qui précède que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |1 + cz^2| = +\infty. \quad (\text{J.2})$$

(3) (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\text{Ln}(1 + cz^2)$ est défini

$$|\text{Ln}(1 + cz^2)| \leq |\ln |1 + cz^2|| + \pi. \quad (\text{J.3})$$

(b) Dédurre de ce qui précède que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \text{Ln}(1 + cz^2) \text{ défini}}} \frac{\text{Ln}(1 + cz^2)}{|z|} = 0. \quad (\text{J.4})$$

Corrigé de l'exercice

(1) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Appliquons l'inégalité triangulaire rappelée ici :

$$\forall Z, Z' \in \mathbb{C}, \quad |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|, \quad (\text{J.5})$$

à $Z = z - z'$ et $Z' = z'$, ce qui donne

$$|z| \leq |z - z'| + |z'|, \quad (\text{J.6})$$

et donc

$$|z| - |z'| \leq |z - z'|. \quad (\text{J.7})$$

On peut intervertir les rôles de z et de z' ce qui donne dans (J.6)

$$|z'| \leq |z - z'| + |z|,$$

et donc

$$|z'| - |z| \leq |z - z'| \tag{J.8}$$

De (J.7) et (J.8) on déduit donc

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z - z'| \geq ||z| - |z'||. \tag{J.9}$$

(2) Pour toute la suite, c est un réel strictement positif. On peut écrire d'après (J.9)

$$|1 + cz^2| = |cz^2 - (-1)| \geq ||cz^2| - |(-1)|| = |c|z|^2 - 1|$$

et puisque $|z| \rightarrow +\infty$, pour $|z|$ assez grand, $c|z|^2 > 1$ et donc

$$|1 + cz^2| \geq c|z|^2 - 1$$

qui tend $+\infty$ si $|z| \rightarrow +\infty$. On a donc

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |1 + cz^2| = +\infty. \tag{J.10}$$

(3) (a) Par définition, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\text{Ln}(1 + cz^2)$ est défini, on a

$$\text{Ln}(1 + cz^2) = \ln |1 + cz^2| + i \arg(1 + cz^2),$$

et donc, de nouveau grâce à (J.5)

$$|\text{Ln}(1 + cz^2)| \leq |\ln |1 + cz^2|| + |\arg(1 + cz^2)|,$$

et puisque l'argument est dans $] -\pi, \pi]$, on a donc

$$|\text{Ln}(1 + cz^2)| \leq |\ln |1 + cz^2|| + \pi. \tag{J.11}$$

(b) Supposons que $|z|$ tende vers l'infini. On a donc, d'après (J.10) $|1 + cz^2|$ qui tend vers l'infini, et pour $|z|$ assez grand,

$$1 \leq |1 + cz^2|$$

et puisque le logarithme (réel) est croissant

$$0 \leq \ln(1) \leq \ln |1 + cz^2| \leq \ln(1 + c|z|^2) = |\ln(1 + c|z|^2)|,$$

Ainsi, pour $|z|$ assez grand,

$$0 \leq \ln |1 + cz^2| \leq \ln(1 + c|z|^2) \tag{J.12}$$

et donc, d'après (J.11)

$$|\text{Ln}(1 + cz^2)| \leq \ln(1 + c|z|^2) + \pi,$$

On en déduit que, pour tout z tel que $\text{Ln}(1 + cz^2)$ est défini, on a

$$0 \leq \frac{|\text{Ln}(1 + cz^2)|}{|z|} \leq \frac{\ln(1 + c|z|^2)}{|z|} + \frac{\pi}{|z|} = \frac{\ln(1 + c|z|^2)}{|z|} + \frac{\pi}{|z|} \tag{J.13}$$

Puisque, quand R tend vers l'infini

$$\frac{\ln(1 + cR^2)}{R} + \frac{\pi}{R},$$

tend vers zéro, on déduit donc de (J.13) que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \text{Ln}(1 + cz^2) \text{ défini}}} \frac{\text{Ln}(1 + cz^2)}{|z|} = 0. \tag{J.14}$$

REMARQUE J.1. On verra plus loin que $\text{Ln}(1 + cz^2)$ est défini et holomorphe sur l'ouvert de \mathbb{C} défini par (J.31) et (J.32).

Énoncé du problème

On cherche à déterminer la valeur de

$$J(a, b) = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + bt^2)}{a^2 + t^2} dt, \quad (\text{J.15})$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

(1) Montrer que J est définie pour tout $a > 0$ et $b > 0$. On admettra pour toute la suite que J est définie et continue pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

(2) En faisant un changement de variable, montrer que si $a \neq 0$,

$$\forall b \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad J(a, b) = \frac{1}{a} I(ba^2), \quad (\text{J.16})$$

où

$$\forall c \geq 0, \quad I(c) = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + ct^2)}{1 + t^2} dt. \quad (\text{J.17})$$

(3) On veut maintenant calculer l'intégrale $I(c)$ de (J.17) grâce au théorème des résidus.

(a) Soit $c > 0$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\text{Ln}(1 + cz^2)}{1 + z^2}. \quad (\text{J.18})$$

(i) Quels sont les zéros de $z \mapsto 1 + z^2$?

(ii) Montrer que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{avec } \text{Ln}(1 + cz^2) \text{ défini}}} |zf(z)| = 0. \quad (\text{J.19})$$

On pourra utiliser l'exercice page 237.

(iii) On tient le raisonnement suivant : puisque (J.19) est vérifiée, la proposition 5.11 page 58 du cours implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2i\pi \text{Rés}(f, i). \quad (\text{J.20})$$

(A) Déterminer la valeur de $\text{Rés}(f, i)$, puis déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$

(B) La valeur obtenue est absurde et ce raisonnement est erroné ! Pourquoi ?

(iv) Le raisonnement de la question 3(a)iii n'étant pas valable, on calcule maintenant proprement la valeur de l'intégrale recherchée !

(A) Montrer que f est holomorphe sur l'ouvert

$$W = \mathbb{C} \setminus (V \cup \{i, -i\}), \quad (\text{J.21})$$

où

$$V = \{z \in \mathbb{C}, \quad \exists t \in [1/\sqrt{c}, +\infty[, z = \pm it\}. \quad (\text{J.22})$$

(B)

Pour toute la suite, on suppose que

$$0 < c < 1, \quad (\text{J.23})$$

et on considère, à $\varepsilon > 0$, assez petit, et $R > 0$, assez grand, le chemin $\gamma_{\varepsilon, R}$ défini sur la figure J.1 page suivante. Montrer que ce chemin est inclus dans l'ouvert W .

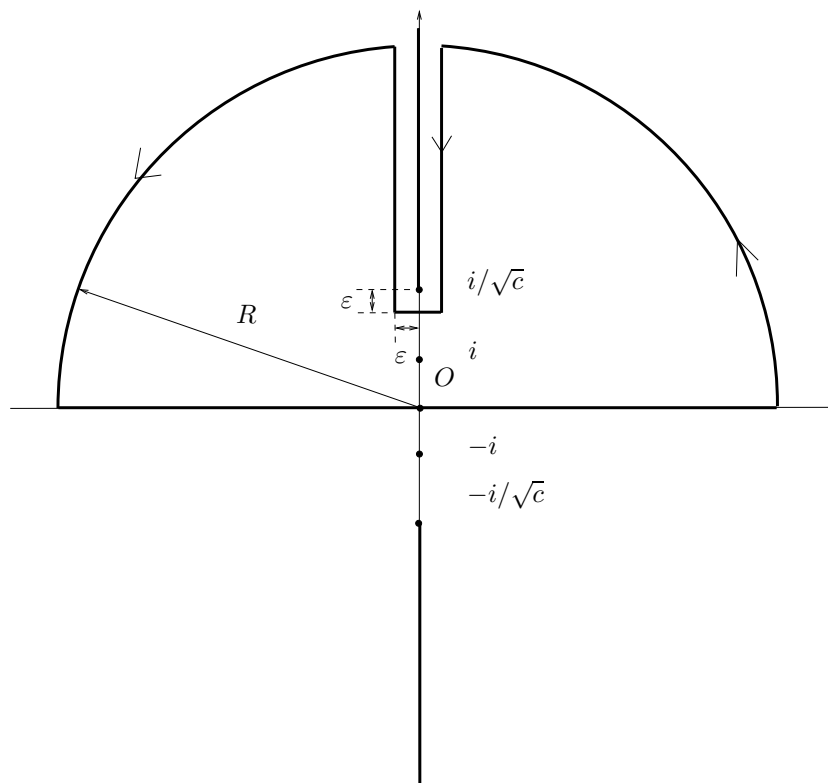


FIGURE J.1. Le chemin $\gamma_{\epsilon,R}$ utilisé.

- (C) Quel est le résultat de la proposition 3.37 page 41 du cours ici ?
- (D) Qu'entraîne-t-il si on fait tendre ϵ vers zéro et R vers l'infini ?
- (b) Est-ce que les résultats établis sont valides pour $c = 0$ et $c = 1$? Quelle sont les valeurs de $I(0)$ et $I(1)$?
- (c) Quelle est la valeur de $J(a, b)$ pour $a, b \geq 0$ vérifiant $0 \leq ba^2 \leq 1$?

Corrigé du problème

- (1) Il est clair que l'intégrale est bien définie puisque l'intégrande est continue pour $t \rightarrow 0$ et est un $O(1/t^{3/2})$ pour $t \rightarrow +\infty$.

REMARQUE J.2. Pour montrer la définition et la continuité de J sur \mathbb{R}_+^2 , on raisonne comme suit :

Soient $A, B \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(a, b) \in [A, \infty[\times]0, B]$, on a par croissance du logarithme et puisque $a^2 + t^2 \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \frac{\ln(1+bt^2)}{a^2+t^2} \leq \frac{\ln(1+Bt^2)}{A^2+t^2}$$

À A et B fixé, la fonction $t \mapsto \phi(t) = \frac{\ln(1+Bt^2)}{A^2+t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ puisque continue en zéro et en $O(1/t^{3/2})$ en $+\infty$. La fonction $(t, a, b) \mapsto \frac{\ln(1+bt^2)}{a^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [A, \infty[\times]0, B]$. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, J est définie et continue sur $[A, \infty[\times]0, B]$. Puisque c'est vrai pour tout $A, B \in \mathbb{R}_+^*$, J est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

Si à $b \geq 0$ fixé, a tend vers zéro, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\ln(1+bt^2)}{a^2+t^2} \rightarrow \frac{\ln(1+bt^2)}{t^2},$$

qui est équivalent quand t tend vers zéro à

$$\frac{bt^2}{t^2} = b,$$

et donc continue en zéro. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+bt^2)}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. On peut aussi écrire, pour tout $a \geq 0$,

$$\frac{\ln(1+bt^2)}{a^2+t^2} \leq \frac{\ln(1+bt^2)}{t^2},$$

qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ , d'après ce qui précède. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, J est définie et continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

- (2) Si $a \neq 0$, on considère la nouvelle variable u et le changement de variable $u = t/a$. On a donc $dt = a du$ et

$$J(a, b) = a \int_0^\infty \frac{\ln(1+ba^2u^2)}{a^2+a^2u^2} du = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\ln(1+cu^2)}{1+u^2} du,$$

où $c = ba^2 \geq 0$. On a donc,

$$\forall b \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad J(a, b) = \frac{1}{a} I(ba^2), \quad (\text{J.24})$$

où

$$\forall c \geq 0 \quad I(c) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2} dt. \quad (\text{J.25})$$

- (3) (a) Soit $c > 0$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\text{Ln}(1+cz^2)}{1+z^2}. \quad (\text{J.26})$$

(i) Les zéros de $z \mapsto 1+z^2$ sont $\pm i$.

(ii) On a, tant que le logarithme complexe $\text{Ln}(1+cz^2)$ est défini et que z est non nul,

$$\begin{aligned} |zf(z)| &= |z| \frac{|\text{Ln}(1+cz^2)|}{|1+z^2|}, \\ &= \frac{|\text{Ln}(1+cz^2)|}{\left|\frac{1}{z} + z\right|}, \end{aligned}$$

De nouveau, en utilisant (J.9), on a $\left|\frac{1}{z} + z\right| \geq |z| - 1/|z| \geq |z| - 1$, si $|z|$ est assez grand. On a donc, pour $|z|$ assez grand,

$$\begin{aligned} |zf(z)| &\leq \frac{|\text{Ln}(1+cz^2)|}{|z| - 1}, \\ &\leq \frac{|\text{Ln}(1+cz^2)|}{|z|} \frac{|z|}{|z| - 1}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{|z|}{|z|-1}$ tend vers 1 quand $|z|$ tend vers l'infini, l'équation (J.14) implique donc que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{avec } \text{Ln}(1+cz^2) \text{ défini}}} |zf(z)| = 0. \quad (\text{J.27})$$

(iii)(A) Puisque i est un pôle simple de f , le lemme 3.39 page 43 du cours implique que

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{g(i)}{\phi'(i)},$$

où $g(z) = \text{Ln}(1 + cz^2)$ et $\phi(z) = 1 + z^2$. On a donc

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{\text{Ln}(1 - c)}{2i},$$

et donc

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{\text{Ln}(1 - c)}{2i}. \quad (\text{J.28})$$

D'après la proposition 5.11 page 58 du cours, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2i\pi \text{Rés}(f, i) = \pi \text{Ln}(1 - c),$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \pi \text{Ln}(1 - c), \quad (\text{J.29})$$

Puisque f est paire, on a donc

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{2} \text{Ln}(1 - c), \quad (\text{J.30})$$

(B) La valeur donnée par (J.30) est absurde car l'intégrale existe pour toute valeur de c . Or, $\text{Ln}(1 - c)$ n'est pas défini si $1 - c < 0$. De plus, même si $1 - c > 0$, la valeur de l'intégrale n'est pas conforme à celle donnée par (J.59).

(iv) *Le raisonnement de la question 3(a)iii n'étant pas valable*, on calcule maintenant proprement la valeur de l'intégrale recherchée!

(A) Le dénominateur de f s'annule pour $z = \pm i$. Son numérateur $\text{Ln}(1 + cz^2)$ n'est défini et holomorphe que si $1 + cz^2$ n'est pas un réel négatif ou nul (s'il est dans le plan fendu habituel). Or $1 + cz^2$ est un réel négatif ou nul est équivalent à

$$1 + cz^2 = -r,$$

où $r \in \mathbb{R}_+$, soit encore

$$z^2 = -\frac{r+1}{c},$$

où $-\frac{r+1}{c} \leq -1/c < 0$ et donc

$$z = \pm i\tau,$$

où $\tau \in [1/\sqrt{c}, +\infty[$. et donc f est holomorphe sur l'ouvert

$$W = \mathbb{C} \setminus (V \cup \{i, -i\}), \quad (\text{J.31})$$

où

$$V = \{z \in \mathbb{C}, \exists t \in [1/\sqrt{c}, +\infty[, z = \pm it\}. \quad (\text{J.32})$$

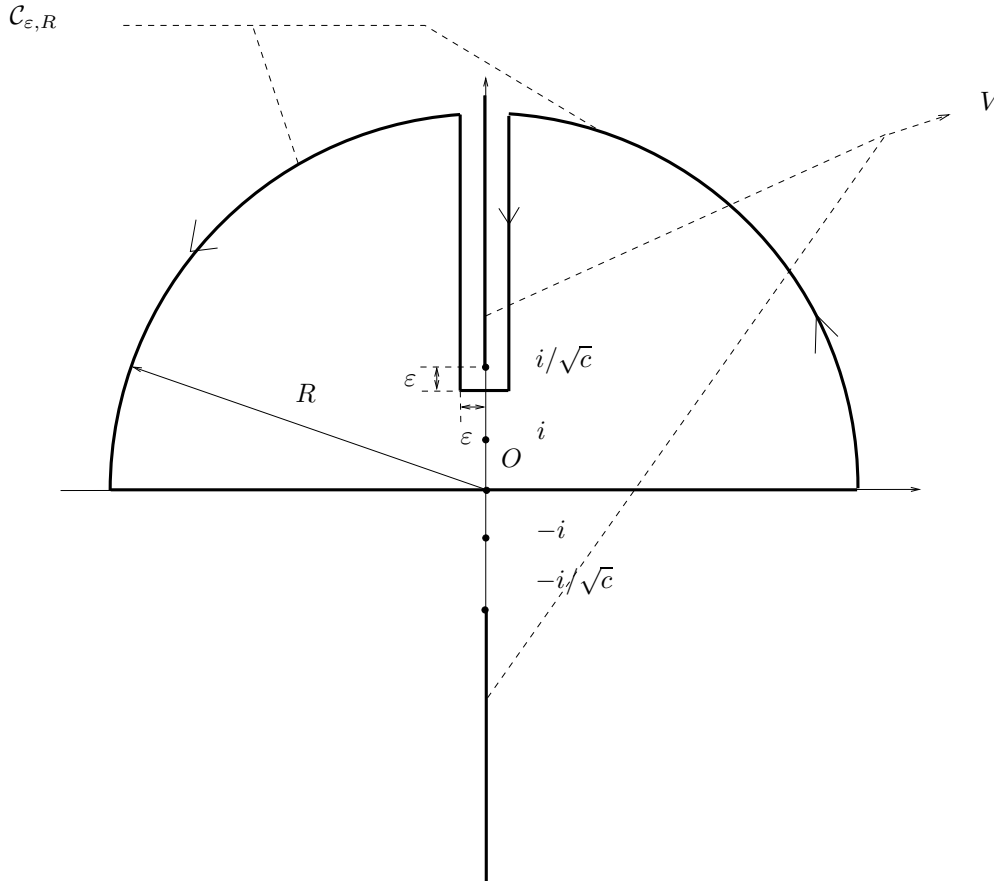
(B) Le chemin évite $\pm i$ et la partie interdite définie par V et est donc inclus dans l'ouvert W , qui n'est pas convexe ici!

(C) On admettra que, malgré l'absence de convexité de l'ouvert W , la proposition 3.37 page 41 du cours s'applique ici; l'unique résidu de f à l'intérieur du chemin est i et elle donne donc

$$2i\pi \text{Rés}(f, i) = \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz. \quad (\text{J.33})$$

On découpe le chemin $\gamma_{\varepsilon, R}$ en :

- le segment horizontal $[-R, R]$ où $z = t$;
- le premier segment vertical $\delta_{\varepsilon, R}$ où $z = \varepsilon + it$ avec $t \in [R_1, 1/\sqrt{c} - \varepsilon]$ où R_1 est "proche" de R (quand ε tend vers zéro);
- le second segment vertical $\delta'_{\varepsilon, R}$ où $z = -\varepsilon + it$ avec $t \in [1/\sqrt{c} - \varepsilon, R_1]$ où R_1 est "proche" de R (quand ε tend vers zéro);
- un autre segment horizontal d_ε où $z = i(1/\sqrt{c} - \varepsilon) + t$ avec $t \in [\varepsilon, -\varepsilon]$;
- les deux arcs de cercle de centre 0 et de rayon R , de réunion notée $\mathcal{C}_{\varepsilon, R}$.

FIGURE J.2. Le chemin $\gamma_{\varepsilon, R}$ utilisé.

Voir figure J.2. On a donc

$$2i\pi \operatorname{Rés}(f, i) = \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{\delta_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\delta'_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{d_\varepsilon} f(z) dz. \quad (\text{J.34})$$

Le résidu de f en i est toujours donné par (J.28).

(D) On admet¹ que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{d_\varepsilon} f(z) dz = 0. \quad (\text{J.35})$$

1. Ce qui provient du fait que l'intégrande est bornée indépendamment de ε au voisinage de $1/\sqrt{c}$.

On admet² que, grâce à l'hypothèse (J.27),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 0. \quad (\text{J.36})$$

On sait que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R,R]} f(z) dz = 2 \int_0^{\infty} f(t) dt. \quad (\text{J.37})$$

Enfin, sur le premier segment vertical $\delta_{\varepsilon,R}$, on a $z = \varepsilon + it$ avec $t \in [R_1, 1/\sqrt{c} - \varepsilon]$ et sur le second segment vertical $\delta'_{\varepsilon,R}$, $z = -\varepsilon + it$ avec $t \in [1/\sqrt{c} - \varepsilon, R_1]$ On a donc, sur chacun de ces deux segments, $dz = i dt$ et

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z) dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z) dz &= i \left(\int_{R_1}^{1/\sqrt{c}-\varepsilon} f(\varepsilon + it) dt + \int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(-\varepsilon + it) dt \right), \\ &= i \left(- \int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(\varepsilon + it) dt + \int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(-\varepsilon + it) dt \right). \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\delta_{\varepsilon,R}} f(z) dz + \int_{\delta'_{\varepsilon,R}} f(z) dz = i \left(- \int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(\varepsilon + it) dt + \int_{1/\sqrt{c}-\varepsilon}^{R_1} f(-\varepsilon + it) dt \right). \quad (\text{J.38})$$

Or, pour tout $t \in [1/\sqrt{c} - \varepsilon, R_1]$, on a, pour $z = \varepsilon + it$

$$z^2 = \varepsilon^2 - t^2 + 2i\varepsilon t,$$

et donc

$$\forall t \in [1/\sqrt{c} - \varepsilon, R_1], \quad f(\varepsilon + it) = \frac{\text{Ln}(1 + c\varepsilon^2 - ct^2 + 2i\varepsilon t)}{1 + \varepsilon^2 - t^2 + 2i\varepsilon t}. \quad (\text{J.39})$$

et de même

$$\forall t \in [1/\sqrt{c} - \varepsilon, R_1], \quad f(-\varepsilon + it) = \frac{\text{Ln}(1 + c\varepsilon^2 - ct^2 - 2i\varepsilon t)}{1 + \varepsilon^2 - t^2 - 2i\varepsilon t}. \quad (\text{J.40})$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1 + \varepsilon^2 - t^2 - 2i\varepsilon t = 1 - t^2 < 0, \quad (\text{J.41})$$

car $t^2 \geq 1/c > 1$, d'après l'hypothèse faite sur c :

$$0 < c < 1. \quad (\text{J.42})$$

Notons

$$z_\varepsilon = 1 + c\varepsilon^2 - ct^2 + 2i\varepsilon t, \quad (\text{J.43})$$

qui vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} z_\varepsilon = 1 - ct^2. \quad (\text{J.44})$$

En revanche, on ne peut pas plus écrire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Ln}(z_\varepsilon) = \text{Ln}(1 - ct^2),$$

puisque $1 - ct^2 \in \mathbb{R}_-^*$ et n'a pas de logarithme complexe. Cependant, la partie imaginaire de z_ε est strictement positive et sa partie réelle tend vers $1 - ct^2 < 0$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la partie imaginaire de z_ε est strictement positive. On a donc, pour $\varepsilon > 0$,

$$\text{Ln}(z_\varepsilon) = \ln|z_\varepsilon| + i \arg(z_\varepsilon).$$

2. provient du lemme 5.6 page 55 du cours.

La partie réelle de z_ε tend vers un nombre strictement négatif et sa partie imaginaire tend vers zéro par valeur positive. Ainsi, z_ε tend vers un point de l'axe réel négatif, en en étant "au-dessus". Ainsi, à la limite ε tendant vers zéro, l'argument de z_ε tend donc vers π . D'après (J.44), on a donc finalement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Ln}(z_\varepsilon) = \ln|1 - ct^2| + i\pi,$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Ln}(z_\varepsilon) = \ln(ct^2 - 1) + i\pi. \quad (\text{J.45})$$

D'après (J.39), on a donc finalement

$$\forall t \in [1/\sqrt{c}, R], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon + it) = \frac{\ln(ct^2 - 1) + i\pi}{1 - t^2}. \quad (\text{J.46})$$

Si on fait le même raisonnement sur $z_\varepsilon = 1 + c\varepsilon^2 - ct^2 - 2ic\varepsilon t$ dont la partie imaginaire de z_ε est strictement négative et sa partie réelle tend vers $1 - ct^2 < 0$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a, c comme (J.45)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Ln}(z_\varepsilon) = \ln(ct^2 - 1) - i\pi, \quad (\text{J.47})$$

et donc

$$\forall t \in [1/\sqrt{c}, R], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(-\varepsilon + it) = \frac{\ln(ct^2 - 1) - i\pi}{1 - t^2}. \quad (\text{J.48})$$

On admet³ que (J.39), (J.40), (J.45), (J.48), impliquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_\varepsilon, R} f(z) dz + \int_{\delta'_\varepsilon, R} f(z) dz = i \left(- \int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{\ln(ct^2 - 1) + i\pi}{1 - t^2} dt + \int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{\ln(ct^2 - 1) - i\pi}{1 - t^2} dt \right),$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_\varepsilon, R} f(z) dz + \int_{\delta'_\varepsilon, R} f(z) dz = -2\pi \int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{1}{t^2 - 1} dt. \quad (\text{J.49})$$

Pour tout $t \in [1/\sqrt{c}, R_1]$, on a $t^2 \geq 1/c$ d'où, d'après (J.42), on a $t^2 - 1 \geq 1/c - 1 > 0$ et la fonction $1/(t^2 - 1)$ est continue et intégrable sur $[1/\sqrt{c}, R_1]$. Puisque

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right),$$

3. conséquence de la limite simple et du théorème O.3 page 265 du cours.

on a donc, si $R > 1$,

$$\begin{aligned}
 \int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{1}{t^2 - 1} dt &= \frac{1}{2} \left(\int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left([\ln(|t-1|)]_{1/\sqrt{c}}^R - [\ln(|t+1|)]_{1/\sqrt{c}}^R \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln|R-1| - \ln|R+1| - \ln|1/\sqrt{c}-1| + \ln|1/\sqrt{c}+1| \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{|R-1|}{R+1} + \ln \frac{1/\sqrt{c}+1}{|1/\sqrt{c}-1|} \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{R-1}{R+1} + \ln \frac{1/\sqrt{c}+1}{1/\sqrt{c}-1} \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{R-1}{R+1} + \ln \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}} \right),
 \end{aligned}$$

Enfin, si on passe à la limite R tendant vers l'infini, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+, R \rightarrow \infty} \int_{\delta_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\delta'_{\varepsilon, R}} f(z) dz = -\pi \ln \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}. \quad (\text{J.50})$$

Passons finalement à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, et (J.34), (J.35), (J.36), et (J.37) donnent donc

$$2i\pi \operatorname{Rés}(f, i) = 2 \int_0^\infty f(t) dt - \pi \ln \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}},$$

où le résidu de f en i est toujours donné par (J.28). Ainsi, on obtient

$$2i\pi \frac{\operatorname{Ln}(1-c)}{2i} = 2 \int_0^\infty f(t) dt - \pi \ln \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}},$$

et donc, grâce à (J.42),

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty f(t) dt &= \frac{\pi}{2} \ln(1-c) + \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}, \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\ln \left((1-c) \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}} \right) \right), \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln \left((1-\sqrt{c})(1+\sqrt{c}) \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}} \right), \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln \left((1+\sqrt{c})^2 \right), \\
 &= \pi \ln(1+\sqrt{c}),
 \end{aligned}$$

et donc finalement

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2} dt = \pi \ln(1+\sqrt{c}), \quad (\text{J.51})$$

qui est différent de la valeur donnée par (J.30). De plus, la valeur de l'intégrale est maintenant conforme à celle donnée par (J.59).

- (b) Cette preuve d'appuie sur l'inégalité (J.42). Cependant, on a admis que la fonction J est continue (voir preuve dans la remarque J.2) ; il en est de même pour I . Puisque $c \mapsto \ln(1+\sqrt{c})$ est continue

en $c = 0$ et $c = 1$, on peut donc passer à la limite $c \rightarrow 0$ ou $c \rightarrow 1$ dans (J.51) et obtenir

$$\forall c \in [0, 1], \quad I(c) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2} dt = \pi \ln(1+\sqrt{c}). \quad (\text{J.52})$$

En particulier $I(0) = 0$ et

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt = \pi \ln(2).$$

(c) Enfin, d'après les premières questions, si $a > 0$ et si

$$0 \leq ba^2 \leq 1, \quad (\text{J.53})$$

on a $c = ba^2 \in [0, 1]$ et

$$\forall b \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad J(a, b) = \frac{1}{a} I(ba^2) = \frac{1}{a} \pi \ln(1+\sqrt{ba^2}) = \frac{1}{a} \pi \ln(1+a\sqrt{b}).$$

Par continuité de J par rapport à a et b et le fait que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{a} \ln(1+a\sqrt{b}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{a} a\sqrt{b} = \pi\sqrt{b},$$

impliquent donc

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \text{ vérifiant (J.53),} \quad J(a, b) = \frac{\pi}{a} \ln(1+a\sqrt{b}), \quad (\text{J.54})$$

où par convention,

$$\left[\frac{\pi}{a} \ln(1+a\sqrt{b}) \right]_{a=0} = \pi\sqrt{b},$$

ce qui est bien la valeur annoncée dans la remarque J.4.

REMARQUE J.3. Ici, contrairement à la méthode classique de la remarque (J.4), on ne peut pas calculer l'intégrale $I(c)$ si l'hypothèse (J.42) n'est pas vérifiée. En effet, si $c > 1$, on peut toujours écrire comme dans le point 3(a)ivC page 242 la proposition 3.37 page 41 du cours et cette fois les résidus de f sont à l'extérieur du chemin et elle donne donc

$$0 = \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz. \quad (\text{J.55})$$

Cependant, puisque si $1/\sqrt{c} < 1$, on peut plus écrire (J.49) qui donnerait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\delta'_{\varepsilon, R}} f(z) dz = -2\pi \int_{1/\sqrt{c}}^R \frac{1}{t^2-1} dt,$$

qui divergerait au point $t = 1$ qui est cette fois-ci inclus dans $[1/\sqrt{c}, R]$.

REMARQUE J.4. Classiquement, mais plus longuement, on peut aussi parvenir au même résultat sans utiliser les résidus, en dérivant sous le signe somme, en décomposant en éléments simples et en intégrant chacune des fonctions obtenues, comme le montre la suite.

(1) Soit $C > 0$. La fonction définie sur $[C, \infty) \times \mathbb{R}_+$, qui à (c, t) associe $\frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2}$ est, comme précédemment, continue par rapport à t , dérivable par rapport à c avec

$$\forall (c, t) \in [C, \infty) \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial}{\partial c} \frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2} = \frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)}$$

En particulier, pour $(c, t) \in [C, \infty) \times \mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial c} \frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2} \leq \frac{t^2}{(1+Ct^2)(1+t^2)},$$

qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ . On peut donc écrire d'après le théorème de dérivation sous le signe somme :

$$\forall c > 0, \quad I'(c) = \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)} dt. \quad (\text{J.56})$$

(2) On cherche à déterminer la valeur de

$$\mathcal{I}(c) = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)} dt, \quad (\text{J.57})$$

pour $c \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On décompose en éléments simples dans \mathbb{C}

$$\frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)} = \frac{\alpha t + \beta}{1+ct^2} + \frac{\gamma t + \delta}{1+t^2},$$

où α, β, γ et δ sont *a priori* dans \mathbb{C} . Les deux zéros des dénominateurs des éléments simples $1+ct^2$ et $1+t^2$ sont $t = \pm i/\sqrt{c}$ et $\pm i$, qui sont distincts puisque $c \neq 1$. On multiplie par $t+ct^2$ et on fait tendre t vers $t = i/\sqrt{c}$, ce qui donne

$$\frac{i\gamma}{\sqrt{c}} + \delta = \frac{-1/c}{1-1/c},$$

et donc $\gamma = 0$ et $\delta = 1/(1-c)$. De même, on a $\alpha = 0$ et $\beta = 1/(c-1)$. On a donc

$$\frac{t^2}{(1+ct^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-c} \left(\frac{1}{1+ct^2} - \frac{1}{1+t^2} \right).$$

Chacune des deux intégrales existe et donc,

$$\mathcal{I}(c) = \frac{1}{1-c} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{1+ct^2} dt - \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \right).$$

Remarquons que pour tout $\eta > 0$, on a, en posant $u = \sqrt{\eta}t$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\eta t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{\sqrt{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} (\arctan(+\infty) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2\sqrt{\eta}}.$$

On a donc

$$\mathcal{I}(c) = \frac{1}{1-c} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1 \right) = \frac{\pi}{2(1+\sqrt{c})\sqrt{c}} = \frac{\pi}{1-c} \frac{1}{2\sqrt{c}} (1-\sqrt{c}),$$

soit

$$\forall c \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad \mathcal{I}(c) = \frac{\pi}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})} \quad (\text{J.58})$$

(3) Déduisons maintenant de ce qui précède la valeur de $I(c)$ pour tout $c \geq 0$. D'après ce qui précède, on a, sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$I(c) = \int \frac{\pi}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})} dc,$$

Déterminons une primitive de $\frac{\sqrt{c}\pi}{2(1+\sqrt{c})}$ sur un intervalle inclus dans $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On pose $X = \sqrt{c}$ et donc $c = X^2$ et $dc = 2XdX$ et

$$\begin{aligned} I(c) &= \int \frac{\pi}{2X(1+X)} 2XdX, \\ &= \int \frac{\pi}{(1+X)} dX, \\ &= \pi \int \frac{1}{(1+X)} dX, \\ &= K + \pi \ln(1+X), \\ &= K + \pi \ln(1+\sqrt{c}), \end{aligned}$$

où K est une constante. Par continuité de $I(c)$ par rapport à c , cela est aussi vrai pour $c = 0$. On a donc

$$\forall c \geq 0, \quad I(c) = K + \pi \ln(1+\sqrt{c}). \quad (\text{J.59})$$

(4) Concluons maintenant sur la valeur de $J(a, b)$ sur \mathbb{R}_+^2 . Si $a > 0$, on a donc, d'après ce qui précède,

$$J(a, b) = \frac{1}{a}I(ba^2) = \frac{1}{a} \left(K + \pi \ln \left(1 + \sqrt{ba^2} \right) \right) = \frac{1}{a} \left(K + \pi \ln \left(1 + a\sqrt{b} \right) \right)$$

À $a > 0$, faisons tendre b vers zéro. Puisque J est continue, on a donc

$$J(a, 0) = \frac{K}{a}.$$

On a aussi par définition

$$J(a, 0) = \int_0^\infty \frac{\ln(1)}{a^2 + t^2} dt = 0,$$

et donc $K = 0$. Ainsi, pour tout $a > 0$ et pour tout $b \geq 0$

$$J(a, b) = \frac{\pi}{a} \ln \left(1 + a\sqrt{b} \right).$$

Enfin, puisque J est continue sur \mathbb{R}_+^2 et que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{a} \ln \left(1 + a\sqrt{b} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{a} a\sqrt{b} = \pi\sqrt{b},$$

On a donc

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad J(a, b) = \frac{\pi}{a} \ln \left(1 + a\sqrt{b} \right), \quad (\text{J.60})$$

où par convention,

$$\left[\frac{\pi}{a} \ln \left(1 + a\sqrt{b} \right) \right]_{a=0} = \pi\sqrt{b},$$

Transformations conformes

On pourra consulter [Buc92, p. 119–125], [Rud92, chap. 14], [Pab95, chap. 11], [AF03, chap. 5] ou http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_conforme (avec de jolies images) ou de façon plus complète

[Kar13] disponible sur <http://karczmarczuk.users.greyc.fr/TEACH/InfoGeo/Work/conform.pdf>.

Ce bref chapitre s'appuie sur des résultats théoriques et sera surtout l'occasion d'une part de formaliser les observations faites sur les fonctions holomorphes en remarque 1.11 page 8 ou lors des exercices de TD 1.10 et 1.11 et d'autre part de justifier certaines notions utilisées de façon pratique (voir section 5.2).

Nous nous contenterons de l'énoncé de brefs résultats théoriques.

Généralisons la conservation de l'angle droit vu dans l'exercice de TD 1.10.

DÉFINITION K.1. On dit qu'une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie localement en z_0 conserve les angles en z_0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} \quad (\text{K.1})$$

existe et est indépendante de θ .

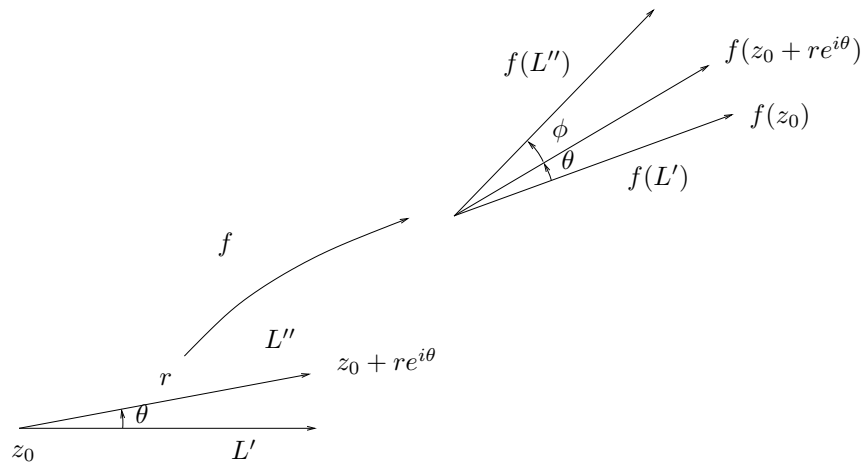


FIGURE K.1. Les deux rayons L' et L'' et leurs images par f : ϕ tend vers zéro indépendamment de θ quand r tend vers zéro.

De façon moins rigoureuse, cela signifie que f envoie deux rayons L' et L'' issus de z_0 sur deux rayons dont l'angle (orienté) est égal à l'angle entre les deux rayons L' et L'' (voir figure K.1).

Comme dans l'exercice de TD 1.10, on a

LEMME K.2. *Si f est dérivable en z_0 et si $f'(z_0) \neq 0$, alors f conserve les angles en z_0 . Réciproquement, si la (\mathbb{R}^2) -différentielle de f existe en z_0 et est non nulle et si f conserve les angles en z_0 , alors f est dérivable en z_0 et $f'(z_0) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. Seule la condition nécessaire est montrée.

Puisque f est dérivable en z_0 , on a

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z_0) + re^{i\theta} f'(z_0) + r\varepsilon(r),$$

d'où

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} &= e^{-i\theta} \frac{re^{i\theta} f'(z_0) + r\varepsilon(r)}{|re^{i\theta} f'(z_0) + r\varepsilon(r)|}, \\ &= \frac{r f'(z_0) + e^{-i\theta} r \varepsilon(r)}{|r f'(z_0) + e^{-i\theta} r \varepsilon(r)|}, \\ &= \frac{f'(z_0) + e^{-i\theta} \varepsilon(r)}{|f'(z_0) + e^{-i\theta} \varepsilon(r)|}. \end{aligned}$$

Quand r tend vers zéro, $f'(z_0) + e^{-i\theta} \varepsilon(r)$ tend vers $f'(z_0)$ (puisque le module de la différence est égal à $|\varepsilon(r)|$) et donc

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|}$$

qui est bien indépendante de θ . □

Si f est dérivable en un point et de dérivée nulle, elle ne conserve pas les angles *a priori* (voir exercice de TD 1.3).

Un certains nombres de fonctions simples envoient des ensembles simples du plan sur eux même. Voir [Rud92, chap. 14].

Les deux théorème fondamentaux (admis sans preuves, données dans [Buc92, p. 119–125] et [Rud92, chap. 14]) sont les suivants :

THÉORÈME K.3. *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe et injective sur U . On a alors, pour tout $z \in U$, $f'(z) \neq 0$ et f est une bijection de U sur $V = f(U)$. De plus, f conserve les angles. On dit que f est une transformation conforme.*

Notons que la seule difficulté de ce théorème est de montrer que pour tout $z \in U$, $f'(z) \neq 0$ (ce qui provient du principe du zéro isolé (voir [Buc92] ou [Sko91]).

Une conséquence simple du théorème K.3 est le corollaire suivant

COROLLAIRE K.4. *Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe et injective sur un ouvert U de \mathbb{C} . Alors les courbes d'équation $P(x, y) = \alpha = \text{constante}$ et $Q(x, y) = \beta = \text{constante}$ sont localement perpendiculaires.*

Cette propriété sera très utile pour la section 5.2.1.

DÉMONSTRATION.

Les droites d'équations $x = \alpha$ et $y = \beta$ sont perpendiculaires et sont envoyées par f sur les courbes d'équations $P(x, y) = \alpha$ et $Q(x, y) = \beta$ (voir figure K.2), qui sont donc elle-même perpendiculaires. □

THÉORÈME K.5. *Tout ouvert simplement connexe¹ de plan (autre que le point lui-même) est l'image par une bijection holomorphe du disque unité vers U .*

DÉMONSTRATION. Voir références de la preuve [AF03, Théorème 5.5.4 p. 344]. □

1. On rappelle qu'un ensemble connexe est simplement « d'un seul tenant ». Un ensemble simplement connexe est de plus « sans trou » ni « poignée ». On formalise cela en disant que tout lacet tracé dans un espace simplement connexe doit pouvoir être réduit continûment (c'est-à-dire par homotopie) à un point. Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Connexité_simple.

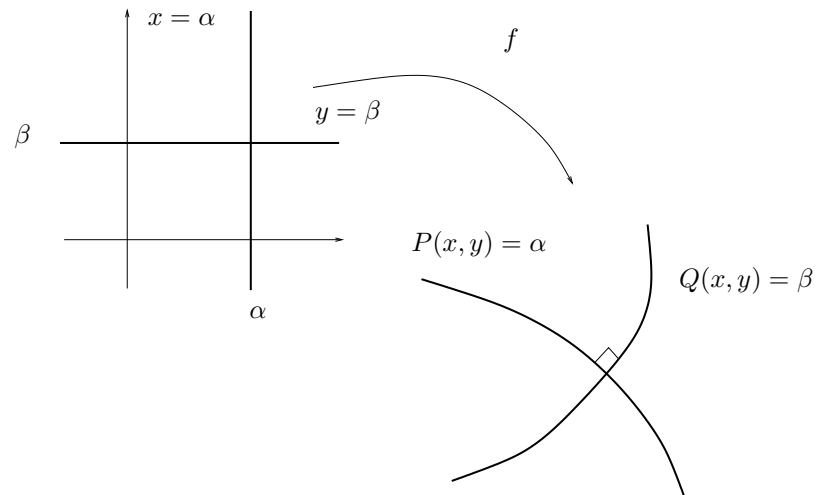


FIGURE K.2. Les droites d'équations $X = \alpha$ et $Y = \beta$ et leurs images par f .

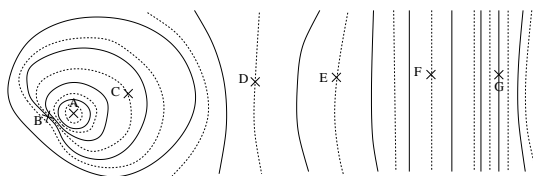
Topographie et courbes de niveau

L.1. Un exercice de rappel

Donnons un petit exercice de rappel, sur les courbes de niveau et le gradient.

Énoncé

On donne sur la figure suivante quelques lignes de niveau issues d'une carte topographique.



On supposera que A est le plus haut point (altitude 1235 m.) et que le terrain «descent vers la droite» de la carte. De plus, entre deux lignes de niveau différentes (une pleine et une pointillée), on supposera qu'il y a une différence d'altitude $\delta_1 = 5$ m et qu'entre deux lignes de niveau du même type (pleine ou pointillée), il y a une différence d'altitude $\delta_2 = 10$ m. L'échelle est de 1 cm. sur la carte pour 10 m. sur le terrain.

Nous considérons que ces lignes de niveau représentent les isovaleurs de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque point (x, y) du plan associe $z = g(x, y)$, la hauteur en ce point.

- (1) Tracer en B, C, \dots, G la direction et le sens du gradient de g .
- (2) Comment peut-on définir le gradient approché en ces points (on utilisera les deux réseaux d'équipotentielles définis par δ_2 puis δ_1) ?
- (3) En déduire que la pente (approchée) est la plus forte là où les lignes de niveau se resserrent.
- (4) (a) En utilisant les questions précédentes, Tracer en B, C, \dots, G le gradient approché de g . (on utilisera les deux réseaux d'équipotentielles définis par δ_2 puis δ_1).
- (b) Le résultat annoncé en question 3 est-il vérifié ?
- (c) Que remarquez-vous au point G ?
- (5) Que se passe-t-il si on donne des lignes de niveau séparées par des différences d'altitude de plus en plus faibles ? Est-ce raisonnable ?
- (6) Peut-on calculer le gradient en A ? Que pensez-vous de sa valeur ?
- (7) Que se passe-t-il sur le gradient approché si le terrain est «presque plat» ? Que se passe-t-il sur le gradient approché si le terrain rigoureusement plat ?
- (8) Que se passe-t-il pour les gradients précédemment calculés si on suppose que le point D est le point le plus bas de la carte ?
- (9) Essayez d'imaginer les allures des cartes représentant le sommet du ballon d'Alsace et du pic du midi. Quelle serait l'allure de la carte pour un sommet se trouvant dans une situation intermédiaire entre celle d'un sommet de type ballon et celle d'un sommet de type pic ?

Corrigé

Exercice issu de [BC04], non corrigé.

L.2. Liens entre potentiels, équipotentiels, altitude et lignes de plus grande pente

On considère \mathcal{S} , la surface d'équation $z = \phi(x, y)$ où ϕ est le potentiel scalaire, que l'on peut tracer dans l'espace. z peut être considérée comme l'altitude. Ainsi, dans le plan, les équipotentiels, d'équations $\phi(x, y) = \text{Constante}$, correspondent aux courbes définies comme l'intersection de \mathcal{S} et des plans d'équation $z = \text{Constante}$, qui sont donc les courbes d'altitudes constantes. De plus, en tout point de cette surface, les projections sur un plan horizontal fixé des lignes de plus grandes pentes, correspondent aux lignes de courant ! Ainsi, si on fait partir une goutte d'eau d'un point quelconque de la surface \mathcal{S} , la projection de son trajet sur un plan horizontal fixé est une ligne de courant.

Pour montrer que les projections sur un plan horizontal fixé des lignes de plus grandes pentes correspondent aux lignes de courant. Il suffit de remarquer que si $M'(x' = x + dx, y' = y + dy, z')$ est un point proche de $M(x, y, z)$, tous les deux appartenant à la surface \mathcal{S} , on a

$$\begin{aligned} z' - z &= \phi(x', y') - \phi(x, y), \\ &\approx \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy, \\ &\approx \nabla \phi(x, y) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour que la différence d'altitude $z' - z$ soit la plus grande possible (autrement dit, que le point M' soit le plus bas possible), il suffit que $\nabla \phi(x, y)$ et $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ soit perpendiculaires entre eux. Le premier vecteur, porté par le gradient, est perpendiculaire aux équipotentiels. Ainsi, le résultat est prouvé.

Par exemple, si on dessine dans l'espace le potentiel utilisé dans celui de la figure 5.8 page 69, défini par (5.50f), on obtient l'image de la figure L.1 page ci-contre.

Par exemple, si on dessine dans l'espace le potentiel utilisé dans celui de la figure 5.9 page 70, défini par (5.50h), on obtient l'image de la figure L.2 page 258.

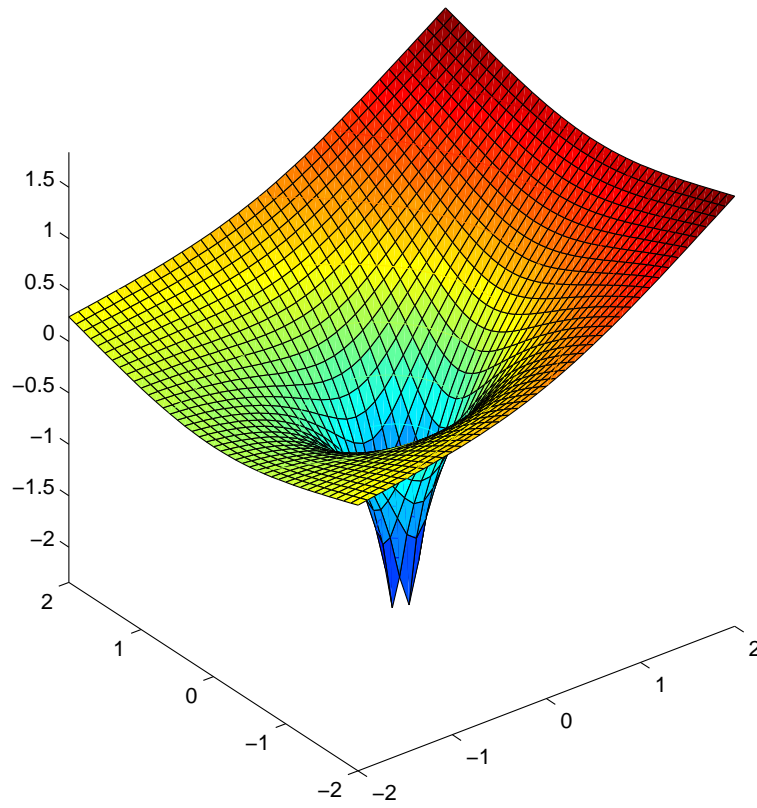


FIGURE L.1. Le potentiel ϕ dans l'espace, associé au potentiel défini par (5.50f).

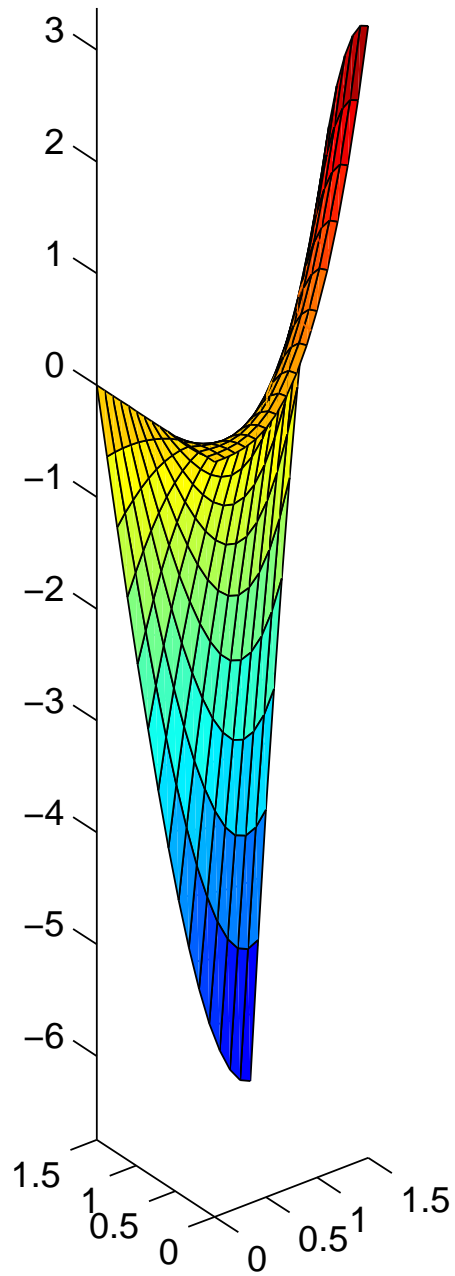


FIGURE L.2. Le potentiel ϕ dans l'espace, associé au potentiel défini par (5.50h).

Rappels sur une poutre droite en flexion

Dans cette annexe, on rappelle quelques résultats de RDM relatifs à une poutre droite en flexion. Ces résultats sont classiques et peuvent être trouvés par exemple dans [Bas11c] disponible sur http://ce1.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/15/PDF/coursMQ41_A04.pdf notamment dans le chapitre 1 (propositions 1.9 et 1.12 p. 17 ou 1.15 p.18) ou dans l'annexe C, section C.2, p. 159.

Nous supposons donc connue les notions de bases de RDM (effort normal, moment fléchissant, flèche ...) pour lesquels on renvoie à [Bas11c].

M.1. Équation d'équilibre local

Pour simplifier, on suppose que la poutre est droite et n'est soumise à

$$\text{à une densité linéaire verticale } p. \quad (\text{M.1})$$

On supposera donc que la poutre est soumise à

$$\text{une densité linéaire horizontale } q \text{ nulle,} \quad (\text{M.2a})$$

$$\text{une densité linéaire de couple } m \text{ nulle.} \quad (\text{M.2b})$$

On supposera que la fonction p est continue.

Ces hypothèses simplifiées permettent de faire des calculs plus simples mais peuvent tout à fait être étendues à des situations plus complètes.

Sous ces hypothèses, la proposition 1.9 p. 17 de [Bas11c] s'écrit

PROPOSITION M.1. *Nous avons les deux équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad (\text{M.3a})$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0. \quad (\text{M.3b})$$

REMARQUE M.2. En toute rigueur, les équations (M.3) ne sont valables qu'aux endroits où aucune force ni couple ponctuel ne sont appliqués. Selon l'hypothèse de Saint-Venant, c'est loin des points d'application des ces forces et couples ponctuels qu'on peut utiliser les relations (M.3). En pratique, on pourra les utiliser entre ces points d'application. Mais la proposition proposition 1.12 p. 17 de [Bas11c] fournit un résultat de discontinuité aux points d'applications de forces ponctuelles :

PROPOSITION M.3. *On suppose que la portion de poutre comprise entre les abscisses curvilignes x_1 et x_2 n'est soumise qu'à une force ponctuelle $\vec{F} = T_0 \vec{j}$ au point d'abscisse x_0 avec $x_1 < x_0 < x_2$ ainsi qu'à une densité linéaire verticale p . Alors,*

$$T(x_0 + 0) - T(x_0 - 0) = -T_0, \quad (\text{M.4a})$$

$$M(x_0 + 0) - M(x_0 - 0) = 0. \quad (\text{M.4b})$$

La preuve de cette proposition (faite en annexe C, section C.2, p. 159, de [Bas11c]) peut se faire de façon mécanique élémentaire ou alors en utilisant la « fonction » Dirac qui permet de dériver formellement une

fonction discontinue. Nous reviendrons là-dessus au cours de la section 6.2. Cette propriété est vraie en fait à tous les endroits de la poutre où est appliquée une force ponctuelle verticale. On peut donc écrire les résultats des propositions M.1 et M.3 sous la forme condensée suivante :

PROPOSITION M.4. *Nous avons les deux équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle,} \quad (\text{M.5a})$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0, \text{ en tout point } x, \quad (\text{M.5b})$$

auxquelles on rajoute

$$T(x+0) - T(x-0) = -T_0, \text{ en tout point } x \text{ où est appliquée une force verticale ponctuelle } T_0 \vec{j}. \quad (\text{M.5c})$$

Avec ces équations, on constate donc que

$$M \text{ est continue en tout point,} \quad (\text{M.6a})$$

$$T \text{ est continue en tout point sauf aux points d'application de forces verticales ponctuelle,} \quad (\text{M.6b})$$

$$M \text{ est dérivable en tout point sauf aux points d'application de forces verticales ponctuelle.} \quad (\text{M.6c})$$

L'application des équations (M.5a) et (M.5b) ne peut se faire proche des endroits où s'appliquent des forces verticales ponctuelles pour des raisons mécaniques (voir remarque M.2), mais les fonctions donnant les efforts et la déformée de la poutre sont définies partout et le mécanicien voudrait bien écrire les équations (M.5) et (M.6) partout, par soucis d'uniformité et de généralité.

Dans l'exemple 1.16 p. 19 de [Bas11c], on montre comment calculer M et T en intégrant les équations (M.5a) et (M.5b) séparément. On aimerait pouvoir le faire globalement, ce qui va être possible grâce à l'usage des distributions !

M.2. Équations donnant la déformée

Les équations (1.58), (1.59) et (1.60) de [Bas11c] donnent l'équation différentielle donnant la déformée v de la poutre, en négligeant les effets dus aux efforts tranchants et qui donnent, compte tenu de (M.6) :

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{EI}, \text{ en tout point } x, \quad (\text{M.7a})$$

$$\frac{d^3v(x)}{dx^3}(x) = -\frac{T(x)}{EI}, \text{ en tout point } x, \quad (\text{M.7b})$$

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}(x) = \frac{p(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle.} \quad (\text{M.7c})$$

L'inconvénient de ces équations est manifeste : il nous faut traiter séparément les différentes parties de poutres, comme dans l'exemple 1.16 p. 19 de [Bas11c], pour intégrer ces équations et trouver la déformée v de la poutre.

M.3. Poutre encastrée libre

On suppose maintenant que la poutre de longueur L est encastrée à gauche et libre à droite, qu'elle est soumise à une à une densité linéaire verticale p et à des forces ponctuelles verticales $F_k = F_k \vec{j}$ aux points d'abscisses x_k .

Les équations précédentes deviennent donc

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{EI}, \text{ en tout point } x, \quad (\text{M.8a})$$

$$\frac{d^3v(x)}{dx^3}(x) = -\frac{T(x)}{EI}, \text{ en tout point } x, \quad (\text{M.8b})$$

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}(x) = \frac{p(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \neq x_k, \quad (\text{M.8c})$$

auxquelles on rajoute les conditions aux limites : l'encastrement à gauche implique

$$v(0) = 0, \quad (\text{M.9a})$$

$$v'(0) = 0, \quad (\text{M.9b})$$

tandis que la nullité des efforts appliqués à droite donnent

$$v^{(2)}(L) = 0, \quad (\text{M.9c})$$

$$v^{(3)}(L) = 0. \quad (\text{M.9d})$$

Constatons que compte tenu de (M.8), si la densité p est continue et si les forces verticales appliquées sont nulles :

$$v \text{ est de classe } C^4 \text{ sur } [0, T], \quad (\text{M.10a})$$

$$T \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } [0, T], \quad (\text{M.10b})$$

$$M \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [0, T]. \quad (\text{M.10c})$$

Si les forces verticales ponctuelles sont non nulles et que p est continue, on a alors une perte de régularité aux points x_k

$$v \text{ est de classe } C^4 \text{ par morceaux sur } [0, T], \text{ mais pas } C^3 \text{ aux } x_k \quad (\text{M.11a})$$

$$T \text{ est de classe } C^3 \text{ par morceaux sur } [0, T], \text{ mais pas } C^1 \text{ aux } x_k \quad (\text{M.11b})$$

$$M \text{ est de classe } C^2 \text{ par morceaux sur } [0, T], \text{ mais pas } C^2 \text{ aux } x_k \quad (\text{M.11c})$$

mais que néanmoins

$$v \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [0, T], \quad (\text{M.12a})$$

$$T \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, T], \quad (\text{M.12b})$$

$$M \text{ est de classe } C^0 \text{ sur } [0, T]. \quad (\text{M.12c})$$

REMARQUE M.5. Si la fonction p est discontinue (par exemple en escalier), alors il faudra remplacer (M.5a) par

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle et où } p \text{ est continue,} \quad (\text{M.13})$$

et (M.7c) par

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}(x) = \frac{p(x)}{EI}, \text{ en tout point } x \text{ sans force verticale ponctuelle et où } p \text{ est continue.} \quad (\text{M.14})$$

On aura alors encore une perte de régularité par rapport à (M.11) et (M.12) aux points de discontinuité de p .

M.4. Retour sur les équations au sens des distributions

Voir section 8.5.2.1.

Rappels sur les différents modes de convergence de fonctions

On pourra consulter, pour plus de détail, [RDO87, chapitre 2].

On se donne un intervalle I quelconque de \mathbb{R} , $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans \mathbb{R} et f une application de I dans \mathbb{R} . Pour les définitions N.2 et N.3, on peut considérer des fonctions.

DÉFINITION N.1. On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ tend simplement vers f si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

DÉFINITION N.2. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ tend presque partout vers f et on note $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur I si et seulement si l'ensemble des points où $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini a un complémentaire négligeable (voir définition O.2 page 265).

DÉFINITION N.3. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ tend vers la fonction f dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si $\int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)| dx$ (au sens de Lebesgue, voir annexe P) tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Notons que $\int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)| dx \rightarrow 0$ implique $\int_{\Omega} f_n(x) dx$ tend $\int_{\Omega} f(x) dx$ quand n tend vers l'infini.

DÉFINITION N.4. On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ tend uniformément vers l'application f de I dans \mathbb{R} si et seulement si, $\max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Notons que la convergence uniforme entraîne (si Ω est borné), la convergence dans $L^1(\Omega)$. La convergence uniforme entraîne convergence simple. La convergence presque partout adjointe à la convergence dominée (voir théorème O.3 page 265) entraîne la convergence dans $L^1(\Omega)$.

THÉORÈME N.5. *On suppose que les fonctions f_n sont de classe C^1 et que la suite des fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une application g (qui est nécessairement continue). S'il existe $t_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(t_0))_n$ admette une limite l , alors la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers l'application f définie par $f(t) = l + \int_{t_0}^t g(u) du$.*

Rappels sur l'intégration

Pour toute la suite, on suppose que Ω est un ouvert de \mathbb{R} et que toutes les fonctions sont définies de Ω vers \mathbb{R} . Les notions présentées dans cette annexe peuvent être étendues au cas où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et/ou au cas les fonctions sont définies de Ω vers \mathbb{R}^p .

O.1. Intégration de Riemann

En cours de rédaction pour l'année 2019-2020

O.2. Intégration de Lebesgue

En cours de rédaction pour l'année 2019-2020

La notion d'intégrale que vous avez probablement d'abord apprise est celle de Riemann. On renvoie par exemple à [RDO79]. La notion d'intégrale de Lebesgue est plus riche¹ puisqu'elle exige moins de régularité sur les fonctions à intégrer. On consultera les références données au début de cette annexe pour plus de détails.

Rappelons seulement qu'une fonction f est intégrable, au sens de Lebesgue, si et seulement si elle est mesurable² et si $|f|$ est intégrable (soit $\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty$).

DÉFINITION O.1. On appelle $L^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur Ω .

DÉFINITION O.2. Une propriété $\mathcal{P}(t)$ est dite avoir lieu presque partout sur Ω si l'ensemble des éléments de Ω où elle est vraie a un complémentaire « négligeable », c'est-à-dire, de mesure nulle (voir la section 4 de [Mal82]). On notera

$$\mathcal{P}(t), \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

En particulier, deux fonctions seront dites presque partout égales. On peut donc modifier la valeur d'une fonction sur un ensemble négligeable de points, par exemple sur un ensemble au plus dénombrable de points.

Rappelons le résultat essentiel de l'intégrale de Lebesgue :

THÉORÈME O.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir Théorème IV.2 de [Bre83])). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

$$(1) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p.,}$$

$$(2) \quad \text{il existe une fonction } g \in L^1(\Omega) \text{ telle que pour chaque } n, |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega^3.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$, ce qui implique que $\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx$.

1. Sauf pour certaines intégrales impropres de Riemann convergentes, mais non absolument convergentes, comme $\int_0^{\infty} \sin x/x dx$ qui n'est pas Lebesgue intégrable !

2. C'est-à-dire, « assez régulière » ; par exemple la limite d'une suite de fonctions en escalier est mesurable ; une fonction continue, sauf en sur un ensemble au plus dénombrable est mesurable.

3. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions f_n .

Rappels les espaces de fonctions

On consultera par exemple [BBL12, annexe A]. [Bre83, chap. IV et VII], [RT92, sections 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 1.6] [GW03, leçons 13 à 15] ou [Bal91, chapitre 6].

Pour toute la suite, on suppose que Ω est un ouvert de \mathbb{R} et que toutes les fonctions sont définies de Ω vers \mathbb{R} . Les notions présentées dans cette annexe peuvent être étendues au cas où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et/ou au cas les fonctions sont définies de Ω vers \mathbb{R}^p .

P.1. Espaces de fonctions

On généralise la définition O.1 :

DÉFINITION P.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p},$$

qui définit une norme.

DÉFINITION P.2. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

qui définit une norme.

On utilisera très souvent le cas $p = 2$.

On considère aussi la définition suivante (utile quand $\Omega = \mathbb{R}$ seulement) :

DÉFINITION P.3. On dit que f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si et seulement si pour tout ouvert borné ω de Ω , $f|_{\omega}$ appartient à $L^1(\omega)$.

P.2. Espaces de Sobolev

Une fonction de $L^2(\Omega)$ peut être considérée comme une distribution. On a donc la définition suivante :

DÉFINITION P.4. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), v' \in L^2(\Omega)\}. \quad (\text{P.1})$$

Notons aussi que l'on a

THÉORÈME P.5 (Théorème VIII.2 de [Bre83]). Soit Ω un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, il existe $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ telle que

$$u = \tilde{u}, \text{ p.p. sur } \Omega, \quad (\text{P.2a})$$

$$\forall x, y \in \Omega, \quad \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y \tilde{u}'(s) ds \quad (\text{P.2b})$$

On parle alors de représentant continu : on note alors u à la place de \tilde{u} et les égalités p.p. deviennent vraies partout. On en déduit donc que

$$H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}). \quad (\text{P.3})$$

On définit de même $H^m(\Omega)$ l'espace des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$.

Grâce au théorème P.5, on peut donc aussi donner la définition suivante :

DÉFINITION P.6. Dans le cas où $\Omega =]a, b[$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, on note

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v(a) = v(b) = 0.\}. \quad (\text{P.4})$$

Rappelons que si E est un espace vectoriel normé notée $\|\cdot\|$ et muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir par exemple [BBL12, annexe A]), on a

THÉORÈME P.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (\text{P.5})$$

Formulation variationnelle abstraite

Donnons dans cette annexe, quelques résultats théoriques utilisés, entre autre, dans la section 8.5.

On pourra consulter pour plus de détails [RT92, section 2.2 ou 3.1].

Toutes les formulations variationnelles de la section 8.5 rentrent en fait dans le cadre du théorème suivant

LEMME Q.1 (Lemme de Lax-Milgram). *Soit V un espace de Hilbert¹ muni de la norme $\|\cdot\|$. On se donne :*

- *une forme bilinéaire $(u, v) \mapsto a(u, v)$ continue sur $V \times V$, c'est-à-dire il existe une constante M telle que*

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|. \quad (\text{Q.2})$$

On suppose de plus que a est- V elliptique (ou coercive) : il existe une constante α telle que

$$\forall u \in V, \quad |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2. \quad (\text{Q.3})$$

- *Une forme linéaire $v \mapsto L(v)$ continue sur V , c'est-à-dire il existe une constante m telle que*

$$\forall v \in V, \quad |L(v)| \leq m \|v\|. \quad (\text{Q.4})$$

Il existe une unique solution u du problème variationnel général suivant : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v). \quad (\text{Q.5})$$

Enfin, la solution de (Q.5) est continue par rapport à la donnée L , c'est-à-dire,

$$\text{l'application } L \mapsto u \text{ est continue de } V' \text{ dans } V. \quad (\text{Q.6})$$

DÉMONSTRATION. Voir [RT92, Théorème 2.2.1, p. 37] ou [Bre83, Corollaire V.8]. □

Il est intéressant de constater que ce problème revient aussi à minimiser une fonctionnelle, qui, dans le cadre mécanique, n'est rien d'autre que l'énergie totale du système ! En effet, une autre vision du lemme Q.1 est la suivante :

LEMME Q.2 (Minimisation d'énergie). *Sous les hypothèses du lemme Q.1 et si on suppose de plus que a est symétrique, l'unique solution u de (Q.5) est aussi l'unique solution de*

$$\Phi(u) = \min_{v \in V} \Phi(v), \quad (\text{Q.7})$$

où

$$\forall v \in V, \quad \Phi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v). \quad (\text{Q.8})$$

DÉMONSTRATION. Voir [Bre83, Corollaire V.8]. □

1. C'est-à-dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est complet. La complétude signifie que toute suite de Cauchy, c'est-à-dire, vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \geq N, \quad \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon, \quad (\text{Q.1})$$

admet une limite.

Notons aussi qu'une approximation peut être obtenue de façon suivante : on se donne un sous-espace de dimension finie V_h de V , dépendant d'un paramètre h tendant vers zéro. La dimension de cet espace V_h , approximation de l'espace V , de dimension infinie, tend vers l'infini quand h tend vers zéro.

Au problème (Q.5), on associe le problème approché suivant : trouver $v_h \in V_h$ solution de

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad (\text{Q.9})$$

qui admet une unique solution, comme cas particulier du problème (Q.5). En fait (voir preuve de [RT92, Théorème 3.1.1, p. 59]), ce problème est équivalent à un système linéaire dont la matrice est symétrique définie positive. Dans le cas où a est bilinéaire, on peut munir V du produit scalaire

$$\forall u \in V, \quad \langle u, v \rangle_a = a(u, v), \quad (\text{Q.10})$$

qui définit aussi une structure Hilbertienne. De (Q.5) et (Q.9), on déduit que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0$$

soit encore

$$\forall v_h \in V_h, \quad \langle u - u_h, v_h \rangle_a = 0. \quad (\text{Q.11})$$

Ainsi, $u - u_h$ est perpendiculaire à tout élément de V_h et donc u_h apparaît donc comme la projection orthogonale (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$) de u sur u_h . Quand h tend vers 0, cette projection tend vers u et donc u_h tend bien vers u . Voir la figure 8.2 page 128.

Donnons un petit lemme qui sera utilisé en TD :

LEMME Q.3. *On se place sous les hypothèses du lemme Q.1 et on suppose que l'on se donne une suite d'applications linéaires continues (L_n) vérifiant donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m_n \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad |L_n(v)| \leq m_n \|v\|. \quad (\text{Q.12})$$

On suppose que cette suite vérifie : il existe L une application linéaire continue et une suite de réels positifs $(b_n)_n$ tendant vers zéro telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m_n \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad |L_n(v) - L(v)| \leq b_n \|v\|. \quad (\text{Q.13})$$

On définit la suite des solutions $(u_n)_n$ des problèmes : trouver $u_n \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u_n, v) = L_n(v). \quad (\text{Q.14})$$

Alors la suite $(u_n)_n$ converge vers un élément u de V vérifiant (Q.5).

DÉMONSTRATION. On peut successivement écrire : pour tout couple d'entiers (n, p)

$$\begin{aligned} \|u_n - u_p\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha} |a(u_n - u_p, u_n - u_p)|, \\ &= \frac{1}{\alpha} |(a(u_n, u_n - u_p) - a(u_p, u_n - u_p))|, \\ &= \frac{1}{\alpha} |L_n(u_n - u_p) - L_p(u_n - u_p)|, \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (|L_n(u_n - u_p) - L(u_n - u_p)| + |L(u_n - u_p) - L_p(u_n - u_p)|), \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (b_n \|u_n - u_p\| + b_p \|u_n - u_p\|), \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (\max(b_p, b_n) \|u_n - u_p\|), \end{aligned}$$

et donc

$$\|u_n - u_p\| \leq \frac{1}{\alpha} \max(b_p, b_n).$$

Comme la suite $(b_n)_n$ tend vers zéro, on sait que pour tout ε , il existe N tel que $\forall n, p \geq N$, $\max(b_p, b_n) \leq \varepsilon$, ce qui implique que la suite $(u_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy (Q.1) et donc qu'elle converge vers $u \in V$.

Soit $v \in V$ D'après l'aspect continue de a , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a(u_n, v) = a(u, v). \quad (\text{Q.15})$$

D'autre part, d'après (Q.13),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(v) = L(v). \quad (\text{Q.16})$$

D'après (Q.15) et (Q.16), on peut donc passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans (Q.14), à v fixé, ce qui montre que u est solution de (Q.5). \square

Rappel sur les hyperplans

PROPOSITION R.1. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On a l'équivalence entre les trois assertions suivantes :*

- i) Il existe une droite vectorielle D telle que $F \oplus D = E$.*
- ii) F est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*
- iii) En dimension finie, $\dim(F) = \dim(E) - 1$.*

DÉMONSTRATION. On pourra retrouver cette preuve dans [RDO93, p. 304-305].

— Montrons que i) implique ii).

Supposons qu'il existe donc $x \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$F \oplus \mathbb{R}x = E.$$

Soit μ , un réel non nul. On définit l'unique forme linéaire ϕ sur E telle que

$$\begin{aligned}\phi|_F &= 0, \\ \phi|_{\mathbb{R}x} &= \mu I.\end{aligned}$$

ϕ est non nulle car $\phi(x) = \mu \neq 0$.

Montrons que $F = \ker \phi$. il est clair que par définition, si y est dans F , $\phi(y)$ est nul. Réciproquement, soit y tel que $\phi(y) = 0$. On sait par hypothèse qu'il existe (un unique) couple $(z, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$ tel que

$$y = z + \lambda x.$$

On a donc

$$0 = \phi(y) = \phi(z) + \lambda\phi(x) = 0 + \lambda\mu = \lambda\mu,$$

puisque ϕ est nulle sur F . On a donc, $\lambda = 0$ et donc $y \in F$.

— Montrons que ii) implique i). Soit donc ϕ une forme linéaire non nulle telle que $F = \ker \phi$. Puisque ϕ est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) \neq 0$.

REMARQUE R.2. Cette preuve est en fait vraie pour tout $x \in E \setminus \ker \phi$.

Montrons que

$$F \oplus \mathbb{R}x = E,$$

c'est-à-dire que

$$\forall y \in E, \quad \exists!(z, \lambda) \in F \times \mathbb{R}, \quad y = z + \lambda x.$$

— Unicité (ou analyse).

Si l'équation est vérifiée, on a alors, puisque $z \in F = \ker \phi$,

$$\phi(y) = \phi(z) + \lambda\phi(x) = \lambda\phi(x),$$

et donc nécessairement, puisque $\phi(x) \neq 0$,

$$\lambda = \frac{\phi(y)}{\phi(x)},$$

$$z = y - \frac{\phi(y)}{\phi(x)}x.$$

— Existence (ou synthèse)

Considérons, pour y donné, λ et z définis par les deux équations ci-dessus, qui ont un sens car $\phi(x) \neq 0$. On a bien $z + \lambda x = y$ et

$$\phi(z) = \phi(y) - \frac{\phi(y)}{\phi(x)}\phi(x) = 0,$$

et donc $z \in F = \ker \phi$.

— L'équivalence entre iii) et (i) et (ii)) est laissée au lecteur. □

REMARQUE R.3. Il existe aussi une caractérisation par la codimension, égale à 1, non évoquée ici, puisqu'hors programme. Voir [RDO93, p. 304-305].

On adopte alors la définition suivante :

DÉFINITION R.4. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et F un sous-espace vectoriel de E . Si F vérifie l'une des trois conditions de la proposition ci-dessus, on l'appelle un hyperplan.

Intégration de distributions

Cette annexe est issue de [Lam08, Section 6.4.1 : Primitive d'une distribution].

Pour toute la suite, $\Omega =]a, b[$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , où

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty. \quad (\text{S.1})$$

Pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$, puisque ϕ est à support compact, il existe un intervalle $[A, B] \subset]a, b[$ tel que

$$\phi \text{ est nulle sur }]a, A] \text{ et sur } [B, b[, \quad (\text{S.2})$$

et les intégrales suivantes existent

$$\int_a^b \phi(t) dt \text{ et, pour tout } x \in \overline{\Omega}, \int_a^x \phi(t) dt. \quad (\text{S.3})$$

DÉFINITION S.1. On dit que $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une primitive de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $S' = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

EXEMPLE S.2. Si $I = \mathbb{R}$, une primitive de la distribution δ est H , la fonction de Heaviside, puisque $H' = \delta$. Nous montrerons plus loin que toutes les primitives diffèrent à une constante additive près.

EXEMPLE S.3. Si $I = \mathbb{R}$, une primitive de la distribution-fonction signe est la fonction $|\cdot|$. Nous montrerons plus loin que toutes les primitives diffèrent à une constante additive près.

EXEMPLE S.4. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, une primitive de la distribution-fonction f est donnée par g où, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in I$,

$$g(t) = \int_{x_0}^t f(x) dx.$$

Nous montrerons plus loin que toutes les primitives diffèrent à une constante additive près.

On pourrait, de façon générale, penser à la définition suivante : si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle S, \phi \rangle = -\langle T, \psi \rangle, \text{ où } \psi \text{ est une primitive de } \phi, \quad (\text{S.4})$$

de telle sorte que $S' = T$ puisque

$$\langle S', \psi \rangle = -\langle S, \psi' \rangle = -\langle S, \phi \rangle = \langle T, \psi \rangle. \quad (\text{S.5})$$

Le problème est qu'une primitive ψ de ϕ est bien de classe C^∞ mais son support n'est pas nécessairement borné. En effet, d'après (S.2), il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]a, A], \quad \psi(x) = C. \quad (\text{S.6})$$

On écrit ensuite

$$\psi(B) = \psi(A) + \int_A^B \psi'(t) dt = C + \int_A^B \phi(t) dt,$$

et donc

$$\phi(B) = C + \int_A^B \phi(t) dt,$$

et donc, de nouveau d'après (S.2),

$$\forall x \in [B, b], \quad \psi(x) = C + \int_A^B \phi(t) dt, \quad (\text{S.7})$$

Quel que soit la valeur de C , si $\int_A^B \phi(t) dt \neq 0$, ce qui est possible, il n'est pas possible, d'après (S.6) et (S.7), que ψ simultanément nulle sur $]a, A[$ et $[B, b[$. Donc, le support de ψ n'est pas borné.

On a tout d'abord

THÉORÈME S.5.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

- (1) T admet une primitive S_0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$;
- (2) T admet une infinité de primitives et deux primitives quelconques U et V de T vérifient $U - V = c$, où c est une constante.

La preuve se fait en plusieurs étapes.

(1)

LEMME S.6.

On définit l'ensemble H par

$$H = \{ \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \exists \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \psi' = \phi \}. \quad (\text{S.8})$$

Alors H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$ caractérisé par

$$\phi \in H \iff \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \int_a^b \phi(t) dt = 0. \quad (\text{S.9})$$

DÉMONSTRATION.

Démontrons tout d'abord l'équivalence de (S.8) et de (S.9). Si $\phi \in H$ donné par (S.8) on a

$$\int_a^b \phi(t) dt = \int_a^b \psi'(t) dt = \psi(b) - \psi(a) = 0,$$

et donc (S.9) est vérifié. Réciproquement, si (S.9) est vérifié, on considère la fonction ψ définie par

$$\forall t \in \Omega, \quad \psi(t) = \int_a^t \phi(x) dx,$$

qui est bien définie, clairement de classe C^∞ . On a bien $\psi' = \phi$. Enfin, ϕ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$; effet, le support de ψ est borné comme le montre (S.6) et (S.7), où par construction $C = 0$ et donc ψ est nulle sur $]a, A[$ et ψ est constante sur $]B, b[$, cette constante valant, par construction :

$$\int_A^B \phi(t) dt = \int_a^b \phi(t) dt = 0.$$

Enfin, l'application F qui à ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ associe $F(\phi)$ défini par

$$\forall \phi, \quad F(\phi) = \int_a^b \phi, \quad (\text{S.10})$$

est une forme linéaire, dont le noyau H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$. □

Rappelons aussi que, grâce à l'exemple 6.8 page 89, on peut définir une fonction $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\int_a^b \phi_0(t) dt = 1. \quad (\text{S.11})$$

LEMME S.7.

Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe un unique $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ tel que

$$\phi = \lambda_\phi \phi_0 + u_\phi, \quad (\text{S.12})$$

ce qui revient à écrire que

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathbb{R}\phi_0 \oplus H. \quad (\text{S.13})$$

DÉMONSTRATION.

Deux méthodes sont possibles pour démontrer ce lemme. La première se fait à la main, la seconde est une simple réutilisation de la généralisation de ce lemme en utilisant l'annexe R page 273.

- (a) On raisonne de façon classique en montrant l'unicité puis l'existence du couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ vérifiant (S.12).

Supposons donc tout d'abord qu'il existe un couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ vérifiant (S.12). On a donc, par intégration

$$\int_a^b \phi = \lambda_\phi \int_a^b \phi_0 + \int_a^b u_\phi,$$

et puisque u_ϕ appartient à H on a $\int_a^b u_\phi = 0$. D'après (S.11), on a donc nécessairement

$$\lambda_\phi = \int_a^b \phi, \quad (\text{S.14})$$

puis

$$u_\phi = \phi - \lambda_\phi \phi_0. \quad (\text{S.15})$$

Le couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ est donc unique.

Réciproquement, soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Définissons le couple $(\lambda_\phi, u_\phi) \in \mathbb{R} \times H$ par (S.14) et (S.15). Par définition, (S.12) est vérifié. Il ne reste plus qu'à montrer que u_ϕ est dans H . Il est clair que u_ϕ est de classe C^∞ . Enfin, u_ϕ est dans H puisque d'après (S.11), on a

$$\int_a^b \phi = \int_a^b \phi - \lambda_\phi \int_a^b \phi_0 = \int_a^b \phi - \lambda_\phi \int_a^b \phi_0 = \int_a^b \phi - \lambda_\phi,$$

qui est nul par définition.

- (b) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{D}(\Omega)$. D'après la fin de la preuve du lemme S.6, l'application F de E dans \mathbb{R} , définie par (S.10), est une forme linéaire dont le noyau est H . F est non nulle d'après (S.11). Ainsi, le résultat (S.13) est une simple application de l'annexe R, dont la preuve fournit l'expression de λ donnée par (S.14).

□

- (2) On donne enfin la définition suivante :

DÉFINITION S.8. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit ψ_ϕ par

$$\forall x \in \Omega, \quad \psi_\phi(x) = \int_a^x u_\phi(t) dt, \quad (\text{S.16})$$

où u_ϕ est donnée par le lemme S.7. Puisque u_ϕ est dans H , on a

$$\int_a^b u_\phi(t) = 0.$$

On a donc, cette fois-ci, contrairement à ce qui se passait dans l'essai de définition (S.4),

$$\psi_\phi \text{ est nulle sur }]a, A] \cup [B, b[.$$

et donc dans la définition S.8,

$$\psi_\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \psi'_\phi = u_\phi. \quad (\text{S.17})$$

(3) On est donc en mesure, maintenant de démontrer le théorème S.5.

PREUVE DU THÉORÈME S.5. (a) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit S_0 par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle S_0, \phi \rangle = -\langle T, \psi_\phi \rangle, \quad (\text{S.18})$$

où $\psi_\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est donnée par la définition S.8. Puisque $\psi_\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le nombre $\langle T, \psi_\phi \rangle$ existe bien. Par linéarité de $\phi \mapsto \psi_\phi$, il est clair que $\phi \mapsto -\langle T, \psi_\phi \rangle$ est linéaire. On admet la condition de continuité 6.39 page 90. Voir preuve par exemple [Lam08, Section 6.4.1 : Primitive d'une distribution]. Il reste à vérifier que, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $S'_0 = T$ ce qui est vrai car, pour tout fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle S'_0, \phi \rangle = -\langle S_0, \phi' \rangle,$$

et donc par définition

$$\langle S'_0, \phi \rangle = \langle T, \psi_{\phi'} \rangle. \quad (\text{S.19})$$

D'après la définition (S.16), on a, pour tout x :

$$\begin{aligned} \psi_{\phi'}(x) &= \int_a^x u_{\phi'}(t) dt, \\ &= \int_a^x (\phi'(t) - \lambda_{\phi'} \phi_0(t)) dt, \\ &= \phi(x) - \int_a^x \phi_0(t) dt \int_a^b \phi'(t) dt, \\ &= \phi(x) - \int_a^x \phi_0(t) dt (\phi(b) - \phi(a)), \\ &= \phi(x), \end{aligned}$$

et donc, d'après (S.19)

$$\langle S'_0, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle,$$

et donc S_0 est une primitive de T .

(b) Soit S une autre primitive de T et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a successivement

$$\begin{aligned} \langle S, \phi \rangle &= \langle S, \lambda_\phi \phi_0 + u_\phi \rangle, \\ &= \lambda_\phi \langle S, \phi_0 \rangle + \langle S, u_\phi \rangle, \\ &= \lambda_\phi \langle S, \phi_0 \rangle + \langle S, \psi'_\phi \rangle, \\ &= \lambda_\phi \langle S, \phi_0 \rangle - \langle S', \psi_\phi \rangle, \\ &= \lambda_\phi \langle S, \phi_0 \rangle - \langle T, \psi_\phi \rangle, \\ &= \lambda_\phi \langle S, \phi_0 \rangle - \langle S_0, \psi_\phi \rangle, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle S - S_0, \phi \rangle &= \lambda_\phi \langle S, \phi_0 \rangle, \\ &= \int_a^b \phi(t) dt \langle S, \phi_0 \rangle, \\ &= \int_a^b c \phi(t) dt, \end{aligned}$$

où la constante c est définie par

$$c = \langle S, \phi_0 \rangle.$$

Bref, on a

$$\langle S - S_0, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle.$$

et donc

$$S - S_0 = c, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

□

REMARQUE S.9. Si on change de fonction ϕ_0 , le lecteur vérifiera que S_0 est modifiée à une constante additive près, ce qui est conforme au deuxième point du théorème S.5.

EXEMPLE S.10. Si $\Omega = \mathbb{R}$, grâce au théorème S.5, et notamment la définition (S.18), de S_0 , on peut retrouver l'exemple (S.2). En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle S_0, \phi \rangle &= -\langle \delta, \psi_\phi \rangle, \\ &= -\psi_\phi(0), \\ &= -\int_{-\infty}^0 u_\phi(t) dt, \end{aligned}$$

et puisque $u_\phi \in H$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} u_\phi(t) dt, \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \lambda_\phi \int_0^{+\infty} \phi_0(t) dt, \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt \int_0^{+\infty} \phi_0(t) dt, \end{aligned}$$

et en notant la constante indépendante de ϕ :

$$c = \int_0^{+\infty} \phi_0(t) dt,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \langle S_0, \phi \rangle &= \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - c \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\phi(t) dt - c \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt, \\ &= \langle H - c, \phi \rangle, \end{aligned}$$

et donc les primitives de δ sont

$$S_0 = H - c.$$

Grâce au corollaire suivant, on peut retrouver les exemples S.3 et S.4 .

COROLLAIRE S.11. Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, les primitives de la distribution-fonction f sont les primitives de la fonction f .

DÉMONSTRATION. En effet, on sait qu'une primitive F de f est donnée par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

On a $F' = f$ au sens des fonctions et des distributions. Les autres primitives diffèrent de celle-là à une constante près.

□

COROLLAIRE S.12. *Si T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont la dérivée est nulle, alors T est une fonction constante.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème S.5 et le corollaire S.11. □

Quelques calculs explicites de sommes de Séries

Cette annexe est totalement hors programme. La section T.5 est une application directe de la théorie des fonctions holomorphes et pourra être lue, indépendamment des autres sections.

La conclusion que l'on pourra retenir de cette annexe est la supériorité du calcul par la méthode du théorème des résidus sur les autres méthodes !

T.1. Introduction

On cherche à calculer de façon explicite quelques sommes de séries du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)},$$

où P et Q sont des polynômes, de différentes façons :

- par un calcul direct, en utilisant les séries entières (section T.2) ;
- en utilisant les nombres et les polynômes de Bernoulli (section T.3) ;
- en utilisant les distributions périodiques (section T.4) ;
- grâce au théorème des résidus (section T.5) ;
- grâce à des logiciels de calcul formel (section T.6).

T.2. Calcul par les séries entières

Donnons un exemple de calcul de somme de série en utilisant les séries entières.

On a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln(2).} \quad (\text{T.1})$$

Ce résultat est en fait un cas particulier du cas général donné par (C.9).

DÉMONSTRATION DE (T.1). Pour démontrer ce résultat, on utilise la série entière

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-)^{n-1}}{n} x^n$$

dont on vérifie que le rayon de convergence est égal à un. Par dérivation, on a, à l'intérieur du disque unité (où S est de classe \mathcal{C}^∞ et dérivable terme à terme)

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Cette dernière série est égale à la série géométrique, de raison $-x$; ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1 \implies S'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Par intégration, il vient donc, compte tenu de $S(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1 \implies S(x) = \ln(x+1). \quad (\text{T.2})$$

D'après le cours, on a aussi

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad |z| < 1 \implies S(z) = \text{Ln}(z + 1). \quad (\text{T.3})$$

On en déduit donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(x + 1).} \quad (\text{T.4})$$

Formellement, on a donc, en choisissant $x = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln(2). \quad (\text{T.5})$$

Cette égalité n'est pas justifiée *a priori* car (T.4) n'est pas valable pour $x = 1$, puisque le rayon de convergence est égal à 1.

Pour démontrer rigoureusement (T.1), nous ne pouvons utiliser la propriété de convergence normale de la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ qui n'est pas absolument convergente en $x = 1$. Néanmoins, nous allons tout de même pouvoir majorer uniformément son reste en x .

Pour $x \in [0, 1[$, on sait qu'on peut majorer le reste à l'ordre N de série alternée de $\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ par la valeur absolue du premier terme dominé :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| = \frac{x^N}{N+1},$$

ce que l'on peut majorer de façon uniforme en x :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{N+1}. \quad (\text{T.6})$$

De même, pour la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on a

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| \leq \frac{1}{N+1}. \quad (\text{T.7})$$

On peut conclure de deux façons différentes.

- (1) De façon manuelle, on écrit, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$ (auquel on peut appliquer (T.4)) par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \ln(2) \right| \\ & \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \ln(2) \right|, \\ & \leq \left| \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| + |\ln(x+1) - \ln(2)|, \\ & \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} |(1-x^n)| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| + |\ln(x+1) - \ln(2)|, \end{aligned}$$

et donc

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \ln(2) \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} |(1-x^n)| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| + |\ln(x+1) - \ln(2)|. \quad (\text{T.8})$$

Majorons chacun des quatre termes de l'inégalité (T.8). Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $x \mapsto \ln(x+1)$ au voisinage de 1 à gauche

$$\exists \eta_1 > 0, \quad \forall x \in [1 - \eta_1, 1[, \quad |\ln(1-x) - \ln(2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{T.9})$$

Si x appartient à $[0, 1[$, les deux restes de l'inégalité (T.8) sont majorés en utilisant (T.6) et (T.7) : on choisit N tel que

$$\frac{2}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (\text{T.10})$$

et donc

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{6}, \quad (\text{T.11})$$

et

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (\text{T.12})$$

Cet entier N étant choisi, on constate que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n} |1 - (x)^n|$ pour $n \in \{1, \dots, N\}$ sont continues au voisinage de 1 à gauche ; d'où

$$\exists \eta_2 > 0, \quad \forall x \in [1 - \eta_2, 1[, \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} |1 - (x)^n| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{T.13})$$

Ainsi, compte tenu de (T.9), (T.11), (T.12) et de (T.13), (on l'on prend N défini par (T.10) et $x \in [1 - \min(\eta_1, \eta_2), 1[$ où η_1 et η_2 sont définis par (T.9) et (T.13)), il vient :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \ln(2) \right| \leq \varepsilon.$$

Cette égalité, vraie pour tout $\varepsilon > 0$, implique (T.1).

(2) De façon beaucoup plus rapide, on écrit (T.6) et (T.7) sous la forme suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{N+1}. \quad (\text{T.14})$$

Ainsi, le reste de la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ tend vers zéro uniformément sur l'intervalle $[0, 1[$. La convergence uniforme entraîne donc la continuité de la somme. Par passage à la limite $x \rightarrow 1$ dans (T.4), on obtient donc le résultat escompté, d'après la continuité du logarithme au voisinage de 2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(1+1) = \ln 2.$$

□

T.3. Calcul par les nombres et les polynômes de Bernoulli

Cette section correspond à la correction de l'exercice 26 de la page 146 de [AF89, section IV. 3]. Dans la section T.3.1, nous donnons les définitions des nombres et des polynômes de Bernoulli et leurs propriétés élémentaires. Après avoir donné quelques propriétés sur ces polynômes dans la section T.3.2, nous constaterons, dans la section T.3.3, que les polynômes de Bernoulli admettent des développements en série de Fourier particulièrement simples. On appliquera cela, dans la section T.3.4, au calcul des séries harmoniques d'ordre pair.

T.3.1. Définition des nombres et des polynômes de Bernoulli

DÉFINITION T.1. Pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$f(t, z) = \frac{te^{tz}}{e^t - 1},$$

et par convention

$$f(0, z) = 1.$$

Ainsi, la fonction f est correctement définie et on a la

PROPOSITION T.2. Il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \implies f(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(z). \quad (\text{T.15})$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est à coefficients rationnels et vérifie la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = X^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k. \end{array} \right. \quad (\text{T.16})$$

DÉFINITION T.3. Le polynôme B_n est appelé le n -ième polynôme de Bernoulli.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION T.2. Compte tenu du développement en série entière de l'exponentielle à l'origine, on a, pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}},$$

expression encore valable en $t = 0$. Ainsi, cette expression est développable en série entière en zéro et il existe donc $r > 0$ et une suite (a_n) de complexes telle que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \implies \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (\text{T.17})$$

Par ailleurs, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n. \quad (\text{T.18})$$

En multipliant les deux séries entières (T.17) et (T.18), on constate qu'il existe une suite de complexes $(B_n(z))$ vérifiant (T.15). Vu l'unicité du développement en série entière, cette suite est unique.

Vérifions maintenant que les complexes $B_n(z)$ sont des polynômes en z de degré n , à coefficients rationnels et qu'ils vérifient (T.16).

Par définition, on a

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \implies \frac{e^t - 1}{t} f(t, z) = e^{tz},$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n ;$$

ainsi, d'après la règle de multiplication de deux séries, on a

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |t| \leq r \implies \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k(z)}{k!} \frac{1}{(n+1-k)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n ;$$

En identifiant les deux séries, on a donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{B_k(z)}{k!} \frac{1}{(n+1-k)!} = \frac{z^n}{n!},$$

ce qui implique encore

$$B_n(z) = z^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k(z).$$

On déduit de cette relation, pour $n = 0$ que $B_0 = 1$. De cette relation, on déduit aussi par récurrence sur n que $B_n(z)$ sont des polynômes en z de degré n , à coefficients rationnels et qu'ils vérifient (T.16). \square

Donnons un moyen de calcul par récurrence plus agréable d'emploi que (T.16). On pose formellement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = B_n. \tag{T.19}$$

Avec cette convention, on réécrit (T.16) sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B^k - B^{n+1} = (n+1)X^n.$$

Or, avec la convention formelle (T.19), on a

$$(1+B)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B^k.$$

Ainsi, on a la relation de récurrence formelle :

$$\boxed{\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+B)^{n+1} - B^{n+1} = (n+1)X^n. \end{cases}} \tag{T.20}$$

Si on y fait successivement $n = 0, 1, 2, 3$ et 4 , on obtient

$$B_0 = 1, \tag{T.21}$$

$$B_1 = X - \frac{1}{2}, \tag{T.22}$$

$$B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, \tag{T.23}$$

$$B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X, \tag{T.24}$$

$$B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}. \tag{T.25}$$

Informatiquement, si on veut calculer les polynômes de Bernoulli, on utilisera la formule (T.16). On peut aussi faire un développement limités à l'ordre 4 de :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120} + o(t^4)}.$$

Après calculs, on a

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + o(t^4).$$

Ainsi,

$$\frac{te^{tz}}{e^t - 1} = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720}\right) \left(1 + tz + \frac{t^2 z^2}{2} + \frac{t^3 z^3}{6} + \frac{t^4 z^4}{24}\right) + o(t^4).$$

Soit, après calculs,

$$\begin{aligned} \frac{te^{tz}}{e^t - 1} &= 1 + t \left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{t^2}{2} \left(z^2 - z + \frac{1}{6}\right) \\ &\quad + \frac{t^3}{6} \left(z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z\right) + \frac{t^4}{24} \left(z^4 - 2z^3 + z^2 - \frac{1}{30}\right) + o(t^4). \end{aligned}$$

Selon la définition des polynômes de Bernoulli, on a

$$\frac{te^{tz}}{e^t - 1} = 1 + tB_1(z) + \frac{t^2}{2}B_2(z) + \frac{t^3}{6}B_3(z) + \frac{t^4}{24}B_4(z) + o(t^4).$$

En identifiant ces deux dernières expressions, on a retrouve donc les polynômes B_1 , B_2 , B_3 et B_4 .

DÉFINITION T.4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$. Le nombre b_n est appelé le n -ième nombre de Bernoulli.

PROPOSITION T.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n+1} = 0$.

DÉMONSTRATION. Par définition, on a, pour t assez petit en module,

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad f(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_n.$$

Compte tenu des calculs faits sur B_0 et B_1 , on a $b_0 = 1$ et $b_1 = -1/2$. Ainsi, on a

$$f(t, 0) + \frac{t}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_n.$$

Or, on a

$$f(t, 0) + \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{t e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{2 e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}.$$

Ainsi, on a, pour t assez petit en module,

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_n = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{t e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{2 e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}.$$

Le résultat provient de la parité de la fonction du membre de droite de cette dernière égalité. \square

Si on applique (T.16) pour $X = 0$, on a

$$\begin{cases} b_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k b_k, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en utilisant un formalisme similaire à (T.19),

$$\boxed{\begin{cases} b_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+b)^{n+1} - b^{n+1} = 0. \end{cases}} \quad (\text{T.26})$$

Ainsi, on déduit de la proposition T.5 et de (T.26) les premiers nombres de Bernoulli :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= \frac{1}{2}, \\ b_2 &= \frac{1}{6}, \\ b_3 &= 0, \\ b_4 &= -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

T.3.2. Propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli

Donnons quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite :

PROPOSITION T.6.

$$\forall n \geq 2, \quad B_n(0) = B_n(1), \quad (\text{T.27})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad B_n(1-z) = (-1)^n B_n(z), \quad (\text{T.28})$$

$$\forall n \geq 1, \quad B'_n = nB_{n-1}, \quad (\text{T.29})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad B_{n+1}(z) - B_{n+1}(z-1) = (n+1)(z-1)^n. \quad (\text{T.30})$$

DÉMONSTRATION. On démontre (T.27) par récurrence sur n . Pour $n = 2$, c'est vrai. Soit $n \geq 2$; supposons que (T.27) est vraie pour $k \in \{1, \dots, n\}$. D'après (T.16) et l'hypothèse de récurrence, on a successivement

$$\begin{aligned} B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) &= 1 - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n C_{n+2}^k B_k(1) + \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n C_{n+2}^k B_k(0), \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=2}^n C_{n+2}^k (B_k(1) - B_k(0)) \right) - \frac{1}{n+2} C_{n+2}^0 B_0(1) - \frac{1}{n+2} C_{n+2}^1 B_1(1) \\ &\quad + \frac{1}{n+2} C_{n+2}^0 B_0(0) + \frac{1}{n+2} C_{n+2}^1 B_1(0), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer (T.28), on constate que, par définition

$$\begin{aligned} f(t, 1-z) &= \frac{(-t)e^{(-t)z}}{e^{(-t)} - 1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n B_n(z); \end{aligned}$$

or

$$f(t, 1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(1-z);$$

on conclut en utilisant l'unicité du développement en série entière.

Pour démontrer (T.29), on écrit, la fonction $f(t, z)$ étant de classe \mathcal{C}^∞ par rapport à ses deux arguments, pour t assez petit en module et la série étant absolument convergente :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B'_n(z).$$

par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) &= \frac{t^2 e^{tz}}{e^t - 1}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n B_{n-1}(z). \end{aligned}$$

On conclut par unicité du développement en série entière.

Pour la démonstration de (T.30), on remarque que

$$f(t, z) - f(t, z-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} (B_{n+1}(z) - B_{n+1}(z-1)).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f(t, z) - f(t, z-1) &= \frac{te^{tz}}{e^t - 1} - \frac{te^{t(z-1)}}{e^t - 1}, \\ &= te^{t(z-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} (n+1)(z-1)^n. \end{aligned}$$

On conclut de nouveau par unicité du développement en série entière. □

On peut tirer de (T.30) une propriété qui permet de calculer les sommes de puissances :

PROPOSITION T.7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=1}^N k^n = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(N+1) - b_{n+1}).$$

DÉMONSTRATION. On écrit successivement (T.30) pour $z = 1, z = 2, \dots$ jusqu'à $z = N + 1$:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(N) &= (n+1)N^n, \\ B_{n+1}(N) - B_{n+1}(N-1) &= (n+1)(N-1)^n, \\ &\vdots \\ B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) &= (n+1)0^n. \end{aligned}$$

En sommant ces $N + 1$ équations, on peut conclure. □

Par exemple, si on prend $n = 2$, on retrouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k^2 &= \frac{1}{3} (B_3(N+1) - b_3), \\ &= \frac{1}{3} \left((N+1)^3 - \frac{3}{2}(N+1)^2 + \frac{1}{2}(N+1) \right), \\ &= \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1). \end{aligned}$$

T.3.3. Développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli

DÉFINITION T.8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note \overline{B}_n le n -ième polynôme de Bernoulli périodisé, la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , 1-périodique et définie par

$$\overline{B}_n(x) = \begin{cases} B_n(x) & \text{si } x \in]0, 1[, \\ \frac{B_n(0) + B_n(1)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a représenté sur les figures T.1 et T.2 les quatre premiers polynômes de Bernoulli périodisés.

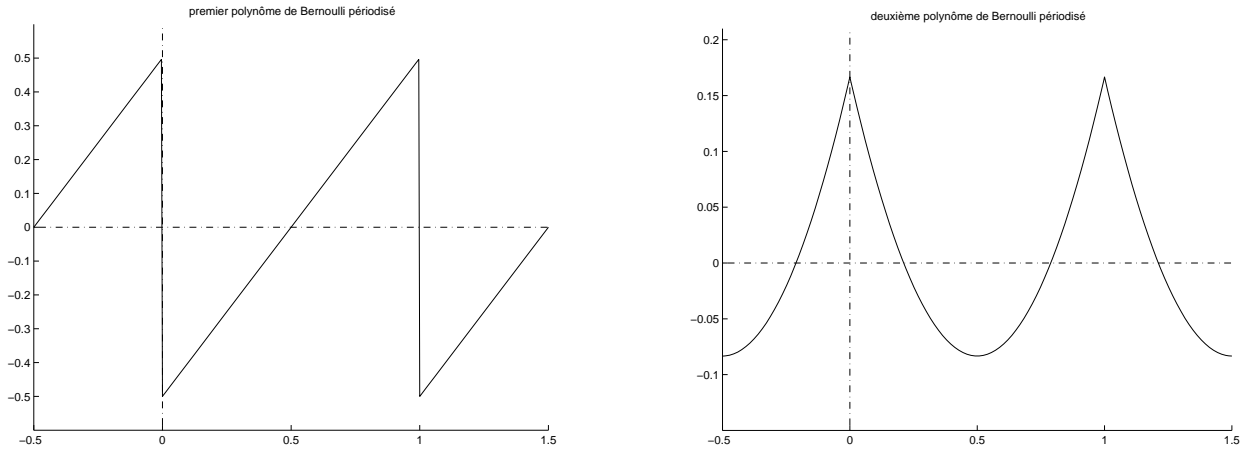


FIGURE T.1. Les polynômes de Bernoulli périodisés \overline{B}_1 et \overline{B}_2 .

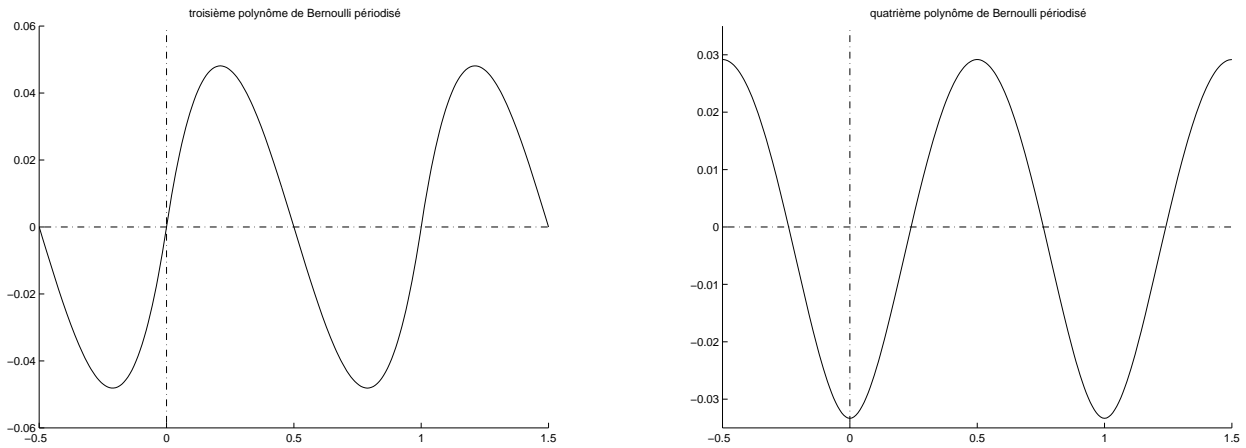


FIGURE T.2. Les polynômes de Bernoulli périodisés \overline{B}_3 et \overline{B}_4 .

On a la propriété de régularité suivante :

PROPOSITION T.9.

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \overline{B}_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \overline{B}_n est de classe C^{n-2} sur \mathbb{R} si $n \geq 2$ et est discontinue en tout point entier si $n = 1$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer 1, il suffit de constater que $\overline{B}_n|_{]0,1[}$ est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^∞ . Il est clair que \overline{B}_1 est discontinue en zéro car on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \overline{B}_1(x) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \overline{B}_1(x) &= -\frac{1}{2}, \\ \overline{B}_1(0) &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, \overline{B}_1 est discontinue en tout point entier.

Compte tenu de 1, pour démontrer que $n \geq 2$, \overline{B}_n est de classe \mathcal{C}^{n-2} sur \mathbb{R} , il suffit de démontrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_n^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_n^{(k)}(1-)$ (ou les valeurs $\overline{B}_n(0+)$ et $\overline{B}_n(1-)$ si $k = 0$) existent et sont égales. Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, on peut remarquer que, selon (T.27),

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \overline{B}_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} B_2(x) = B_2(1) = \frac{1}{6}, \quad (\text{T.31})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \overline{B}_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} B_2(x) = B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad (\text{T.32})$$

$$\overline{B}_1(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \quad (\text{T.33})$$

Soit $n \geq 2$. On supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_n^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_n^{(k)}(1-)$ (ou les valeurs $\overline{B}_n(0+)$ et $\overline{B}_n(1-)$ si $k = 0$) existent et sont égales. Démontrons que cette propriété est vraie à l'ordre $n+1$. Selon (T.27),

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \overline{B}_{n+1}(x) = B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0), \quad (\text{T.34})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \overline{B}_{n+1}(x) = B_{n+1}(0), \quad (\text{T.35})$$

$$\overline{B}_1(0) = \frac{1}{2} (B_{n+1}(0) + B_{n+1}(1)) = B_{n+1}(0). \quad (\text{T.36})$$

Montrons maintenant que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(1-)$ existent et sont égales. On a, selon (T.29),

$$B_{n+1}^{(k)}(0+) = (B'_{n+1})^{(k-1)}(0+) = (n+1)(B_n)^{(k-1)}(0+).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, puisque $0 \leq k-1 \leq n$, la dérivée $\overline{B}_n^{(k-1)}(0+)$ existe et vaut $\overline{B}_n^{(k-1)}(1-)$; ainsi, la dérivée $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(0+)$ existe et vaut $(n+1)\overline{B}_n^{(k-1)}(1-)$. Or, selon (T.29),

$$(n+1)\overline{B}_n^{(k-1)}(1-) = (n+1)B_n^{(k-1)}(1-) = B_{n+1}^{(k)}(1-) = \overline{B}_{n+1}^{(k)}(1-).$$

Ainsi, les dérivées à droite et à gauche $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(0+)$ et $\overline{B}_{n+1}^{(k)}(1-)$ existent et sont égales. \square

Compte tenu de (T.31) et (T.34) on peut remarquer que

$$\forall n \geq 2, \quad \overline{B}_n(0) = B_n(0).$$

Donnons maintenant le principal résultat de cette section : le développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli périodisés :

PROPOSITION T.10. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \overline{B}_{2p+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2p+1}}, \quad (\text{T.37})$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} \overline{B}_{2p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2p}}. \quad (\text{T.38})$$

DÉMONSTRATION. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le développement en série de Fourier de \overline{B}_n est donné par (T.37) ou (T.38).

Développons tout d'abord \overline{B}_1 en série de Fourier. On a, par définition,

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \overline{B}_1(x) = x - \frac{1}{2};$$

cette fonction est impaire et donc les coefficients a_k sont nuls. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_k = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \sin(2k\pi x) dx,$$

et après calculs

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_k = -\frac{1}{k\pi}.$$

D'après la propriété T.9, la fonction \overline{B}_1 est continue par morceau sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} ; ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} (\overline{B}_1(x-) + \overline{B}_1(x+)) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x),$$

ce qui implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k},$$

ce qui correspond à (T.37) avec $p = 0$. Pour montrer (T.38) avec $p = 1$, on laisse au lecteur le soin d'utiliser un calcul de dérivation, proche de celui qui suit.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que (T.37) ou (T.38) est vérifiée pour \overline{B}_n (selon la parité de n). Calculons \overline{B}_{n+1} . D'après la proposition T.9, \overline{B}_{n+1} est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} ; on peut donc écrire, d'après le théorème de Dirichlet, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent les coefficients de Fourier de \overline{B}_{n+1}

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}_{n+1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x) + b_k \cos(2k\pi x). \quad (\text{T.39})$$

Remarquons que a_0 est nul; en effet, selon (T.27) et (T.29), on a successivement,

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 \overline{B}_{n+1}(t) dt, \\ &= \int_0^1 B_{n+1}(t) dt, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{n+2} B'_{n+2}(t) dt, \\ &= \frac{1}{n+2} (B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0)), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, selon (T.39),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x) + b_k \cos(2k\pi x). \quad (\text{T.40})$$

D'autre part, d'après la proposition T.9, \overline{B}_{n+1} est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^∞ par morceaux sur \mathbb{R} ; on peut donc dériver le développement de Fourier de \overline{B}_{n+1} (T.40) terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B}'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -2k\pi a_k \sin(2k\pi x) + 2k\pi b_k \cos(2k\pi x),$$

et en particulier,

$$\forall x \in]0, 1[, \quad B'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} -2k\pi a_k \sin(2k\pi x) + 2k\pi b_k \cos(2k\pi x).$$

Selon (T.29), on a donc

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \overline{B}_n(x) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} -ka_k \sin(2k\pi x) + kb_k \cos(2k\pi x). \quad (\text{T.41})$$

Si n est pair, alors $n = 2p$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) et d'après l'hypothèse de récurrence (T.38), on a, en particulier,

$$\forall x \in]0, 1[, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} \overline{B}_{2p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2p}}.$$

En identifiant avec (T.41), on a donc, par unicité du développement en série de Fourier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_k &= 0, \\ b_k &= \frac{1}{k^{2p+1}} \left((-1)^p 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (T.40), $\overline{B}_{n+1} = \overline{B}_{2p+1}$ obéit bien à (T.37). De même, si $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$, d'après l'hypothèse de récurrence (T.37), on a, en particulier,

$$\forall x \in]0, 1[, \quad (-1)^{p-1} 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \overline{B}_{2p+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2p+1}}.$$

En identifiant avec (T.41), on a donc, par unicité du développement en série de Fourier

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k &= \frac{1}{k^{2p+2}} \left((-1)^p 2^{2p+1} \frac{\pi^{2p+2}}{(2p+2)!} \right)^{-1}, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_k &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (T.40), $\overline{B}_{n+1} = \overline{B}_{2p+2}$ obéit bien à (T.38). □

T.3.4. Application : calcul des séries harmoniques d'ordre pair et les séries alternées associées

On peut déduire de la proposition T.10 quelques expressions explicites de séries :

PROPOSITION T.11.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} b_{2p}, \quad (\text{T.42})$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2p}} = (-1)^{p-1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} B_{2p} \left(\frac{1}{2} \right), \quad (\text{T.43})$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^{2p+1}} = (-1)^{p-1} 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} B_{2p+1} \left(\frac{1}{4} \right). \quad (\text{T.44})$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer (T.42), il suffit de prendre $x = 0$ dans (T.38); on a $2p \geq 2$ ainsi \overline{B}_{2p} est continu sur \mathbb{R} et $\overline{B}_{2p}(0) = B_{2p}(0) = b_{2p}$. Si l'on choisit $x = 1/2$ dans (T.38), on a (T.43). Si l'on choisit $x = 1/4$ dans (T.37), on a (T.44). □

EXEMPLE T.12. Si l'on prend $p = 1, 2$ et 3 dans (T.42) on obtient, puisque $b_2 = 1/6, b_4 = -1/30$ et $b_6 = 1/42$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.} \quad (\text{T.45})$$

EXEMPLE T.13. Si l'on prend $p = 1$ et 2 dans (T.43) on obtient, puisque $B_2 = X^2 - X + 1/6, B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.} \quad (\text{T.46})$$

EXEMPLE T.14. Si l'on prend $p = 0$ et 1 dans (T.44) on obtient, puisque $B_1 = X - 1/2, B_3 = X^3 - 3X^2/2 + X/2$,

$$\boxed{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2r+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^3} = \frac{7\pi^3}{96}.} \quad (\text{T.47})$$

Par cette méthode, on ne peut calculer des séries du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p+1}},$$

qui, *a priori* n'ont pas d'expressions explicites connues.

T.4. Calcul par les distributions périodiques

T.4.1. Calcul direct

Pour les définitions, voir l'annexe U.

Ces distributions périodiques nous permettent de retrouver plus naturellement les polynômes de Bernoulli.

EXEMPLE T.15. Cherchons une distribution de $\mathcal{D}'(S^1)$ dont les coefficients de Fourier vérifient

$$c_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad c_k = \frac{1}{k^2}. \quad (\text{T.48})$$

On a donc, au sens des distributions périodiques

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi}.$$

Cette distribution est définie puisque pour tout fonction test ϕ , la somme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle c_k e^{2i\pi k}, \phi \rangle$$

est convergente; en effet,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle c_k e^{2i\pi k}, \phi \rangle| \leq \|\phi\|_{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \|\phi\|_{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty. \quad (\text{T.49})$$

On pose

$$U = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{2ik\pi}.$$

Grâce à (T.48), (U.4) et (U.1), on a donc, au sens des distributions périodiques,

$$\begin{aligned}
 T^{(2)} &= U^{(2)}, \\
 &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k (2ik\pi)^2 e^{2ik\pi}, \\
 &= -4\pi^2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k k e^{2ik\pi}, \\
 &= -4\pi^2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{2ik\pi}, \\
 &= -4\pi^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2ik\pi} - 1 \right), \\
 &= -4\pi^2 (\delta - 1).
 \end{aligned}$$

On a donc l'équation différentielle suivante

$$\text{dans } \mathcal{D}'(S^1), \quad -\frac{1}{4\pi^2} T^{(2)} = \delta - 1. \quad (\text{T.50})$$

Cette équation différentielle se résout presque comme les équations différentielles pour les fonctions ; la discontinuité introduite par la périodisation (voir proposition U.4) introduit des dirac et des dérivées. Si on cherchait une fonction f , deux fois dérivable, vérifiant dans \mathbb{R} ,

$$-\frac{1}{4\pi^2} f^{(2)} = -1, \quad (\text{T.51})$$

on aurait

$$f(x) = 2\pi^2 x^2 + ax + b,$$

où a et b sont des constantes. On cherche donc T sous la forme

$$T = \tilde{f},$$

où \tilde{f} est la périodisée de f . D'après la proposition U.4, on donc successivement

$$\begin{aligned}
 \dot{T} &= \tilde{f}' - (f(1) - f(0))\delta, \\
 &= \tilde{f}' - (2\pi^2 + a)\delta
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 T^{(2)} &= \tilde{f}'' - (f'(1) - f'(0))\delta - (2\pi^2 + a)\delta', \\
 &= \tilde{f}'' - 4\pi^2\delta - (2\pi^2 + a)\delta'.
 \end{aligned}$$

Selon (T.51), on a donc, au sens des distributions périodiques,

$$T^{(2)} = 4\pi^2 - 4\pi^2\delta - (2\pi^2 + a)\delta'.$$

Ainsi, (T.50) a lieu si et seulement si $2\pi^2 + a$ est nul. On choisit donc a égal à $-2\pi^2$. Le coefficient c_0 du développement de T en série de Fourier est nul :

$$c_0 = \int_0^1 \tilde{f}(x) dx = \int_0^1 2\pi^2 x^2 - 2\pi^2 x + b dx = 0,$$

ce qui nous fournit la valeur de $b = \pi^2/3$. La distribution T est donc la distribution-fonction \tilde{f} 1-périodique et définie par :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \tilde{f}(x) = 2\pi^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right). \quad (\text{T.52})$$

On a donc

$$\text{dans } \mathcal{D}'(S^1), \quad \tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi}.$$

Selon (T.49) la distribution-fonction de droite appartient à $L^2(0, 1)$ et l'égalité précédente a lieu dans $L^2(0, 1)$; Or \tilde{f} est continue et dérivable par morceaux; d'après le théorème de Dirichlet, appliqué en $x = 0$, on a donc

$$\tilde{f}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k,$$

soit encore, grâce à la définition des c_k

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2\pi^2 \times \frac{1}{6},$$

ce qui nous redonne (T.45). En fait, nous avons fait, sans le savoir, les calculs de la section T.3.4 : à un facteur multiplicatif près, la fonction \tilde{f} , définie par (T.52), est égale à la périodisée du polynôme de Bernoulli B_2 , défini par (T.23).

On pourrait retrouver, par récurrence, les différents polynômes de Bernoulli et les résultats de la section T.3.4. On peut aussi déterminer d'autres types de séries, comme le montrent les exemples T.16 et T.17.

EXEMPLE T.16. Comme dans l'exemple T.15, calculons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$

La démarche étant identique, nous n'indiquerons que les détails importants du calcul. Cherchons une distribution de $\mathcal{D}'(S^1)$ dont les coefficients de Fourier vérifient

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{1}{1+k^2}. \quad (\text{T.53})$$

On a donc, au sens des distributions périodiques,

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi}.$$

L'égalité (T.53) peut encore s'écrire

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1+k^2)c_k = 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{dans } \mathcal{D}'(S^1), \quad T - \frac{1}{4\pi^2} T^{(2)} = \delta. \quad (\text{T.54})$$

On résout donc l'équation différentielle dans \mathbb{R} :

$$f - \frac{1}{4\pi^2} f^{(2)} = 0, \quad (\text{T.55})$$

dont la solution est

$$f(x) = \lambda e^{2\pi x} + \mu e^{-2\pi x},$$

où λ et μ sont des constantes. On cherche donc T sous la forme

$$T = \tilde{f}.$$

On a donc, au sens des distributions périodiques,

$$T^{(2)} = \tilde{f}'' - 2\pi(\lambda e^{2\pi} - \mu e^{-2\pi} - \lambda + \mu)\delta - (\lambda(e^{2\pi} - 1) + \mu(e^{-2\pi} - 1))\delta',$$

et donc

$$-\frac{1}{4\pi^2}T^{(2)} = -\frac{1}{4\pi^2}\widetilde{f}'' + \frac{1}{2\pi}A\delta + \frac{1}{4\pi^2}B\delta',$$

où

$$\begin{cases} A = \lambda(e^{2\pi} - 1) - \mu(e^{-2\pi} - 1), \\ B = \lambda(e^{2\pi} - 1) + \mu(e^{-2\pi} - 1). \end{cases} \quad (\text{T.56})$$

On a donc, compte tenu de (T.55),

$$T - \frac{1}{4\pi^2}T^{(2)} = \frac{1}{2\pi}A\delta + \frac{1}{4\pi^2}B\delta'.$$

Ainsi, (T.54) a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} A = 2\pi, \\ B = 0. \end{cases} \quad (\text{T.57})$$

On résout le système (T.56) et (T.57) qui fournit les valeurs de λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\pi}{e^{2\pi} - 1}, \\ \mu = -\frac{\pi}{e^{-2\pi} - 1}. \end{cases}$$

On a donc, au sens des distributions périodiques

$$\widetilde{f} = \lambda\widetilde{e^{2\pi \cdot}} + \mu\widetilde{e^{-2\pi \cdot}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} e^{2i\pi k}.$$

On vérifie que \widetilde{f} est continue et dérivable par morceaux ; d'après le théorème de Dirichlet, appliqué en $x = 0$, on a donc

$$\frac{1}{2}(\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = 2S + 1.$$

On a donc

$$S = \frac{1}{4}(\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\lambda e^{2\pi} + \mu e^{-2\pi} + \lambda + \mu) - \frac{1}{2},$$

et après calculs,

$$S = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2},$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \coth(\pi) - \frac{1}{2}.} \quad (\text{T.58})$$

EXEMPLE T.17. Comme dans les exemples T.15 et T.16, calculons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^2+k^4}.$$

Cherchons une distribution de $\mathcal{D}'(S^1)$ dont les coefficients de Fourier vérifient

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{k^2}{1+k^2+k^4}. \quad (\text{T.59})$$

On a

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2ik\pi}.$$

L'égalité (T.59) peut encore s'écrire

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1+k^2+k^4)c_k = k^2,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{dans } \mathcal{D}'(S^1), \quad (2i\pi)^{-4}T^{(4)} + (2i\pi)^{-2}T^{(2)} + T = (2i\pi)^{-2}\delta^{(2)}. \quad (\text{T.60})$$

On résout donc l'équation différentielle dans \mathbb{R} :

$$(2i\pi)^{-4}f^{(4)} + (2i\pi)^{-2}f^{(2)} + f = 0. \quad (\text{T.61})$$

Son équation caractéristique est

$$(2i\pi)^{-4}r^{(4)} + (2i\pi)^{-2}r^{(2)} + 1 = 0, \quad (\text{T.62})$$

équivalente à

$$s^{(4)} + s^{(2)} + 1 = 0,$$

où l'on a posé $s = (2i\pi)r$. Après calculs, on obtient les solutions de (T.62), notées $(\alpha_l)_{1 \leq l \leq 4}$ avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2i\pi j, \\ \alpha_2 &= 2i\pi j^2, \\ \alpha_3 &= \overline{\alpha_1}, \\ \alpha_4 &= \overline{\alpha_2}. \end{aligned}$$

La solution de (T.61) est donc

$$f(x) = ae^{\alpha_1 x} + be^{\alpha_2 x} + ce^{\alpha_3 x} + de^{\alpha_4 x},$$

où a, b, c et d sont des constantes. On a donc

$$T = \tilde{f}.$$

On pose

$$\begin{aligned} A_0 &= f'(1) - f'(0), \\ A_1 &= f^{(2)}(1) - f^{(2)}(0), \\ A_2 &= f^{(3)}(1) - f^{(3)}(0), \\ A_3 &= f^{(4)}(1) - f^{(4)}(0). \end{aligned}$$

On a, après calculs,

$$\begin{aligned} &(2i\pi)^{-4}T^{(4)} + (2i\pi)^{-2}T^{(2)} + T - (2i\pi)^{-2}\delta^{(2)} \\ &= -(2i\pi)^{-4} \left((A_3 + (2i\pi)^2 A_1) \delta + (A_2 + (2i\pi)^2 A_0) \delta' + (A_1 + (2i\pi)^2) \delta^{(2)} + A_0 \delta^{(3)} \right). \end{aligned}$$

La nullité des coefficients de $\delta, \delta', \delta^{(2)}$ et $\delta^{(3)}$ fournit les valeurs des A_l :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= 4\pi^2, \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= 16\pi^4. \end{aligned}$$

En utilisant la définition des A_l , on a donc le système linéaire en a, b, c et d suivant :

$$\begin{aligned} (e^{\alpha_1} - 1)a + (e^{\alpha_2} - 1)b + (e^{\alpha_3} - 1)c + (e^{\alpha_4} - 1)d &= A_0, \\ \alpha_1(e^{\alpha_1} - 1)a + \alpha_2(e^{\alpha_2} - 1)b + \alpha_3(e^{\alpha_3} - 1)c + \alpha_4(e^{\alpha_4} - 1)d &= A_1, \\ \alpha_1^2(e^{\alpha_1} - 1)a + \alpha_2^2(e^{\alpha_2} - 1)b + \alpha_3^2(e^{\alpha_3} - 1)c + \alpha_4^2(e^{\alpha_4} - 1)d &= A_2, \\ \alpha_1^3(e^{\alpha_1} - 1)a + \alpha_2^3(e^{\alpha_2} - 1)b + \alpha_3^3(e^{\alpha_3} - 1)c + \alpha_4^3(e^{\alpha_4} - 1)d &= A_3. \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= (e^{\alpha_1} - 1) a, \\ \tilde{b} &= (e^{\alpha_2} - 1) b, \\ \tilde{c} &= (e^{\alpha_3} - 1) c, \\ \tilde{d} &= (e^{\alpha_4} - 1) d,\end{aligned}$$

le système s'écrit matriciellement sous la forme

$$A \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

où A est la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de l'inverse de cette matrice est classique ; voir par exemple les pages 503 et 504 de [AF87] ou l'exercice 2.5 page 55 de [BM03]. Dans les deux cas, le calcul est fondé sur le polynôme d'interpolation de Lagrange. On trouve après calculs

$$A^{-1} = t \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{B_1} & -\frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_1}{B_2} & -\frac{\alpha_4\alpha_1\alpha_2}{B_3} & -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{B_4} \\ \frac{\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4}{B_1} & \frac{\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_3\alpha_4}{B_2} & \frac{\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_2}{B_3} & \frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}{B_4} \\ -\frac{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{B_1} & -\frac{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4}{B_2} & -\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}{B_3} & -\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{B_4} \\ \frac{1}{B_1} & \frac{1}{B_2} & \frac{1}{B_3} & \frac{1}{B_4} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}B_1 &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1), \\ B_2 &= (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2), \\ B_3 &= (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_3), \\ B_4 &= (\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4).\end{aligned}$$

Enfin, on écrit, d'après le théorème de Dirichlet, appliqué en $x = 0$,

$$\frac{1}{2} \left(\tilde{f}(0+0) + \tilde{f}(0-0) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^2+k^4} = 2S,$$

ce qui nous permet de calculer la somme en question. On montrera (voir section T.5) que l'on a, en fait,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n^4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right)}. \quad (\text{T.63})$$

T.4.2. Formule sommatoire de Poisson

Il existe une autre méthode, la formule sommatoire de Poisson, que l'on pourra trouver page 128 de [Boc97] ou dans la leçon 37 de [GW03].

T.5. Calcul par l'utilisation du théorème des résidus

Concluons par la méthode qui semble être la plus rapide. Cette section correspond aux pages 129 à 132 de [Boc96].

On utilise un résultat, fondée sur le théorème des résidus.

Rappelons la définition suivante (voir par exemple [Rud92]) :

DÉFINITION T.18. Une f fonction est dite méromorphe dans \mathbb{C} s'il existe un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ tel que

- (1) A n'a pas de point d'accumulation dans \mathbb{C} ;
- (2) f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus A$;
- (3) f a un pôle en tout point de A .

PROPOSITION T.19. Soit f une fonction méromorphe dans \mathbb{C} ayant un nombre fini de pôles $(z_l)_{1 \leq l \leq p}$, aucun de ces pôles ne coïncidant avec un entier. Si

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z f(z) = 0, \tag{T.64}$$

alors, la somme $\sum_{n=-N}^N f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = - \sum_{l=1}^p \text{Rés} (\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l). \tag{T.65}$$

REMARQUE T.20. Ce résultat permet d'affirmer que la somme $\sum_{n=-N}^N f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini, mais ne permet pas de montrer que famille $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION T.19. Pour N entier non nul, on définit γ_N le chemin carré de \mathbb{C} , de centre l'origine et passant par le point d'affixe $N + 1/2$ (voir la figure T.3). On choisit N assez grand de façon que γ_N contiennent tous les pôles de f .

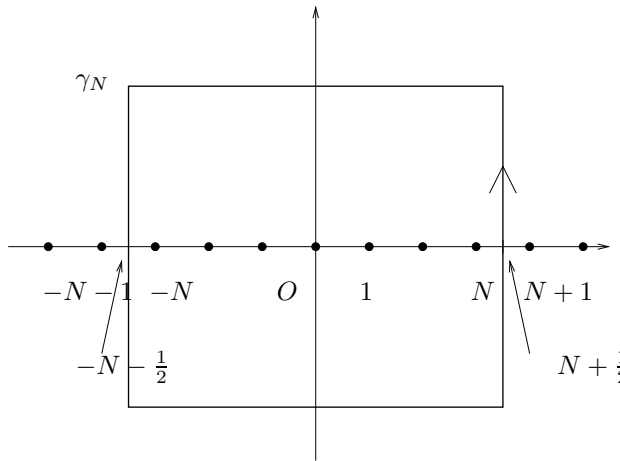


FIGURE T.3. le chemin γ_N

On considère la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left((z_l)_{1 \leq l \leq p} \cup \mathbb{Z} \right), \quad g(z) = \pi f(z) \cotg(\pi z) = \pi f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

La fonction g est correctement définie, est méromorphe dans \mathbb{C} et l'ensemble de ses pôles est égal à $\left((z_l)_{1 \leq l \leq p} \cup \mathbb{Z} \right)$; en effet, $e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 0$ est équivalent à $e^{2i\pi z} = 0$, soit z entier. De plus

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) = f(k). \quad (\text{T.66})$$

En effet, d'après le lemme 3.39 page 43, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, qui n'est pas pôle de f :

$$\text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) = \pi f(k) \frac{\cos(\pi k)}{[\sin(\pi z)]'_{z=k}} = \pi f(k) \frac{\cos(\pi k)}{\pi \cos(\pi k)}.$$

D'après le théorème des résidus, il vient

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz = 2i\pi \sum_{n=-N}^N \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), n) + 2i\pi \sum_{l=1}^p \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l),$$

et, d'après (T.66),

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz = 2i\pi \sum_{n=-N}^N f(n) + 2i\pi \sum_{l=1}^p \text{Rés}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_l). \quad (\text{T.67})$$

Montrons que sur γ_N , $\cotg(\pi z)$ est borné indépendamment de N . Sur les côtés verticaux du carré, on a $z = \pm(N + 1/2) + iy$ où $|y| \leq N + 1/2$ et, par conséquent,

$$|\cotg(\pi z)| = |\text{th}(\pi y)| \leq \left| \text{th} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|,$$

si $|y| \leq 1/2$. Si $|y| > 1/2$, on a

$$\begin{aligned} |\cotg(\pi z)| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right|, \\ &= \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}} \right|, \\ &= \frac{|e^{i\pi x - \pi y}| + |e^{-i\pi x + \pi y}|}{|e^{-i\pi x + \pi y}| - |e^{i\pi x - \pi y}|}, \\ &\leq \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}, \\ &\leq \coth(\pi y), \end{aligned}$$

et on conclut que $|\cotg(\pi z)|$ est majoré par $\coth(\pi/2)$, puisque

$$\coth(\pi y) \leq \coth \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad (\text{T.68})$$

car $|\cotg(\pi y)|$ décroît avec $|y|$. Sur les côtés horizontaux du carré, $z = \pm(N + 1/2)i + x$ avec $|x| \leq N + 1/2$. Puisque $|y|$ est supérieur à $1/2$, (T.68) reste valable. On a donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \gamma_N, \quad |\cotg(\pi z)| \leq \coth \left(\frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{T.69})$$

Par ailleurs, on a, pour tout N assez grand, puisque la longueur de γ_N est égale à $4N + 2$,

$$\left| \int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| \leq \pi(4N + 2) \max_{|z| \geq N} |f(z)| \max_{z \in \gamma_N} |\cotg(\pi z)|,$$

et, grâce à (T.69),

$$\leq \coth \left(\frac{\pi}{2} \right) \pi(4N + 2) \max_{|z| \geq N} |f(z)|.$$

D'après l'hypothèse (T.64), on a, pour $N \rightarrow +\infty$,

$$\max_{|z| \geq N} |f(z)| = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

On a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| = 0,$$

ce qui implique, selon (T.67), que la somme $\sum_{n=-N}^N f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et vérifie (T.65). \square

En raisonnant de la même façon (voir page 131 de [Boc96]), on a le résultat suivant :

PROPOSITION T.21. *Soit f une fonction méromorphe dans \mathbb{C} ayant un nombre fini de pôles $(z_l)_{1 \leq l \leq p}$, aucun de ces pôles ne coïncidant avec un entier. Si*

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z f(z) = 0, \tag{T.70}$$

alors, la somme $\sum_{n=-N}^N (-1)^n f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N (-1)^n f(n) = - \sum_{l=1}^p \text{Rés} \left(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}, z_l \right)}. \tag{T.71}$$

Dans le cas où

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes, on peut donner le corollaire suivant, qui découle du lemme 3.39 page 43.

COROLLAIRE T.22. *Soient P et Q deux polynômes complexes tels que $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$ et que Q n'ait que des racines simples, non entières, notées $(z_l)_{1 \leq l \leq p}$. Alors, la famille $(P(n)/Q(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ($(-1)^n P(n)/Q(n)_{n \in \mathbb{Z}}$) sont sommables et*

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\pi \sum_{l=1}^p \frac{\cos(\pi z_l) P(z_l)}{\sin(\pi z_l) Q'(z_l)},} \tag{T.72}$$

et

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)} = -\pi \sum_{l=1}^p \frac{P(z_l)}{\sin(\pi z_l) Q'(z_l)}.} \tag{T.73}$$

EXEMPLE T.23. Soit $a > 0$. On pose $P(z) = 1$ et $Q(z) = z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai)$. D'après (T.72), on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \sum_{l=1}^2 \frac{\cos(\pi z_l)}{2 \sin(\pi z_l) z_l} = -\frac{\pi}{2ai} \left(\frac{\cos(\pi ai)}{\sin(\pi ai)} + \frac{\cos(\pi ai)}{\sin(\pi ai)} \right) = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}.} \tag{T.74}$$

En choisissant $a = 1$, on retrouverait (T.58).

Si on fait tendre a vers 0, on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{T.75}$$

Cette limite se justifie par la convergence normale de la série de terme général $1/(n^2 + a^2)$: si on pose

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad R_N(a) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout N ,

$$|R_N(a)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N assez grand tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Cet entier étant fixé, chacune des fonctions $x \mapsto 1/(n^2 + x^2)$, pour $n \in \{1, \dots, N\}$ est continue, et on peut donc choisir $\eta > 0$ tel que pour tout $a \in [0, \eta]$,

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + a^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On donc pour tout $a \in [0, \eta]$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + a^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right|, \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + a^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right| + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + |R_N(a)|, \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui établit (T.75). \diamond

De (T.75), on tire donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} \right)$$

Après calculs, on montre que cette limite vaut $\pi^2/6$ et on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui correspond à (T.45).

EXEMPLE T.24. Soit $a > 0$. On pose $P(z) = 1$ et $Q(z) = z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai)$. D'après (T.73), on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\pi \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2 \sin(\pi z_l) z_l} = -\frac{\pi}{2ai} \left(\frac{1}{\sin(\pi ai)} + \frac{1}{\sin(\pi ai)} \right) = \frac{2\pi}{a} \frac{1}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \frac{1}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.} \quad (\text{T.76})$$

En choisissant $a = 1$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.} \quad (\text{T.77})$$

En faisant tendre a vers 0 et en admettant¹ que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

1. même justification que (T.75).

on aurait

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{a} \frac{1}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2} \right).$$

Après calculs, on montre que cette limite vaut $-\pi^2/12$ et on a donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.} \quad (\text{T.78})$$

EXEMPLE T.25. On pose

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2, \\ Q(z) &= z^4 + z^2 + 1 = (z - j)(z + j)(z - \bar{j})(z + \bar{j}). \end{aligned}$$

D'après (T.73), on a donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2}{1 + n^2 + n^4} = -\pi \sum_{l=1}^4 \frac{\cos(\pi z_l) z_l^2}{\sin(\pi z_l) (4z_l^3 + 2z_l)} = -\pi \sum_{l=1}^4 \frac{\cos(\pi z_l) z_l}{\sin(\pi z_l) (4z_l^2 + 2)}.$$

On pose

$$\alpha = \frac{j}{4j^2 + 2}.$$

Par conjugaison et opposition des racines de Q , on a

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n^2 + n^4} = -\pi \left(\frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)} \alpha + \frac{\cos(\pi \bar{j})}{\sin(\pi \bar{j})} \bar{\alpha} - \frac{\cos(-\pi j)}{\sin(-\pi j)} \alpha - \frac{\cos(-\pi \bar{j})}{\sin(-\pi \bar{j})} \bar{\alpha} \right),$$

ce qui implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n^2 + n^4} = -\pi \left(\frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)} \alpha + \frac{\cos(\pi \bar{j})}{\sin(\pi \bar{j})} \bar{\alpha} \right)$$

On montre que le terme de droite est égal à

$$-2\pi \operatorname{Re} \left(\alpha \frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)} \right),$$

puis, en utilisant $1 + j + j^2 = 0$, que

$$\alpha = - \left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{12} \right),$$

et que

$$\frac{\cos(\pi j)}{\sin(\pi j)} = -i \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right).$$

Bref, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n^2 + n^4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right),$$

ce qui est bien le résultat (T.63) annoncé dans l'exemple T.17 de la section T.4.

T.6. Calculs avec des logiciels de calcul formel

Un certain nombre de logiciels de calcul formel, comme maple, sont capable de donner de tels résultats. On peut retrouver quelques uns des résultats démontrés grâce à matlab symbolique². D'autres sommes sont explicitées à partir de fonctions de références, mais inexprimables analytiquement³. Les simulations présentées ci-dessous utilisent la fonction `symsum` de matlab et parlent d'elles-mêmes.

```
>syms k

>symsum(1/k^2,1,Inf)

ans=1/6*pi^2

>symsum(1/k^4,1,Inf)

ans=1/90*pi^4

>symsum(1/k^6,1,Inf)

ans=1/945*pi^6

>symsum((-1)^k/k,1,Inf)

ans=-log(2)

>symsum((-1)^k/k^2,1,Inf)

ans=-1/12*pi^2

>symsum((-1)^k/k^4,1,Inf)

ans=-7/720*pi^4

>symsum(1/(1+k^2),1,Inf)

ans=1/2*i*Psi(1-i)-1/2*i*Psi(1+i)

>symsum((-1)^k/(1+k^2),1,Inf)

ans=-1/2*hypergeom([1, 1+i, 1-i],[2+i, 2-i],-1)
```

2. qui utilise en fait maple.

3. ce qui laisse encore un peu de travail aux professeurs de mathématiques !

Rappels sur les distributions périodiques

On peut utiliser les distributions périodiques pour calculer quelques séries. Faisons quelques rappels sur les distributions périodiques, dont on fixe la période égale à un. On pourra, par exemple, consulter le chapitre 5 de [Boc97]. On pourra aussi avoir une présentation différentes des distributions périodiques en consultant les leçons 28 et 36 de [GW03].

DÉFINITION U.1. On note $\mathcal{D}(S^1)$ l'ensemble de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de classe \mathcal{C}^∞ et 1-périodiques. On note $\mathcal{D}'(S^1)$ l'ensemble des distributions 1-périodiques, c'est-à-dire, le dual topologique de $\mathcal{D}(S^1)$.

On rappelle que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ le dirac est la distribution notée δ et définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

On rappelle aussi que que la distribution δ est la dérivée au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la distribution de Heaviside H associée à la fonction, notée aussi H et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cette propriété a encore lieu dans $\mathcal{D}'(S^1)$. Pour cela, on donne la définition suivante :

DÉFINITION U.2 (Coefficients et série de Fourier). Étant donné une distribution T de $\mathcal{D}'(S^1)$, on appelle coefficients de Fourier de T les nombres

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(T) = \langle T, e^{-2i\pi k \cdot} \rangle$$

(où $e^{-2i\pi k \cdot}$ est la fonction de S^1 qui à s associe $e^{-2i\pi k s}$) et la série de Fourier de T la série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T) e^{2i\pi k \cdot}.$$

On rappelle que $\langle T, \phi \rangle$ désigne l'image de ϕ par T .

Si la distribution est définie à partir d'une fonction intégrable, on retrouve la définition usuelle des coefficients de Fourier et de série de Fourier.

On peut montrer (cf. chapitre 5 de [Boc97], théorème 1 page 122)

$$\delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi k \cdot}. \tag{U.1}$$

On peut aussi définir, pour une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} la périodisée \tilde{f} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , fonction 1-périodique et coïncidant avec f sur $[0, 1[$. Cette fonction périodique définit une distribution T de $\mathcal{D}'(S^1)$, aussi notée par abus \tilde{f} . Comme dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on donne

DÉFINITION U.3. Si T est une distribution de $\mathcal{D}'(S^1)$, on définit sa dérivée T' par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(S^1), \quad \langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle.$$

Si la fonction f est dérivable, la dérivée de la distribution périodique \tilde{f} est égale à la distribution correspondant à la périodisée de la dérivée, auquel on soustrait un multiple de la distribution δ (puisque la périodisation a introduit une discontinuité aux points entiers); plus précisément, on a

PROPOSITION U.4. *Pour toute fonction dérivable f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de périodisée \tilde{f} ,*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(S^1), \quad (\tilde{f})' = \tilde{f}' - (f(1) - f(0))\delta. \quad (\text{U.2})$$

Dans cette proposition, $(\tilde{f})'$ désigne la dérivée de la distribution définie par la périodisée de f tandis que \tilde{f}' désigne la distribution définie par la périodisée de la dérivée de la fonction f .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION U.4. Soit $\phi \in \mathcal{D}(S^1)$. Par définition, on a

$$\langle (\tilde{f})', \phi \rangle = - \langle \tilde{f}, \phi' \rangle.$$

Les fonctions f et \tilde{f} sont intégrables (et égales) sur $[0, 1]$; ainsi

$$\langle \tilde{f}, \phi' \rangle = \int_0^1 \tilde{f}(t)\phi'(t)dt = \int_0^1 f(t)\phi'(t)dt.$$

Par intégration par partie, il vient donc, compte tenu de l'aspect 1-périodique de la fonction ϕ

$$\langle (\tilde{f})', \phi \rangle = -(f(1)\phi(1) - f(0)\phi(0)) + \int_0^1 f'(t)\phi(t)dt = -(f(1) - f(0))\phi(0) + \int_0^1 \tilde{f}'(t)\phi(t)dt.$$

Par définition, on a

$$-(f(1) - f(0))\phi(0) + \int_0^1 \tilde{f}'(t)\phi(t)dt = -(f(1) - f(0)) \langle \delta, \phi \rangle + \langle \tilde{f}', \phi \rangle.$$

On a donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(S^1), \quad \langle (\tilde{f})', \phi \rangle = \langle -(f(1) - f(0))\delta + \tilde{f}', \phi \rangle,$$

ce qui équivaut à (U.2). □

Pour la suite, on omettra le symbole \sim lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. P est un polynôme, de dérivée usuelle P' , on écrira (U.2) sous la forme :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(S^1), \quad T'_P = P' - (P(1) - P(0))\delta, \quad (\text{U.3})$$

où T_P désigne la distribution associée à la fonction P et T'_P sa dérivée au sens des distributions périodiques.

On peut vérifier que, dans $\mathcal{D}'(S^1)$, on peut dériver terme à terme une série de Fourier : si,

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2i\pi k}, \quad (\text{U.4a})$$

alors

$$\mathcal{D}'(S^1), \quad T' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2i\pi k c_k e^{2i\pi k}, \quad (\text{U.4b})$$

Bibliographie

- [AF03] M. J. ABLOWITZ et A. S. FOKAS. *Complex variables : introduction and applications*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.
- [AF87] J.-M. ARNAUDIÈS et H. FRAYSSE. *Cours de mathématiques. 1 : Algèbre*. Dunod Université : Ouvrages de Base. [Dunod University : Basic Works]. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.07 ARN, 4 ième étage). Dunod, Paris, 1987, pages xx+691.
- [AF89] J.-M. ARNAUDIÈS et H. FRAYSSE. *Cours de mathématiques. 3 : Compléments d'analyse*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.07 ARN, 4 ième étage). Dunod, Paris, 1989, pages vi+522.
- [Bal91] M. BALABANE. *Théorie élémentaire des distributions. Application à l'équation de Laplace*. École Nationale des ponts et chaussées, 1991.
- [Bas11a] J. BASTIEN. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie*. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25. 2011. 180 pages.
- [Bas11b] J. BASTIEN. *Mathématiques : Applications*. Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31. 2011. 158 pages.
- [Bas11c] J. BASTIEN. *Résistance des Matériaux, Introduction au calcul des structures*. Notes de cours de l'UV MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MQ41. 2011. 251 pages.
- [Bas14] J. BASTIEN. *Vérité mathématique : paradoxe, preuve et conventions. Se méfier de ses réflexes et de ses habitudes*. Transparents de l'UE Zététique de l'INSA de Lyon. 2014. 80 pages.
- [Bas15] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf. 2015. 73 pages.
- [Bas18a] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 93 pages.
- [Bas18b] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 190 pages.
- [Bas18c] J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2018. 73 pages.
- [Bas19] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2019. 107 pages.
- [BBL12] J. BASTIEN, F. BERNARDIN et C.-H. LAMARQUE. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques. Applications aux modèles avec frottement ou impact*. Collection Mécanique des structures. Ouvrage traduit en anglais (voir [BBL13]). Voir <http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html> Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol). Hermès Science Publications/Lavoisier, 2012. 532 pages.
- [BBL13] J. BASTIEN, F. BERNARDIN et C.-H. LAMARQUE. *Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems. Applications to Models with Friction or Impact*. Mechanical Engineering and Solid Mechanics Series. Traduction en anglais de [BBL12]. Voir <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1848215258.html>. Wiley-ISTE, 2013. 512 pages.
- [BC04] J. BASTIEN et D. CHAMORET. *Mathématiques : Applications*. Travaux Dirigés de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31. 2004. 47 pages.
- [BC18] M. BOUSQUET et M.-L. CUZACQ. *Magazine Questions Clés Sciences ; 100 théories scientifiques expliquées en un clin d'œil !* Tome 23. Paris : ÉSI, 18 août 2018.
- [BC93] P. BENOIST-GUEUTAL et M. COURBAGE. *Mathématiques pour la physique. Tomes 1 et 2*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 BEN, 4 ième étage). Eyrolles, 1993.
- [BCL01] J.-M. BONY, G. CHOQUET et G. LEBEAU. "Le centenaire de l'intégrale de Lebesgue". In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332.2 (2001). https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cuerva/Lebesgue-CRAS.pdf, pages 85–90. DOI : 10.1016/S0764-4442(00)01829-2.
- [Bie18] H. BIESHEUVEL. *Mécanique des fluides*. Cours de quatrième année, département Mécanique. Polytech Lyon, 2018.

- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [Boc96] N. BOCCARA. *Fonctions analytiques*. ellipses, 1996.
- [Boc97] N. BOCCARA. *Distributions*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.72 BOC, 4 ième étage). ellipses, 1997.
- [Bod12a] A. BODIN. *Exercices - La règle et le compas. Éléments de géométrie*. http://math.univ-lille1.fr/~bodin/geometrie/exo_compas.pdf. Voir <http://math.univ-lille1.fr/~bodin/>. Université Lille 1, 2012.
- [Bod12b] A. BODIN. *La règle et le compas. Éléments de géométrie*. http://math.univ-lille1.fr/~bodin/geometrie/ch_compas.pdf. Voir <http://math.univ-lille1.fr/~bodin/>. Université Lille 1, 2012.
- [BR] V. BORRELLI et J.-L. RULLIÈRE. *En cheminant avec Kakeya*. disponible sur le web : <http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Kakeya.html>.
- [Bre83] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. [Theory and applications]*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. 515.7 BRE. Paris : Masson, 1983, pages xiv+234.
- [Buc92] H. BUCHWALTER. *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 BUC, 4 ième étage). Ellipses, 1992.
- [Car84] J.-C. CARREGA. *Théorie des corps. La règle et le compas*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4 ième étage). Paris : Hermann, 1984.
- [Cha75] R. CHAMBON. "Application de la méthode des éléments finis et d'une loi rhéologique incrémentale aux calculs de mécanique des sols". Thèse de doctorat. Université de Grenoble, 1975.
- [Ciu] I. S. CIUPERCA. *Méthodes mathématiques pour l'ingénieur 2*. <http://math.univ-lyon1.fr/~ciuperca/cours-mmi2.pdf>.
- [DD84] J. DESRUES et B. DUTHILLEUL. "Mesure du champ de déformation d'un objet plan par la méthode stéréophotogramétrique de faux relief". In : *Journal de Mécanique théorique et appliquée* 3.1 (1984), pages 79–103.
- [Den09] A. DENÈLE. "Modélisation, L'omniscience du futur". In : *Science & Vie, Hors Série* 297 (2021-09), pages 88–91.
- [Dol90] P. DOLBEAULT. *Analyse complexe*. Collection Maîtrise de Mathématiques Pures. [Collection of Pure Mathematics for the Master's Degree]. http://carlossicoli.free.fr/D/Dolbeault_P.-Analyse_complexe.pdf. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 DOL, 4 ième étage). Paris : Masson, 1990, pages viii+242.
- [Duv90] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 DUV, 4 ième étage). Masson, 1990.
- [EG99] H.-D. EBBINGHAUS et F. GUÉNARD. *Les nombres : leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles*. Traduction de Zahlen. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 0.8, niveau -1). Paris : Vuibert, 1999.
- [Fre03] D. FREDON. *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur. aide-mémoire*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519 FRE, 4 ième étage). Dunod, 2003.
- [Gir04] A. GIROUX. *Analyse complexe. Notes de cours*. <http://www.dms.umontreal.ca/~giroux/documents/analyseC00.pdf>. Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal., 2004.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête : Analyse*. Ellipses, 2020.
- [GS86] H. GIÉ et J.-P. SARMANT. *Mécanique, volume 2*. Paris : Technique et documentation (Lavoisier), 1986.
- [Gué+04] R. GUÉRIN, Y. PLUSQUELLEC, M. AGULLO et R. BOUDET. *Que savez-vous de l'outil mathématique ? : mathématiques à l'usage des mécaniciens. Fascicules 1 à 6. Math méca. À l'usage des élèves ingénieurs et des étudiants en mécanique*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 620.001 5 PLU, 5 ième étage). Cepaduès, 2004.
- [GW03] C. GASQUET et P. WITOMSKI. *Analyse de Fourier et applications. filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 GAS, 4 ième étage). Dunod, 2003.
- [Har10] J. HARTHONG. *Cours d'analyse*. <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00519301>. 2010.
- [Kar13] J. KARCZMARCZUK. *Chapitre 9 : les transformations conformes*. Notes de cours disponibles sur le web : <http://karczmarczuk.users.greyc.fr/TEACH/InfoGeo/Work/conform.pdf>. 2013.
- [Kib01] M. KIBLER. *Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie. avec 230 exemples et 230 exercices et problèmes*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 KIB, 4 ième étage). scientifiques GB, 2001.
- [Lam08] C.-H. LAMARQUE. "Cours d'Analyse". Cours de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État. 2008.
- [LH90] C. LEBOSSE et C. HÉMERY. *Géométrie. Classe de Mathématiques (1945)*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : MATHSI 795, niveau -1). Jacques Gabay, 1990.
- [LT09] Y. LEROYER et P. TESSON. *Mathématiques de l'ingénieur. rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519 LER, 4 ième étage). Dunod, 2009.

- [Mal82] P. MALLIAVIN. *Intégration et probabilités. Analyse de Fourier et analyse spectrale*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 515.4 MAL, niveau 0). Paris : Masson, 1982, page 200.
- [Pab95] J.-F. PABION. *Éléments d'analyse complexe. Licence de mathématiques*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.9 PAB, 4 ième étage). Ellipses-Marketing, 1995.
- [Pet98] R. PETIT. *L'outil mathématique pour la physique*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 PET, 4 ième étage). Dunod, 1998.
- [RDO79] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 2. Algèbre et applications à la géométrie*. Masson, Paris, 1979, pages viii+297.
- [RDO87] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. 4. Séries et équations différentielles*. 2^e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 RAM, 4 ième étage). Paris : Masson, 1987, pages VIII+314.
- [RDO88] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse*. 2^e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4 ième étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.
- [RDO93] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 1 ième étage). Masson, Paris, 1993, pages viii+440.
- [Roy05] P. ROYIS. *Mécanique des milieux continus. cours, exercices et problèmes*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 ROY, 4 ième étage). Presses universitaires de Lyon, 2005.
- [Roy86] P. ROYIS. "Formulation mathématique de lois de comportement, modélisation numérique de problèmes aux limites en mécanique des solides déformables". Thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Grenoble, 1986.
- [RT92] P.-A. RAVIART et J.-M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 518.6 RAV, 4 ième étage). Paris : Masson, 1992.
- [Rud92] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. 6^e édition. Traduit de l'américain par N. Dhombres et F. Hoffman. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.07 RUD, 4 ième étage). Paris : Masson, 1992.
- [Sai08] J. SAINT-RAYMOND. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*. disponible sous forme de polycopié de cours à l'url <https://webusers.imj-prg.fr/~jean.saint-raymond/preprints/polycop.pdf>. Calvage & Mounet, 2008.
- [Sal11] K. SALEH. *Introduction à la méthode des éléments finis*. http://math.univ-lyon1.fr/~saleh/Docs/MEF/CoursUFE_KhaledSaleh.pdf. Cours d'introduction à la méthode des éléments finis destiné aux étudiants de troisième année de la Faculté d'ingénierie de l'Université Française d'Egypte. 2011.
- [Sch45] L. SCHWARTZ. "Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques". In : *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)* 21 (1945). http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AUG/AUG_1945__21_/AUG_1945__21__57_0/AUG_1945__21__57_0.pdf, pages 57–74.
- [Sch66] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 46 SCHWARTZ, niveau -1). Paris : Hermann, 1966, pages xiii+420.
- [Sko91] M. SKODA. *Fonctions analytiques*. Cours de la Licence. Université Paris VI, 1991.
- [Tos] N. TOSEL. *Rampes et théorèmes taubériens*. Revue de Mathématiques Spéciales 128-4.
- [Vél00] J. VÉLU. *Mathématiques générales : cours et exercices corrigés*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 VEL, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2000.
- [ZQ13] C. ZUILY et H. QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.