Mécanique 4A OMI3 Automne 2019

Examen du 22 Novembre 2019

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

(1) Rappeler d'où vient le résultat (2.30) du cours, rappelé ici :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad e^{x+iy} = e^x \left(\cos y + i \sin y\right). \tag{1}$$

(2) En utilisant cette définition, déterminer les dérivées partielles de f définie par $f(z) = f(x,y) = e^{x+iy}$ et retrouver ainsi la dérivée de f.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2.

(1) On rappelle que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \tag{2a}$$

et que formellement

$$i = \sqrt{-1}. \tag{2b}$$

On écrit donc successivement

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i \times i = i^2 = -1$$

et donc

$$\boxed{1 = -1.}$$

Où est la faute commise ?

(2) (a) Montrer que l'application $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de la partie Q de $\mathbb{C}$ définie par

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[\right\} \tag{3}$$

sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(b) Montrer que si l'on pose

$$\widetilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \right\}, \tag{4}$$

alors f_n est une bijection de $\widetilde{Q}$ sur $\mathbb{C}$.

(c) En déduire qu'il est légitime de noter $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et que l'on a

$$\forall z \in Q, \quad \forall \zeta \in U, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

et

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \tag{6}$$

(d) Retrouver la définition de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(3) (a) (i) Dans le cas où $n = 2$, écrire, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions z de l'équation

$$z^2 = \zeta \tag{7}$$

en fonction de $\sqrt[2]{\zeta}$, noté comme dans le cas réel, $\sqrt{\zeta}$, et commenter.

(ii) Calculer, de deux façons différentes, $\sqrt{1+i}$.

(b) Généraliser au cas $n \geq 2$ quelconque les résultats de la question (3(a)i) et commenter.

(4) Montrer que $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, avec la définition de la question 2c coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$, à condition d'étendre le logarithme complexe à $\mathbb{R}_-^*$ (voir remarque 2.30 page 23 et 2.37 page 27.)

(5) Lever alors le paradoxe de la question 1

Exercice 3.
Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

Exercice 4.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$) telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1. \tag{8}$$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels positifs tendant vers l'infini. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \lambda_n f(\lambda_n(x-a)), \tag{9}$$

(1) Montrer que pour tout n, f_n appartient à $L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$).

(2) Déterminer la limite de la distribution-fonction f_n dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 5.
Considérons E, la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$.

(1) Exprimer $E(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a

$$E' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`