Mécanique 4A OMI3 Automne 2019

Examen du 27 Novembre 2019

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

(1) Rappeler d'où vient le résultat (2.30) du cours, rappelé ici :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1}$$

(2) En utilisant cette définition, déterminer les dérivées partielles de f définie par $f(z) = f(x, y) = e^{x+iy}$ et retrouver ainsi la dérivée de f.

(3) *Question facultative*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, déterminer

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(z + H) - f(z)}{H},$$

et en déduire la dérivée de f.

Indication

On posera $H = (h, k)$ où h et k sont réels et on écrira

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = (f(x + h, y + k) - f(x, y + k)) + (f(x, y + k) - f(x, y)).$$

Exercice 2.

On donne les résultats suivants, admis pour cet exercice :

Proposition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2. Si l'on pose*

$$\widetilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \right\}, \tag{2}$$

alors $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de $\widetilde{Q}$ sur $\mathbb{C}$. On note alors $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et on a

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Enfin, $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$, coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha = 1/n$ (voir équation (2.56)), à condition d'étendre le logarithme complexe à $\mathbb{R}_-^*$ (voir remarque 2.30 page 23 et 2.37 page 27.)

$\diamondsuit$
L'énoncé de l'exercice est le suivant :

(1) Rappeler la définition du sinus complexe.

(2) (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, montrer que l'équation (en ξ)

$$\sin \xi = z. \tag{4}$$

est équivalente à l'équation du second degré suivante (en Z) :

$$Z^2 - 2izZ - 1 = 0, \tag{5}$$

où

$$Z = e^{i\xi}. \tag{6}$$

(b) Montrer que les deux racines de l'équation (5) ont données par

$$Z = iz \pm \sqrt{1 - z^2}, \tag{7}$$

où la racine complexe est définie par la proposition 1 pour $n = 2$.

(c) En déduire que l'on peut poser

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \tag{8}$$

et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\arcsin(z)) = z. \tag{9}$$

(3) Calculer

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e + \frac{1}{e}\right) + \left(e - \frac{1}{e}\right) i\right)\right).$$

(4) Montrer que, si pour tout z tel que $1 - z^2$ et que $iz + \sqrt{1 - z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors arcsin est dérivable (au sens de $\mathbb{C}$) en z et que

$$(\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \tag{10}$$

Les questions suivantes sont facultatives

(5) (a) Simplifier l'expression de $\arcsin(z)$ si z est un réel.

(b) Que retrouve-t-on dans le cas de $\arcsin(z)$ si z est un réel dans l'intervalle $[-1, 1]$?

(6) (a) Comment définiriez-vous $\arccos(z)$ pour z complexe ?

(b) En admettant que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[), \quad (\arccos(z))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \tag{11}$$

montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) + \arccos(z) = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Exercice 3.

(1) Calculer l'intégrale

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

(2) On pose

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

(a) Montrer que

$$J = \frac{1}{2}(I - K),$$

où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

(b) On donne

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

En déduire la valeur de J.

Exercice 4.
Soit g, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (xg)\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = g. \tag{13}$$

Exercice 5.

(1) Soit f une fonction continue. On considère le résultat suivant "Montrer que $n \int_0^1 t^n f(t)dt$ tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini. "

En faisant le changement de variable $u = n(1-t)$, retrouver ce résultat.

(2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \begin{cases} nt^n, & \text{si t} \in [0,1], \\ 0, & \text{si t} \notin [0,1]. \end{cases}$$

Que peut on déduire sur la limite de la distribution définie par g_n quand n tend vers l'infini ?

(3) Peut-on retrouver directement le résultat de la question 1 sans faire de changement de variable ?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`