Mécanique 4A OMI3 Automne 2015

Examen du 26 Novembre 2015

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Calculer les logarithmes complexes des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z &= 1+i, \\ z &= 1, \\ z &= 1-i, \\ z &= -1+\varepsilon i, \text{ où } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \\ z &= -1-\varepsilon i, \text{ où } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \\ z &= -1+i, \\ z &= -1-i. \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) On considère l'intégrale complexe suivante :

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} \tag{1}$$

où γ est le segment $[1, 1+i]$.

(a) En considérant un paramétrage simple de ce segment, exprimer I en fonction de

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{dt}{1+it} \tag{2}$$

(b) Calculer les primitives des parties réelles et imaginaires de $\mathcal{I}$ et en déduire que

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{i\pi}{4}. \tag{3}$$

(c) Retrouver ce résultat plus rapidement, en utilisant une primitive de $1/z$.

(2) Refaire rapidement tous les calculs de la question 1 en considérant cette fois-ci le segment $[1-i, 1+i]$.

(3) (a) On admet qu'en faisant des calculs identiques à ceux de la question 1a-1b, sur le segment $[-1-i, -1+i]$, on aurait cette fois-ci :

$$I = \int_{[-1-i,-1+i]} \frac{dz}{z} = i \int_{-1}^{1} \frac{1}{-1+it} dt = -\frac{i\pi}{2}. \tag{4}$$

Montrer qu'en utilisant la méthode de la question 1c, on ne tombe plus sur ce résultat !

(b) *Question facultative*

Pourquoi ?

(c) *Question facultative*

Comment remédier à cela pour retrouver le résultat (4) en utilisant une primitive de $1/z$?

Exercice 3.

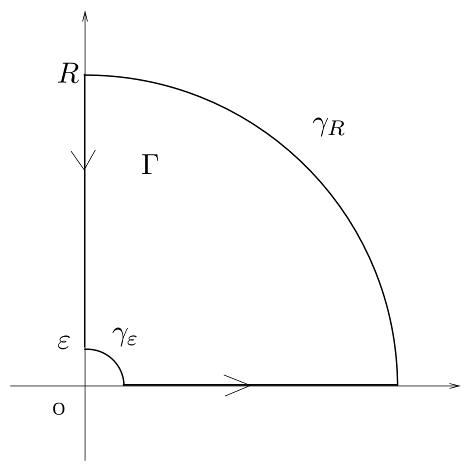

FIGURE 1. Le chemin Γ considéré.

Pour ε et R deux réels tels que $0 < \varepsilon < R$, on considère le chemin fermé Γ constitué des deux arcs de cercles de centre l'origine O et de rayons respectifs ε et R (notés respectivement γ_ε et γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure 1. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \tag{5}$$

(1) Paramétrer correctement les deux cercles et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t} dt. \tag{6}$$

(2) (a) Montrer que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i \int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \tag{7}$$

(b) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{8}$$

(c) En déduire que

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi}{2R} \tag{9}$$

puis que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{10}$$

(3) On admet (comme (7)) que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -i \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \tag{11}$$

(a) À $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, quelle est la limite de de $e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ quand ε tend vers zéro par valeur strictement positive.

(b) Est-ce une condition suffisante pour assurer que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} -i \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = -\frac{i\pi}{2}\,? \tag{12}$$

On admettra néanmoins ce résultat.

(4) Que vaut $\int_\Gamma f(z)dz$?

(5) Conclure et montrer que que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0, \tag{13a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{13b}$$

Exercice 4.

(1) Quelle est la dérivée, au sens des distributions sur $\mathbb{R}$, de la fonction $x \mapsto |x|$?

(2) Faisons un peu de mécanique et rappelons la loi de frottement de Coulomb : si deux solides sont en contact, l'action $\vec{R}$ de l'un sur l'autre est dans un cône ; de plus, si la vitesse relative est nulle, $\vec{R}$ est à l'intérieur de ce cône et si la vitesse (tangentielle) relative est non nulle, la composante tangentielle de cette force est opposée à cette vitesse tangentielle. Dans le cas où l'on étudie le mouvement d'un point matériel sur un axe, d'abscisse $x(t)$ et soumis à ensemble de force (le long de cet axe) $F(t)$ et à une force de frottement $r(t)$ due au sol, on a, en supposant les forces normales constantes,

$$r(t) = -\alpha \mathrm{signe}\left(\dot{x}(t)\right), \tag{14}$$

où α est une constante. Cette expression est valable tant que la vitesse $\dot{x}(t)$ est non nulle.

En remarquant que signe$(y) = |y|'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on peut donc écrire :

$$r(t) = -\alpha \left|(\dot{x}(t)|\right)'. \tag{15}$$

Quel sens pourrait-on donner à (14) et donc à l'expression de la force $r(t)$ quand $\dot{x}(t) = 0$?

Exercice 5.
L'objet de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle au sens des distributions suivante : on cherche une distribution T telle que

$$T'' + aT + bT' = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{16}$$

où α et β sont deux réels et δ et δ' sont les distributions de Dirac et sa dérivée en zéro.

(1) On considère le cas particulier $\beta = 0$ et α quelconque.

- (a) Résoudre (16) dans ce cas.
- (b) À quel contexte mécanique est associé cette équation différentielle ?
- (c) La distribution T obtenue correspond-elle à une fonction ?

(2) On considère maintenant le cas général α et β quelconques.

- (a) Résoudre (16) en cherchant une solution sous la forme d'une distribution-fonction x, définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera σ et σ', les sauts de la fonction x et de sa dérivée en zéro :

$$\sigma = x_0 = x(0+0), \tag{17a}$$

$$\sigma' = x_0' = x'(0+0). \tag{17b}$$

- (b) La distribution-fonction obtenue est-elle continue, dérivable en zéro ?
- (c) À quel contexte mécanique pourrait être associé cette équation différentielle ?
- (d) Pourriez-vous donner un exemple de distribution associé à δ' ? On pourra chercher le résultat sous forme de limite.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`