Mécanique 4A OMI3 Automne 2016

Examen du 28 Novembre 2016

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

(1) (a) Rappeler la définition de z^α pour z et α complexes.
(b) Pourquoi cette définition n'est pas valable pour z dans $\mathbb{R}_-$?

(2) Quelle est la définition usuelle de z^n pour n entier et z complexe. Cette définition est-elle valable pour z dans $\mathbb{R}_-$?

(3) Montrer que les deux définitions coïncident finalement, en montrant le passage de l'une à l'autre.

Exercice 2.

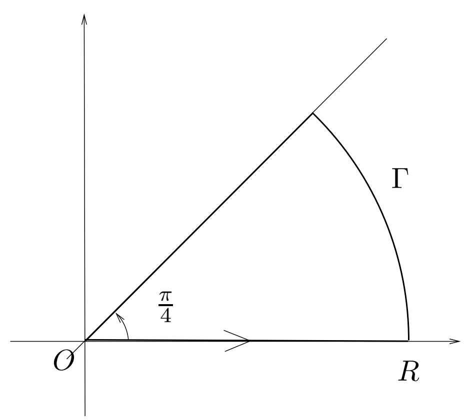

FIGURE 1. Le chemin Γ_T considéré.

Pour$R$ un réel strictement positif, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et d'angle $\pi/4$, noté Γ_R et de deux segments comme le montre la figure 1. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = e^{-(z^2)}, \tag{1}$$

notée e^{-z^2} pour simplifier.

(1) Paramétrer correctement l'arc de cercle Γ_R et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi}d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt. \tag{2}$$

(2) (a) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall\psi \in [0, \pi/2], \quad \sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi. \tag{3}$$

(b) En déduire que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi}d\phi\right| \leq \frac{\pi}{2R^2}. \tag{4}$$

(3) On admet que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5}$$

En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \tag{6a}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \tag{6b}$$

Exercice 3.

Considérons la fonction de deux variables

$$R(X,Y) = \frac{1}{Y-2}.$$

(1) Montrer que cette fonction satisfait les hypothèses de la proposition 5.1 du cours et en déduire l'expression de l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin t - 2}dt,$$

sous la forme d'une somme de résidus, d'une fonction convenablement choisie.

(2) Calculer cette somme et conclure.

(3) *Question facultative*

Comment auriez-vous fait pour calculer l'intégrale I sans théorème des résidus ?

Exercice 4.

On considère la suite de fonctions définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = ne^{-n^2x^2}. \tag{7}$$

(1) Étudier la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

(2) Étudier la limite la suite de distributions-fonctions (f_n) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Exercice 5.

Considérons E, la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$.

(1) Exprimer $E(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a

$$E' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`