

Examen du 20 Novembre 2017

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Pour chacune des assertions suivantes, écrire si elle est vraie ou fausse, en la justifiant rapidement si elle est vraie et en donnant un contre exemple si elle est fausse.

- (1) Si une fonction est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, elle y est continue.
- (2) Si une fonction vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en $z_0 \in \mathbb{C}$, elle y est $\mathbb{C}$ -dérivable.
- (3) La fonction $z \mapsto 1/(1+z^2)$ possède un pôle en $\pm i$ et ses résidus y valent respectivement $1/(\pm 2i)$.
- (4) La fonction $z \mapsto \text{Ln}(1/2 + z^2)/(1 + z^2)$ possède un pôle en $\pm i$ et ses résidus y valent respectivement $\text{Ln}(-1/2)/(\pm 2i)$.
- (5) Si a n'appartient pas à Ω , δ_a est nul dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
- (6) Le dirac δ est une fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$ et d'intégrale nulle.
- (7) Si une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ n'est pas une fonction.

Exercice 2.

- (1) À partir de l'inégalité triangulaire rappelée ici :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

montrer que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z - z'| \geq ||z| - |z'|||. \quad (1)$$

- (2) Pour toute la suite, c est un réel strictement positif. Dédurre de ce qui précède que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |1 + cz^2| = +\infty. \quad (2)$$

- (3) (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\text{Ln}(1 + cz^2)$ est défini

$$|\text{Ln}(1 + cz^2)| \leq |\ln |1 + cz^2|| + \pi. \quad (3)$$

(b) Dédurre de ce qui précède que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \text{Ln}(1+cz^2) \text{ défini}}} \frac{\text{Ln}(1+cz^2)}{|z|} = 0. \quad (4)$$

Exercice 3.

On cherche à déterminer la valeur de

$$J(a, b) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+bt^2)}{a^2+t^2} dt, \quad (5)$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

(1) Montrer que J est définie pour tout $a > 0$ et $b > 0$. On admettra pour toute la suite que J est définie et continue pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

(2) En faisant un changement de variable, montrer que si $a \neq 0$,

$$\forall b \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad J(a, b) = \frac{1}{a} I(ba^2), \quad (6)$$

où

$$\forall c \geq 0, \quad I(c) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+ct^2)}{1+t^2} dt. \quad (7)$$

(3) On veut maintenant calculer l'intégrale $I(c)$ de (7) grâce au théorème des résidus.

(a) Soit $c > 0$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\text{Ln}(1+cz^2)}{1+z^2}. \quad (8)$$

(i) Quels sont les zéros de $z \mapsto 1+z^2$?

(ii) Montrer que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{avec } \text{Ln}(1+cz^2) \text{ défini}}} |zf(z)| = 0. \quad (9)$$

On pourra utiliser l'exercice 2.

(iii) On tient le raisonnement suivant : puisque (9) est vérifiée, la proposition 5.9 page 54 du cours implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2i\pi \text{ Rés}(f, i). \quad (10)$$

(A) Déterminer la valeur de $\text{Rés}(f, i)$, puis déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$

(B) La valeur obtenue est absurde et ce raisonnement est erroné ! Pourquoi ?

(iv) Le raisonnement de la question 3(a)iii n'étant pas valable, on calcule maintenant proprement la valeur de l'intégrale recherchée !

(A) Montrer que f est holomorphe sur l'ouvert

$$W = \mathbb{C} \setminus (V \cup \{i, -i\}), \quad (11)$$

où

$$V = \{z \in \mathbb{C}, \quad \exists t \in [1/\sqrt{c}, +\infty[, z = \pm it\}. \quad (12)$$

(B)

Pour toute la suite, on suppose que

$$0 < c < 1, \quad (13)$$

et on considère, à $\varepsilon > 0$, assez petit, et $R > 0$, assez grand, le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ défini sur

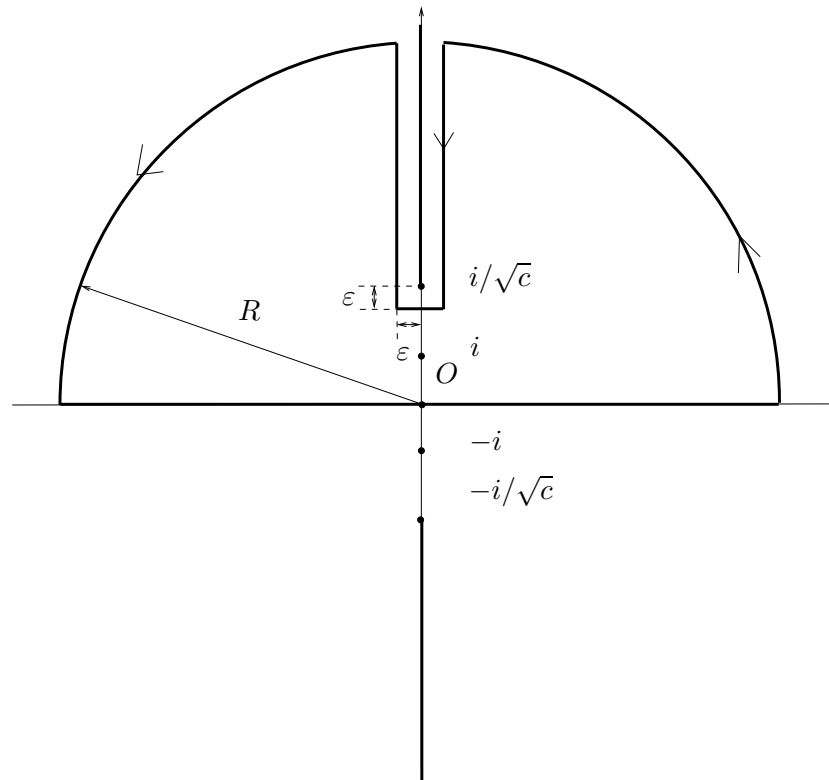


FIGURE 1. Le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ utilisé.

la figure 1. Montrer que ce chemin est inclus dans l'ouvert W .

(C) Quel est le résultat de la proposition 3.33 page 38 du cours ici ?

(D) Qu'entraîne-t-il si on fait tendre ε vers zéro et R vers l'infini ?

(b) Est-ce que les résultats établis sont valides pour $c = 0$ et $c = 1$? Quelle sont les valeurs de $I(0)$ et $I(1)$?

(c) Quelle est la valeur de $J(a,b)$ pour $a, b \geq 0$ vérifiant $0 \leq ba^2 \leq 1$?

Exercice 4.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et F une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation différentielle

$$Y' + fY = F \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (14)$$

par une méthode alternative à celle du cours. On considère α une primitive de f .

- (1) Montrer que $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de (14) ssi $S = e^{\alpha(t)}Y$ vérifie

$$S' = e^{\alpha(t)}F \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (15)$$

- (2) Pour toute la suite, on suppose que $f(t) = a$.

- (a) Traiter le cas particulier $F = \delta$ et montrer que l'on retrouve Y la réponse impulsionnelle déterminée en section section 7.5.1.1 page 102 du cours.
- (b) Traiter le cas particulier F quelconque dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ montrer que l'on retrouve la solution Y déterminée en section section 7.5.1.2 page 104 du cours.
- (c) Traiter le cas particulier F distribution-fonction, nulle sur $]-\infty, 0[$: déterminer la distribution-fonction Y , supposée nulle sur $]-\infty, 0[$ et montrer que l'on retrouve la solution Y déterminée en section section 7.5.1.3 page 105 du cours.

Exercice 5.

Dans cet exercice, on cherche à construire les primitives d'une distributions T donnée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ où $\Omega =]a, b[$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les distributions S telles que $S' = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

- (1) Déterminer une primitive de δ et une primitive d'une distribution-fonction f .
- (2) On pourrait, de façon générale, penser à la définition suivante : si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle S, \phi \rangle = -\langle T, \psi \rangle, \text{ où } \psi \text{ est une primitive de } \phi, \quad (16)$$

de telle sorte que $S' = T$ puisque

$$\langle S', \psi \rangle = -\langle S, \psi' \rangle = -\langle S, \phi \rangle = \langle T, \psi \rangle. \quad (17)$$

Pourquoi cela n'est-t-il pas correct ?

- (3) Dans cette question plus difficile, on pourra admettre des résultats et les utiliser pour la suite.
On définit l'ensemble H par

$$H = \{ \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \exists \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \psi' = \phi \}. \quad (18)$$

dont on admet que c'est sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$ caractérisé par

$$\phi \in H \iff \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \int_a^b \phi(t)dt = 0. \quad (19)$$

On admet aussi qu'il existe $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \phi_0 = 1$.

- (a) Montrer que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe un unique $(\lambda_{\phi}, u_{\phi}) \in \mathbb{R} \times H$ tel que

$$\phi = \lambda_{\phi}\phi_0 + u_{\phi}, \quad (20)$$

- (b) Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit ψ_{ϕ} par

$$\forall x \in \Omega, \quad \psi_{\phi}(x) = \int_a^x u_{\phi}(t)dt. \quad (21)$$

Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si on définit S_0 par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle S_0, \phi \rangle = -\langle T, \psi_{\phi} \rangle, \quad (22)$$

alors S_0 est correctement définie et est une primitive de T .

On admettra que toutes les primitives de T diffèrent de S_0 d'une constante.

(4) Déterminer *toutes* les primitives des distributions de la question 1.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>