POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Mécanique 4A OMI3 Automne 2018

Examen du 23 Novembre 2018

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

Pour chacune des assertions suivantes, écrire si elle est vrai ou fausse, en la justifiant rapidement si elle est vraie et en donnant un contre exemple si elle est fausse.

(1) Si une fonction est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, elle y est continue.

(2) Si une fonction est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, elle y vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.

(3) La fonction $z \mapsto 1/(z^3 - 1)$ possède un pôle en 1, j et j^2 (j est la racine troisième de l'unité) et ses résidus y valent respectivement $1/3$, $1/(3j^2)$ et $1/(3j)$.

(4) Si une fonction est continuement dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une fonction.

(5) La valeur principale de $1/x$, notée $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Voici le corrigé d'un petit exercice. Retrouvez-en l'énoncé.

Cet exercice est très proche de l'exercice de TD 3.6 !

Il suffisait d'utiliser la proposition 3.16 page 31 du cours puisque la fonction f, admet une primitive, holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour intégrer la fonction f, il fallait remplacer $\cos(z)$ grâce à sa définition (voir proposition 2.24 page 20 du cours) et écrire

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

dont on déduit alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} e^{iz} \left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2iz} + 1\right). \end{aligned}$$

On intègre alors et il vient

$$F(z) = \frac{1}{2 \times (2i)} e^{2iz} + \frac{1}{2} z,$$

et donc

$$F(z) = -\frac{i}{4} e^{2iz} + \frac{1}{2} z,$$

D'après la proposition 3.16 page 31 du cours, il vient

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(B) - F(A).$$

On a compte tenu des valeurs de A et de B :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{i}{4}e^{2i(3+2i)} + \frac{1}{2}(3+2i) + \frac{i}{4}e^{2i(1+i)} - \frac{1}{2}(1+i), \\ &= -\frac{i}{4}\left(e^{-4+6i} - e^{-2+2i}\right) + \frac{1}{2}(2+i), \\ &= -\frac{i}{4}\left(e^{-4}\cos(6) + ie^{-4}\sin(6) - e^{-2}\cos(2) - ie^{-2}\sin(2)\right) + \frac{1}{2}(2+i), \end{aligned}$$

et donc

$$I = \frac{1}{4}\left(-e^{-4}\sin(6) + e^{-2}\sin(2) + i\left(-ie^{-4}\cos(6) + e^{-2}\cos(2)\right)\right) + 1 + \frac{i}{2}.$$

Exercice 3.

(1) Quelle est la primitive de $z \mapsto 1/z^2$ (au sens complexe) ?

(2) En déduire

$$\mathcal{I} = \int_S \frac{dz}{z^2}, \tag{1}$$

où $y > 0$ et S est le segment d'extrémités $z_1 = iy$ et $z_2 = 1 + iy$.

(3) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{2}$$

(4) Déduire des questions précédentes, la valeur de $F(y)$ donnée par

$$\forall y > 0, \quad F(y) = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx, \tag{3}$$

(5) *Question facultative*

Pourriez-vous établir le résultat de la question 4, à la main, sans utiliser le calcul complexe.

Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par

$$T_n = \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta'. \tag{4}$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite numérique (a_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \langle T_n, \phi \rangle, \tag{5}$$

tend vers zéro.

(b) En déduire que la suite de distribution T_n tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) (a) Montrer pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\langle T_n, \phi \rangle| \leq \frac{M}{n^2}. \tag{6}$$

(b) En déduire que la série numérique de terme général a_n converge.

(c) En déduire que la série de distribution de terme général T_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1. \tag{7}$$

(1) Soit f_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nf(nx), \tag{8}$$

Rappeler la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) Si on suppose de plus que f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, quelle est la limite de $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

(3) (a) On suppose que f est définie comme la fonction porte[1] $f = \Pi$. Que donne le résultat de la question 2 ?

(b) On suppose que f est définie comme la fonction affine par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, égale à 1 en 0. Que donne le résultat de la question 2 ?

(c) On suppose que f est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{10}$$

et on admet que (7) est vérifiée. Calculer f_n' est la tracer sommairement.

(4) *Question facultative*

Dans le cas où f est donnée par (10) proposer un calcul par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de $(f_n^{(k)})$.

Exercice 6.
On veut démontrer dans cet exercice que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n} = i(2\pi H - x - \pi), \text{ dans } \mathcal{D}'(]-1,1[). \tag{11}$$

(1) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n} = i\,(2\pi H - x) + C, \text{ dans } \mathcal{D}'(]-1,1[). \tag{12}$$

(2) (a) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \text{ dans } \mathcal{D}'\left(]-1,1[\right). \tag{13}$$

(b) Montrer que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(]-1,1[\right), \quad \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\phi(x)dx. \tag{14}$$

---

1. dont on rappelle l'expression

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & \text{si } t \notin [-1/2, 1/2]. \end{cases} \tag{9}$$

et

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(]-1,1[\right), \quad \left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}\right) \phi(x) dx. \tag{15}$$

(c) Que peut-on en déduire en choisissant une fonction ϕ paire ?

(d) Conclure sur la valeur de C en supposant que $\int_0^{+\infty} \phi(x)dx \neq 0$.

(3) *Question facultative*

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x+\pi}{2} \text{ dans } \mathcal{D}'\left(]-1,1[\right). \tag{16}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`