Mécanique 4A OMI3 Automne 2020

Examen du 12 Janvier 2021

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Attention, seront à traiter, si possible :

— l'exercice 1 ;
— *au choix*, l'exercice 2 *ou* l'exercice 3 ; le premier (exercice 2), plus facile, est un cas particulier du second (exercice 3), plus difficile ;
— l'exercice 4 ;
— l'exercice 5.

Exercice 1.

(1) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines de l'équation

$$z^4 + 1 = 0,$$

et représentez-les si possible dans le plan complexe.

(2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines de l'équation

$$z^p + 1 = 0,$$

et représentez-les si possible dans le plan complexe.

Exercice 2.

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \tag{1}$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les dans le plan complexe.

(2) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.8 page 56 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \quad ? \tag{2}$$

(3)

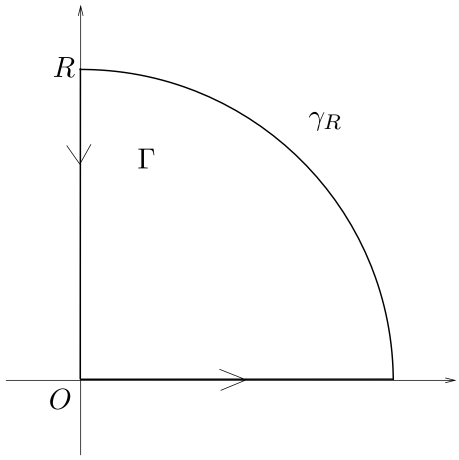

FIGURE 1. Le chemin Γ considéré.

Pour $R > 0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure 1.

(a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ fixé ?

(b) Conclure sur la valeur de l'intégrale donnée par (2), en faisant tendre R vers l'infini. On *admettra* que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{3}$$

(4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (2) à la main ?

Exercice 3.

(1) Soient p et q deux entiers vérifiant

$$p \geq q+2, \tag{4a}$$
$$q \geq 0. \tag{4b}$$

On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^q}{1+z^p}. \tag{5}$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les si possible dans le plan complexe.

(2) Pourquoi, de façon générale, ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.7 p. 55 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx \quad ? \tag{6}$$

(3)

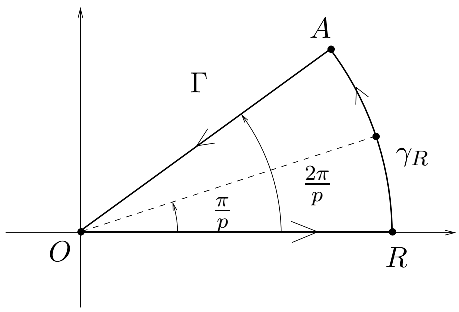

FIGURE 2. Le chemin Γ considéré.

Pour $R > 0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments, le premier est $[O, R]$, inclus sur l'axe des x, le second est $[AO]$, où A est le point de module R est d'argument $\frac{2\pi}{p}$, comme montre la figure 2.

(a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ fixé ?

(b) Conclure sur la valeur de l'intégrale J donnée par (6), en faisant tendre R vers l'infini. On *admettra* que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \tag{7}$$

(c) Quelle est la valeur de J pour $q = 0$ et $p = 3$?

(d) Quelle est la valeur de J pour $q = 1$ et $p = 4$?

(4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (6) à la main ?

(5) *Question facultative*

(a) Les calculs de cet exercice sont-ils encore valables si on remplace p et q deux entiers vérifiant (4), par p entier et q réel vérifiant [1]

$$p > q+1, \tag{8a}$$
$$q \geq 0. \tag{8b}$$

1. *Attention*, le jour de l'examen, un petite erreur s'était glissée !

(b) Quelle est la valeur de

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^p}dx \quad ?$$

(6) *Question facultative*

(a) Les calculs de cet exercice sont-ils encore valables si on remplace p et q deux entiers vérifiant (4), par p entier et q réel vérifiant [2]

$$p>q+1, \tag{9a}$$

$$q>-1 \quad ? \tag{9b}$$

(b) Quelle est la valeur de

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^p)}dx \quad ?$$

Exercice 4.

(1) Montrer par récurrence sur n la formule de Leibniz suivante : Soient $n\in\mathbb{N}$ et deux fonctions ϕ et ψ n fois dérivables. On note $\phi^{(0)}=\phi$ et $\psi^{(0)}=\psi$. Alors $\phi\psi$ est n fois dérivable et

$$(\phi\psi)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi^{(k)}\psi^{(n-k)}.$$

(2) Montrer par récurrence sur n la formule de Leibniz suivante : Soient $n\in\mathbb{N}$, g une fonction indéfiniment dérivable et une distribution T. On note $g^{(0)}=g$ et $T^{(0)}=T$. Alors, au sens des distributions, on a,

$$(gT)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}T^{(n-k)}.$$

Exercice 5.

(1) Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta_a=0, \tag{10a}$$

$$(x-a)\delta'_a=-\delta_a. \tag{10b}$$

(2) (a) En dérivant (10b), montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta''_a=-2\delta'_a. \tag{11}$$

En dérivant (11), montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta'''_a=-3\delta''_a. \tag{12}$$

(b) Montrer par récurrence sur n que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad (x-a)\delta_a^{(n)}=-n\delta_a^{(n-1)}. \tag{13}$$

On rappelle que $T^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la distribution T.

(3) *Question facultative*

2. *Attention*, le jour de l'examen, un petite erreur s'était glissée !

(a) (i) Montrer la formule de Leibniz suivante : Soient $n \in \mathbb{N}$ et deux fonctions ϕ et ψ n fois dérivables. On note $\phi^{(0)} = \phi$ et $\psi^{(0)} = \psi$. Alors $\phi\psi$ est n fois dérivable et

$$(\phi\psi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n-k)}.$$

(ii) En déduire une preuve alternative de (13).

(b) (i) Montrer la formule de Leibniz suivante : Soient $n \in \mathbb{N}$, g une fonction indéfiniment dérivable et une distribution T. On note $g^{(0)} = g$ et $T^{(0)} = T$. Alors, au sens des distributions, on a,

$$(gT)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} T^{(n-k)}.$$

(ii) En déduire une autre preuve alternative de (13).

(c) Généraliser (13) en calculant dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

(i) $(x-a)^k \delta_a^{(n)}$ pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$;

(ii) $P\delta_a^{(n)}$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`