Mécanique 4A OMI3 Automne 2021

Examen du 10 Décembre 2021

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ☒

Exercice 1.

(1) Rappeler d'où vient le résultat (2.30) du cours, rappelé ici :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad e^{x+iy} = e^x \left(\cos y + i \sin y\right). \tag{1}$$

(2) En utilisant cette définition, déterminer les dérivées partielles de f définie par $f(z) = f(x,y) = e^{x+iy}$ et retrouver ainsi la dérivée de f.

(3) *Question facultative*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, déterminer

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(z+H) - f(z)}{H},$$

et en déduire la dérivée de f.

Indication

On posera $H = (h,k)$ où h et k sont réels et on écrira

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \left(f(x+h,y+k) - f(x,y+k)\right) + \left(f(x,y+k) - f(x,y)\right).$$

Exercice 2.

On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2} dx. \tag{2}$$

(1) On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{1+z^2}. \tag{3}$$

Montrer que pour tout complexe $z = \rho e^{i\theta}$, on a

$$|f(z)| = \frac{\rho e^{-\rho \sin\theta}}{|1+\rho^2 e^{2i\theta}|}. \tag{4}$$

(2) (a) On considère $\widetilde{\gamma}_R$ le demi cercle de centre l'origine de rayon R, inclus dans le demi-plan d'ordonnée positive, paramétré par $z = Re^{i\theta}$ où θ décrit $[0, \pi]$, En utilisant le lemme 3.10 du cours, et (4), montrer que

$$\left| \int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz \right| \leq \frac{R^2}{R^2 - 1} \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta. \tag{5}$$

(b) Montrer que, par symétrie,

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \tag{6}$$

(c) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{7}$$

(d) Déduire finalement de (5), (6) et (7) que

$$\left| \int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}, \tag{8a}$$

et que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz = 0. \tag{8b}$$

(3) Montrer enfin qu'en adaptant la preuve de la proposition 5.11 du cours, et en utilisant (8b), l'intégrale I existe et que

$$I = \pi \operatorname{Rés}(f, i). \tag{9}$$

(4) Déterminer I.

(5) (a) En choisissant $z = R$ avec R tendant vers l'infini, déduire de (4) que $|zf(z)|$ ne peut tendre vers zéro quand $|z|$ tend vers l'infini.

(b) En déduire qu'il n'est pas possible d'appliquer la proposition 5.11 du cours à la fonction f.

Exercice 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par

$$T_n = \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta'. \tag{10}$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite numérique (a_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \langle T_n, \phi \rangle, \tag{11}$$

tend vers zéro.

(b) En déduire que la suite de distribution T_n tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) (a) Montrer pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\langle T_n, \phi \rangle| \leq \frac{M}{n^2}. \tag{12}$$

(b) En déduire que la série numérique de terme général a_n converge.

(c) En déduire que la série de distribution de terme général T_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

(1) Soit f une fonction continue. On considère le résultat suivant "Montrer que $n\int_0^1 t^n f(t)dt$ tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini. "

En faisant le changement de variable $u = n(1-t)$, retrouver ce résultat.

(2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(t) = \begin{cases} nt^n, & \text{si t} \in [0,1], \\ 0, & \text{si t} \notin [0,1]. \end{cases}$$

Que peut on déduire sur la limite de la distribution définie par g_n quand n tend vers l'infini ?

(3) Peut-on retrouver directement le résultat de la question 1 sans faire de changement de variable ?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`