Mécanique 4A OMI3 Automne 2022

**Examen du 17 janvier 2023**

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés** : OUI ☒ NON ☐
*Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits*

**Calculatrice autorisée** : OUI ☒ NON ☐
*Tout type*

**Exercice 1.**
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\delta_a * \delta_b$.

**Exercice 2.**
On cherche à démontrer dans cet exercice la proposition 6.44 du cours dont l'énoncé est rappelé ici :

**Proposition 1** (Formules des sauts (nombre infinis))**.**
*Soit* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement croissante telle que*

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = +\infty. \tag{1}$$

*On supposera que* $a_0 \geq -\infty$*. On pose alors* $\Omega = ]a_0, +\infty[$*. Soit* $f$ *une fonction continûment dérivable sur chaque intervalle* $]a_i, a_{i+1}[$ *pour* $i \in \mathbb{N}$ *ayant en chaque* $a_i$ *pour* $i \in \mathbb{N}^*$*, une limite à droite et une limite à gauche. On note le saut de* $f$ *en* $a_i$*, pour* $i \in \mathbb{N}^*$*, la quantité définie par* $\sigma_{a_i} = f(a_i+0)-f(a_i-0)$
*On suppose de plus que*

$$f' \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{2}$$

*On note* $f'$*, la fonction définie par la dérivée usuelle de* $f$ *(sur chaque intervalle* $]a_i, a_{i+1}[$*). Alors, on a*

$$f \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{3}$$

*et*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T'_f = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{4}$$

*Si la suite* $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *est strictement croissante et vérifie* (1) *et les hypothèses précédentes*

$$\lim_{i\to-\infty} a_i = -\infty, \tag{5}$$

*l'équation* (4) *est remplacée par*

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T'_f = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{6}$$

*Début de l'énoncé :*
Sans perte de généralité et, pour simplifier, on supposera que $a_0 = -\infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction $f_n$ égale à $f$ sur $[-n + a_1, a_n]$ est nulle ailleurs.

(1) Montrer que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n+\to\infty} f_n = f.$$

(2) Montrer que la formule des sauts appliquée à la fonction $f_n$ fournit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{f_n} = f'_n + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} + f(-n + a_0)\delta_{-n+a_0} - f(a_n - 0)\delta_{a_n}. \tag{7}$$

(3) Conclure en passant à la limite quand $n$ tend vers l'infini. On prendra soin de bien détailler les différents passages à la limite.

**Exercice 3.**

(1) Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \mathcal{F}. \tag{8}$$

L'"inconnue" est ici la distribution $Y$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On souhaite dans cette question résoudre cette équation différentielle de distribution, ce qui se fera en plusieurs étapes.

*Pour tout cette question 1, un soin sera apporté à la rédaction précise des différentes preuves des résultats demandés.*

(a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (8).

(b) Donner toutes les réponses impulsionnelles, c'est-à-dire les solutions de (8) avec un second membre égal à $\delta$.

(c) Enfin, donner toutes les solutions de l'équation différentielle (8).

(d) (i) Est-ce qu'une condition initiale a un sens *a priori* pour les solutions de l'équation différentielle (8) ?

(ii) Montrer que, néanmoins, une condition permet de fixer la constante intervenant dans les solutions obtenues dans la question 1c.

(e) Traiter l'exemple ci-dessous

On étudie le circuit dérivateur représenté sur la figure 1. On pose $V = V_A$, $v = V_B$. En éliminant $i$ entre

$$\begin{aligned} q &= C(V - v), \\ v &= Ri, \\ i &= \dot{q}, \end{aligned}$$

on obtient

$$v = Ri = RC(\dot{V} - \dot{v}),$$

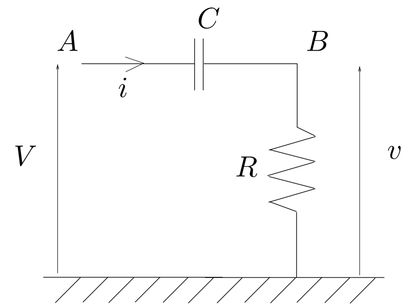


FIGURE 1. Le circuit dérivateur.

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \dot{V}(t), \tag{9}$$

où

$$\tau = RC. \tag{10}$$

On suppose que pour $t \leq 0$, toute les tensions sont nulles. On a donc, en particulier,

$$\forall t \leq 0, \quad v(t) = V(t) = 0. \tag{11}$$

On suppose $V$ connue et on cherche $v$.

(i) Écrire l'équation différentielle (9) sous la forme d'une équation différentielle de distribution et fournir la forme générale de la distribution $T_v$ associée à $v$ en fonction de la distribution $V$.

(ii) Préciser l'expression de la solution $v = T_v$ si $V$ est une distribution-fonction.

(iii) Préciser la forme de $v$ si $V(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

(2) Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions cette fois-ci, l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \mathcal{F}. \tag{12}$$

On *admettra* que les solutions de l'équation homogène associée à (12) sont les mêmes que l'équation différentielle de fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{13}$$

(a) Préciser la forme de la solution générale de l'équation homogène associée à (12) (ou (13)), qui sera notée $\xi$.

On rappelle qu'il faut considérer les racines, *a priori* complexes, de l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{14}$$

(b) Donner une réponse impulsionnelle, c'est-à-dire une solution de (12) avec un second membre égal à $\delta$.

Pour cela, on cherchera cette solution sous la forme de la distribution fonction $Y_0 = \xi_0 H$ où $H$ est la fonction de Heaviside et $\xi_0$ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) (i) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (12).

(ii) En utilisant la condition mise en évidence dans la question (1(d)ii), donner alors l'unique solution de (12).

(d) (i) Résoudre l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' + Y = \delta. \tag{15}$$

(ii) En utilisant la condition mise en évidence dans la question (1(d)ii), donner alors l'unique solution de (15).

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`