Mécanique 4A OMI3 Automne 2023

Examen du 11 janvier 2024

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Montrer que la fonction donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = e^{(1/z)} + e^z. \tag{1}$$

peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k.$$

Exercice 2.

(1) (a)

Expliquer sommairement pourquoi la figure 1 page suivante représente l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel.

(b) Cette figure a été réalisée avec la fonction f définie par

$$f(z) = e^z$$

Quelle propriété de f permet de considérer cet écoulement comme stationnaire pour un fluide incompressible irrotationnel ?

(c) Déterminer les équation des lignes de courant.

(2)

Expliquer sommairement pourquoi la figure 2 page suivante *ne représente pas* l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel.

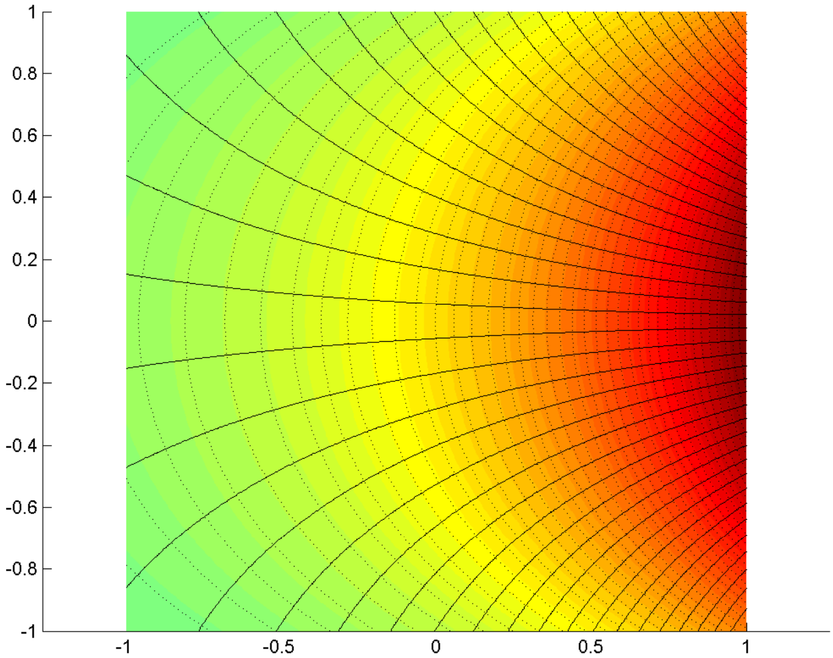

FIGURE 1. L'écoulement considéré (I).

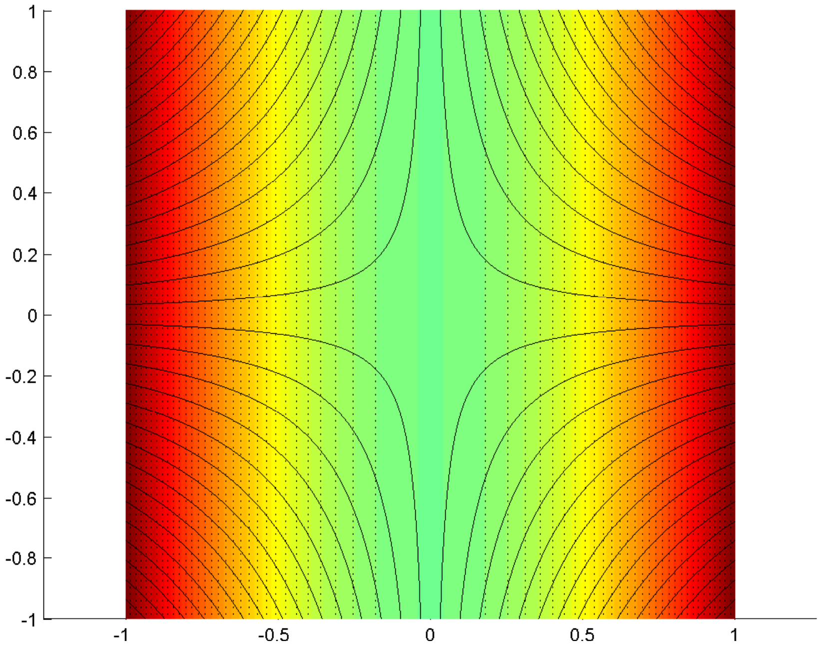

FIGURE 2. L'écoulement considéré (II).

Exercice 3.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et deux réels a et α donnés. On cherche une suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} + a y_n = x_n, \tag{2a}$$
$$y_0 = \alpha. \tag{2b}$$

(1) Soit un réel t quelconque. On multiplie (2a) par t^n et on somme les équations obtenues pour n variant de 0 à l'infini. Montrer qu'en posant

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n t^n,$$
$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n t^n$$

on obtient

$$y(t) = \frac{\alpha + t x(t)}{at + 1}, \tag{3}$$

t décrivant un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser. On fera des calculs sur les séries entières dans $\mathbb{R}$ exactement comme dans $\mathbb{C}$.

(2) On supposera dans cette question que $x_n = n$.

(a) Calculer alors $x(t)$ explicitement

(b) En déduire l'expression explicite de $y(t)$. On distinguera deux cas selon la valeurs de a.

(c) Décomposer y en éléments simples. On pourra admettre que

$$f(t) = \frac{t^2}{(1+at)(t-1)^2}$$

se met sous la forme

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+at} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{(t-1)^2} & \text{si } a \neq -1, \text{ avec } A = 1/(a+1)^2,\ B = (a+2)/(a+1)^2 \text{ et } C = 1/(a+1), \\ -\left(\dfrac{1}{t-1} + \dfrac{2}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{(t-1)^3}\right) & \text{si } a = -1. \end{cases}$$

(d) Déterminer le développement en série entière de y et en déduire les valeurs de y_n.

(3) Reprendre les calculs de la question 2 si b est un réel donné, $x_n = b$ et $a \neq -1$. Que retrouve-t-on ?

Exercice 4.
Considérons E, la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$.

(1) Exprimer $E(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a

$$E' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Exercice 5.
On considère le problème suivant : chercher u de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + u(x) = f(x), \tag{4a}$$

$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{4b}$$

(1) Quelle hypothèse de régularité doit-on faire sur u et f ?

(2) En raisonnant comme dans la section 8.5.1 page 115 du cours, établir la formulation faible du problème (4). On montrera l'équivalence de cette formulation faible avec le problème initial.

(3) Quelle hypothèse de régularité doit-on maintenant faire sur u et f ?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`