Mécanique 4A OMI3 Automne 2018

Corrigé de l'examen de TD du 09 Octobre 2019

Correction de l'exercice 1.
On note θ la détermination principale de l'argument de z.

(1)

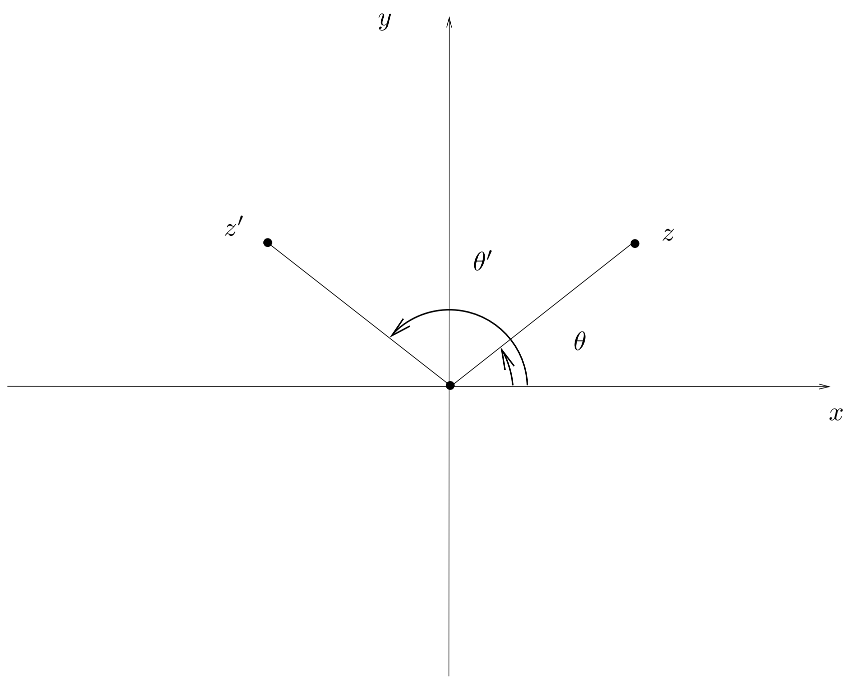

FIGURE 1. Le complexe z et z', son symétrique par rapport à l'axe des y.

Si $\theta \in]0, \pi[$, alors z et z' sont tous les deux dans U. θ' la détermination principale de l'argument de z' (voir figure 1. On a

$$\theta + \theta' = \pi,$$

et donc

$$\theta' = \pi - \theta \in]0, \pi[,$$

qui est donc la détermination principale de l'argument de z'. On a alors

$$\mathrm{Ln}(z') = \ln|z'| + i \arg z' = \ln|z| + i\theta' = \ln|z| + i\pi - i\theta = i\pi + \mathrm{Ln}\left(\overline{z}\right)$$

et donc, d'après le point 3 de la proposition 2.31 du cours, on a

$$\mathrm{Ln}(z') = i\pi + \overline{\mathrm{Ln}(z)}. \tag{1}$$

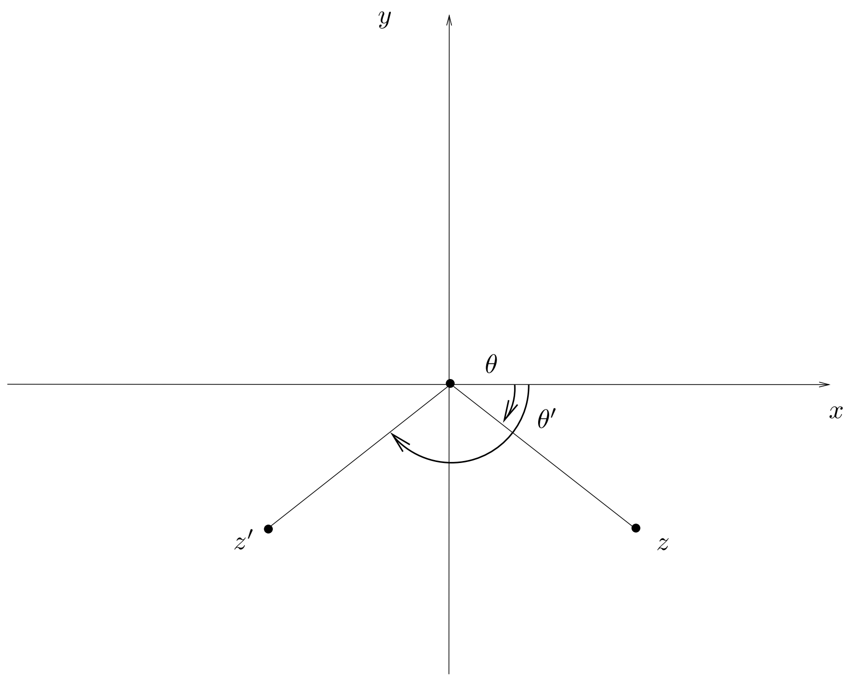

FIGURE 2. Les complexes z et z' dans le cas où $\theta \in]-\pi, 0[$.

(2)

Si $\theta \in]-\pi, 0[$, on a encore z et z' tous les deux dans U. On a cette fois-ci :

$$\theta + \theta' = -\pi,$$

et donc

$$\theta' = -\pi - \theta \in]-\pi, 0[,$$

et donc, de nouveau grâce au point 3 de la proposition 2.31 du cours

$$\mathrm{Ln}(z') = \ln|z'| + i \arg z' = \ln|z| + i\theta' = \ln|z| - i\pi - i\theta = -i\pi + \mathrm{Ln}\left(\overline{z}\right),$$

et donc

$$\mathrm{Ln}(z') = -i\pi + \overline{\mathrm{Ln}(z)}. \tag{2}$$

Correction de l'exercice 2.

(1) D'après la proposition 3.6 page 30 du cours, pour paramétrer le segment $[z_0, z_1]$, il suffit de trouver un quelconque paramétrage, défini par exemple sur $[0, 1]$, qui varie de façon affine en t et qui vaille z_0 pour $t = 0$ et qui vaille z_1 pour $t = 1$. En effet, dans ce cas,

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = At + B,$$

où A et B sont des complexes. En séparant partie réelle et imaginaire, on constate que cela est équivalent à

$$x + iy = z = \gamma(t) = A_x + B_x t + i(A_y + B_y t),$$

et donc x et y sont affines en t. Ils valent respectivement $z_{0,x}$ et $z_{0,y}$ pour $t = 0$ et $z_{1,x}$ et $z_{1,y}$ pour $t = 1$ et décrivent donc respectivement les intervalles $[z_{0,x}, z_{1,x}]$ et $[z_{0,y}, z_{1,y}]$, quand t décrit $[0, 1]$. Ainsi ce paramétrage fournit bien un z qui décrit le segment $[z_0, z_1]$ quand t décrit $[0,1]$. On peut mettre tout cela sous la forme

$$\gamma : \left| \begin{array}{lll} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array} \right. , \tag{3a}$$

avec

$$\forall t \in [0,1], \gamma(t) = At + B, \tag{3b}$$

$$A = z_0, \tag{3c}$$

$$A + B = z_1. \tag{3d}$$

Les deux équations (3c) et (3d) sont équivalentes à

$$A = z_0, \tag{4a}$$

$$B = z_1 - z_0, \tag{4b}$$

et donc un paramétrage donné par l'équation (1b) de l'énoncé.

(2) L'équation (2b) de l'énoncé est aussi équivalente à

$$\forall t \in [\theta_0, \theta_1], \quad \gamma(t) - \omega = re^{it},$$

ce qui se traduit par le fait que, pour t décrivant $[\theta_0, \theta_1]$, le vecteur $\overrightarrow{\omega\gamma(t)}$ fait un angle égal à t avec l'horizontal et que la distance $\omega\gamma$ vaut r. Ainsi $\gamma(t)$ décrit bien l'arc de cercle de la figure 1(b) de l'énoncé.

Correction de l'exercice 3.

Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 51 du cours. On vérifie que l'hypothèse (5.1) est vérifiée. Ensuite, on définit la fonction f à partir de l'équation (5.2) du cours qui donne après calculs

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{(z+1)^2}{z\,(z^2 - 1 - 8\,iz)}.$$

Les pôles de f correspondent aux zéros de

$$z\left(z^2 - 1 - 8\,iz\right).$$

Les pôles à l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon 1 appartiennent à l'ensemble

$$\left\{0, 4\,i - i\sqrt{15}\right\},$$

Chacun de ces pôles est d'ordre 1 et le lemme 3.37 page 43 du cours permet de calculer les résidus de f en ces points donnés par

$$\left\{-1, \frac{15\sqrt{15} - 4\,i\sqrt{15} - 60 + 15\,i}{-60 + 15\sqrt{15}}\right\}.$$

On en déduit alors l'intégrale I de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) et qui vaut, selon l'équation (5.4) du cours :

$$I = -2/15\sqrt{15}\pi.$$