

**Corrigé de l'examen de TD du 06  
Novembre 2020**

**Correction de l'exercice 1.**

Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 51 du cours.

- (1) On définit la fonction  $f$  à partir de l'équation (5.2) du cours. On obtient après calculs :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{i(z^2 + 1)^2}{2z^2(iz^2 - i + 8z)}.$$

Les pôles de  $f$  correspondent aux zéros du dénominateur  $d$  de  $f$  défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad d(z) = 2z^2(iz^2 - i + 8z).$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de  $f$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0; \\ \beta_2 &= -i(-4 + \sqrt{15}); \\ \beta_3 &= i(4 + \sqrt{15}). \end{aligned}$$

- (2) On peut vérifier *a posteriori* que l'hypothèse (5.1) du cours est vérifiée. En effet, aucun des pôles de  $f$  n'est de module 1. On applique ensuite la remarque 5.2 du cours.  
 (3) Après calculs, on montre que les pôles de  $f$  de module strictement inférieur à 1 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \\ \alpha_2 &= -i(-4 + \sqrt{15}). \end{aligned}$$

Après calculs, on montre que les ordres respectifs des pôles  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 2}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} m_1 &= 2; \\ m_2 &= 1; \end{aligned}$$

et que les résidus de  $f$  en ces pôles sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, \alpha_1) &= 4i; \\ \text{Rés}(f, \alpha_2) &= \frac{31i\sqrt{15} - 120i}{-31 + 8\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

Le résidu de  $f$  en son pôle d'ordre 1 peut être calculé grâce au lemme 3.39 page 43 du cours et le résidu de  $f$  en son pôle d'ordre strictement plus grand que 1 peut être calculé grâce au lemme 3.41 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel [residu.m](http://residu.m).

- (4) Après calculs, on montre que

$$\sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) = 4i - i\sqrt{15}.$$

On en déduit finalement que l'intégrale  $I$  de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) du cours, vaut, selon l'équation (5.4) du cours :

$$I = 2\pi(-4 + \sqrt{15}).$$

### Correction de l'exercice 2.

- (1) Utilisons donc la proposition 5.8 du cours. Celle-ci est applicable puisque l'hypothèse (5.16a) est vraie. On a en effet (5.16a) avec  $\deg(B) = 3$  et  $\deg(A) = 1$ .

- (a) Les pôles de  $\mathcal{R}$  correspondent aux zéros du dénominateur  $B$  de  $\mathcal{R}$  défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad B(z) = z^2 + z + 1.$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de  $\mathcal{R}$  sont donnés par :

$$\beta_1 = -1/2 - 1/2 i\sqrt{3};$$

$$\beta_2 = -1/2 + 1/2 i\sqrt{3}.$$

- (b) On peut vérifier qu'aucun pôle de  $\mathcal{R}$  n'est réel.  
 (c) Après calculs, on montre que le seul pôle de  $\mathcal{R}$  situé au dessus de l'axe des  $x$  est donné par :

$$\alpha = -1/2 + 1/2 i\sqrt{3}.$$

Après calculs, on montre que le seul pôle de  $\mathcal{R}$  est d'ordre 1 et le résidu de  $\mathcal{R}$  en ce pôle est donné par

$$\text{Rés}(f, \alpha) = -1/3 i\sqrt{3}.$$

Le résidu de  $\mathcal{R}$  en son unique pôle d'ordre 1 peut être calculé grâce au lemme 3.39 page 43 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel `residu.m`.

- (d) Après calculs, on montre que

$$2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) = 2/3 \pi \sqrt{3}.$$

Ainsi, de la proposition 5.8 du cours, on déduit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = 2/3 \pi \sqrt{3}.$$

- (2) Dans un second temps, explicitons l'intégrale de  $\mathcal{R}$ . Par définition, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(x) = (x^2 + x + 1)^{-1}.$$

On a alors pour tout  $R$  :

$$\int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = \int_{-R}^R (x^2 + x + 1)^{-1} dx.$$

Ainsi, en faisant tendre  $R$  vers l'infini, le résultat établi dans la première question fournit

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + x + 1)^{-1} dx = 2/3 \pi \sqrt{3}.$$

- (3) (a) Déterminons maintenant à la main (sans utiliser le théorème des résidus) la valeur de l'intégrale  $I$ . Pour cela, il faut d'abord décomposer en éléments simple chacune des fractions rationnelles puis intégrer les éléments simples obtenus. On pourra consulter par exemple [Bas19, Section E.1. Primitives de fractions rationnelles de l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"].  
 (b) On obtient après calculs la primitive  $I(x)$  :

$$I(x) = \int (x^2 + x + 1)^{-1} dx,$$

donnée par :

$$I(x) = 2/3 \sqrt{3} \arctan \left( 1/3 (2x + 1) \sqrt{3} \right)$$

On conclue en déterminant finalement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x) = -1/3 \pi \sqrt{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 1/3 \pi \sqrt{3}$$

et on retrouve donc l'intégrale affichée ci-dessus.

## Références

- [Bas19] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2019. 107 pages.