Mécanique 4A OMI3 — Automne 2018

Corrigé de l'examen de TD du 11 Octobre 2019

Correction de l'exercice 1.
On note θ la détermination principale de l'argument de z.

(1)

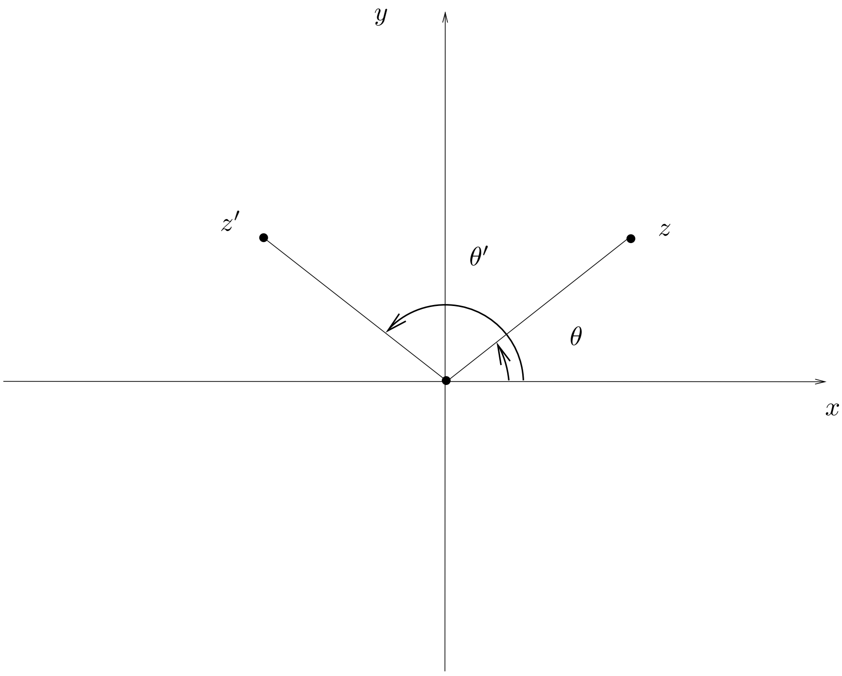

FIGURE 1. Le complexe z et z', son symétrique par rapport à l'axe des y.

Si $\theta \in]0, \pi[$, alors z et z' sont tous les deux dans U. θ' la détermination principale de l'argument de z' (voir figure 1. On a

$$\theta + \theta' = \pi,$$

et donc

$$\theta' = \pi - \theta \in]0, \pi[,$$

qui est donc la détermination principale de l'argument de z'. On a alors

$$\mathrm{Ln}(z') = \ln|z'| + i \arg z' = \ln|z| + i\theta' = \ln|z| + i\pi - i\theta = i\pi + \mathrm{Ln}\left(\overline{z}\right)$$

et donc, d'après le point 3 de la proposition 2.31 du cours, on a

$$\mathrm{Ln}(z') = i\pi + \overline{\mathrm{Ln}(z)}. \tag{1}$$

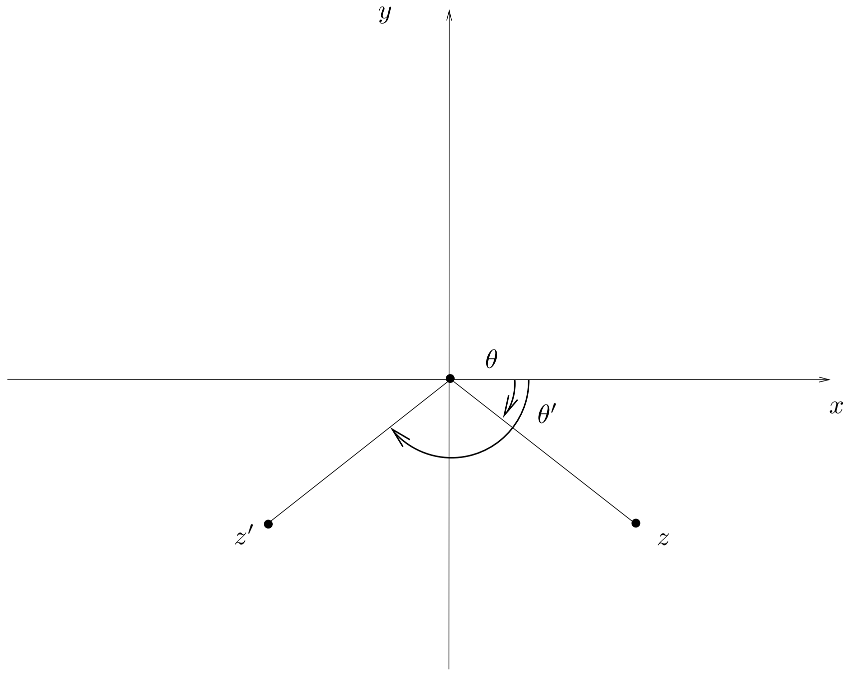

FIGURE 2. Les complexes z et z' dans le cas où $\theta \in]-\pi, 0[$.

(2)

Si $\theta \in]-\pi, 0[$, on a encore z et z' tous les deux dans U. On a cette fois-ci :

$$\theta + \theta' = -\pi,$$

et donc

$$\theta' = -\pi - \theta \in]-\pi, 0[,$$

et donc, de nouveau grâce au point 3 de la proposition 2.31 du cours

$$\mathrm{Ln}(z') = \ln|z'| + i\arg z' = \ln|z| + i\theta' = \ln|z| - i\pi - i\theta = -i\pi + \mathrm{Ln}\left(\overline{z}\right),$$

et donc

$$\mathrm{Ln}(z') = -i\pi + \overline{\mathrm{Ln}(z)}. \tag{2}$$

Correction de l'exercice 2.

(1) D'après la définition (2.56) du cours, on a

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(i)} = e^{i\,(\ln(|i|) + i\arg(i))} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

et donc

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}. \tag{3}$$

(2) (a) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On a

$$z^\alpha = e^{(\alpha\,\mathrm{Ln}(z))}. \tag{4}$$

Posons

$$z = \rho e^{i\theta}, \tag{5}$$

où $\theta \in]-\pi,\pi[$. et
$$\alpha = x + iy. \tag{6}$$
On a donc
$$\alpha\,\mathrm{Ln}(z) = \alpha\,(\ln\rho + i\theta) = (x+iy)\,(\ln\rho + i\theta) = x\ln\rho - y\theta + i\,(x\theta + y\ln\rho)\,.$$
et donc, d'après (4) On a
$$z^\alpha = e^{x\ln\rho - y\theta} e^{i\,(x\theta + y\ln\rho)},$$
qui est un nombre réel ssi
$$x\theta + y\ln\rho \equiv 0 \quad [\pi], \tag{7}$$
ce qui constitue la condition nécessaire et suffisante recherchée.

(b) Pour le cas particulier où $z = \alpha = i$, on a
$$i = \rho e^{i\theta},$$
où $\rho = 1$ et $\theta = \pi/2$. On a aussi
$$i = x + iy$$
où $x = 0$ et $y = 1$ et
$$x\theta + y\ln\rho \ = 0$$
et la condition (7) est évidement respectée.

Correction de l'exercice 3.

Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 51 du cours. On vérifie que l'hypothèse (5.1) est vérifiée. Ensuite, on définit la fonction f à partir de l'équation (5.2) du cours qui donne après calculs
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = -\frac{(z+i)^2}{z\,(z^2+1-16\,z)}.$$
Les pôles de f correspondent aux zéros de
$$z\left(z^2+1-16\,z\right).$$
Les pôles à l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon 1 appartiennent à l'ensemble
$$\left\{0, 8-3\sqrt{7}\right\},$$
Chacun de ces pôles est d'ordre 1 et le lemme 3.37 page 43 du cours permet de calculer les résidus de f en ces points donnés par
$$\left\{1, \frac{-63\sqrt{7} - 8\,i\sqrt{7} + 168 + 21\,i}{63\sqrt{7} - 168}\right\}.$$
On en déduit alors l'intégrale I de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) et qui vaut, selon l'équation (5.4) du cours :
$$I = -2/21\sqrt{7}\pi.$$