Mécanique 4A OMI3 | Automne 2020

Corrigé de l'examen de TD du 04 Novembre 2020

Correction de l'exercice 1.

Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 51 du cours.

(1) On définit la fonction f à partir de l'équation (5.2) du cours. On obtient après calculs :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{i\left(z^2-1\right)^2}{2\,z^2\,(z^2+1-8\,z)}.$$

Les pôles de f correspondent aux zéros du dénominateur d de f défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad d(z) = 2\,z^2\left(z^2+1-8\,z\right).$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de f sont donnés par :

$$\beta_1 = 0\,;$$
$$\beta_2 = 4-\sqrt{15}\,;$$
$$\beta_3 = 4+\sqrt{15}.$$

(2) On peut vérifier *a posteriori* que l'hypothèse (5.1) du cours est vérifiée. En effet, aucun des pôles de f n'est de module 1. On applique ensuite la remarque 5.2 du cours.

(3) Après calculs, on montre que les pôles de f de module strictement inférieur à 1 sont donnés par :

$$\alpha_1 = 0\,;$$
$$\alpha_2 = 4-\sqrt{15}.$$

Après calculs, on montre que les ordres respectifs des pôles $(\alpha_k)_{1\leq k\leq 2}$ sont donnés par :

$$m_1 = 2\,;$$
$$m_2 = 1;$$

et que les résidus de f en ces pôles sont donnés par :

$$\text{Rés}\,(f,\alpha_1) = 4\,i\,;$$
$$\text{Rés}\,(f,\alpha_2) = \frac{31\,i\sqrt{15}-120\,i}{-31+8\sqrt{15}}.$$

Le résidu de f en son pôle d'ordre 1 peut être calculé grâce au lemme 3.39 page 43 du cours et le résidu de f en son pôle d'ordre strictement plus grand que 1 peut être calculé grâce au lemme 3.41 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel `residu.m`.

(4) Après calculs, on montre que

$$\sum_k \text{Rés}(f,\alpha_k) = -i\sqrt{15}+4\,i.$$

On en déduit finalement que l'intégrale I de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) du cours, vaut, selon l'équation (5.4) du cours :

$$I = 2\,\pi\left(-4+\sqrt{15}\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) Utilisons donc la proposition 5.8 du cours. Celle-ci est applicable puisque l'hypothèse (5.16a) est vraie. On a en effet (5.16a) avec $\deg(B) = 5$ et $\deg(A) = 2$.

(a) Les pôles de $\mathcal{R}$ correspondent aux zéros du dénominateur B de $\mathcal{R}$ défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad B(z) = z^4 + 1.$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de $\mathcal{R}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -1/2\, i\sqrt{2} - 1/2\,\sqrt{2}\,;\\
\beta_2 &= -1/2\, i\sqrt{2} + 1/2\,\sqrt{2}\,;\\
\beta_3 &= 1/2\,\sqrt{2} + 1/2\, i\sqrt{2}\,;\\
\beta_4 &= -1/2\,\sqrt{2} + 1/2\, i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(b) On peut vérifier qu'aucun pôle de $\mathcal{R}$ n'est réel.

(c) Après calculs, on montre que les pôles de $\mathcal{R}$ situés au dessus de l'axe des x sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1/2\,\sqrt{2} + 1/2\, i\sqrt{2}\,;\\
\alpha_2 &= -1/2\,\sqrt{2} + 1/2\, i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Après calculs, on montre que les ordres respectifs des pôles $(\alpha_k)_{1\leq k\leq 2}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
m_1 &= 1\,;\\
m_2 &= 1;
\end{aligned}$$

et que les résidus de $\mathcal{R}$ en ces pôles sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\text{Rés}\,(f,\alpha_1) &= -1/4\, i + 1/8\,\sqrt{2} - 1/8\, i\sqrt{2}\,;\\
\text{Rés}\,(f,\alpha_2) &= 1/4\, i + 1/8\,\sqrt{2} + 1/8\, i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Tous les résidus de $\mathcal{R}$ en ses pôles tous d'ordre 1 peuvent être calculé grâce au lemme 3.39 page 43 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel `residu.m`.

(d) Après calculs, on montre que

$$2i\pi \sum_k \text{Rés}(f,\alpha_k) = 1/2\, i\pi\,\sqrt{2}.$$

Ainsi, de la proposition 5.8 du cours, on déduit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{R}(x)dx = 1/2\, i\pi\,\sqrt{2}.$$

(2) Dans un second temps, explicitons l'intégrale de $\mathcal{R}$. Par définition, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(x) = \frac{x+i}{x^4+1},$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right) + i\left(\left(x^4+1\right)^{-1}\right).$$

On a alors pour tout R :

$$\int_{-R}^{R} \mathcal{R}(x)dx = \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^4+1}dx + i\int_{-R}^{R} \left(x^4+1\right)^{-1} dx.$$

Or, par symétrie, puisque la fonction à intégrer est impaire, on a

$$\int_{-R}^{R} \frac{x}{x^4+1} dx = 0.$$

En outre, par symétrie, puisque la fonction à intégrer est paire, on a

$$\int_{-R}^{R} \left(x^4+1\right)^{-1} dx = 2\int_{0}^{R} \left(x^4+1\right)^{-1} dx.$$

Ainsi, en faisant tendre R vers l'infini, le résultat établi dans la première question fournit

$$\int_{0}^{\infty} \left(x^4+1\right)^{-1} dx = 1/4\,\pi\,\sqrt{2}.$$

(3) (a) Déterminons maintenant à la main (sans utiliser le théorème des résidus) la valeur de l'intégrale J. Pour cela, il faut d'abord décomposer en éléments simple chacune des fractions rationnelles puis intégrer les élements simples obtenus. On pourra consulter par exemple [Bas19, Section E.1. Primitives de fractions rationnelles de l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"].

(b) On obtient après calculs la primitive $J(x)$:

$$J(x) = \int \left(x^4+1\right)^{-1} dx,$$

donnée par :

$$J(x) = 1/8\,\sqrt{2}\left(\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) + 2\,\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right) + 2\,\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)\right)$$

On conclue en déterminant finalement :

$$J(0) = 0\,;$$
$$\lim_{x\to+\infty} J(x) = 1/4\,\pi\,\sqrt{2}$$

et on retrouve donc l'intégrale affichée ci-dessus.

Références

[Bas19] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2019. 107 pages.