

**Corrigé de l'examen de TD du 12
Novembre 2021****Correction de l'exercice 1.**

Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 51 du cours.

- (1) On définit la fonction f à partir de l'équation (5.2) du cours. On obtient après calculs :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{-z^2 + 1 + 10iz}{z(z^2 + 1 - 4z)}.$$

Les pôles de f correspondent aux zéros du dénominateur d de f défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad d(z) = z(z^2 + 1 - 4z).$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de f sont donnés par :

$$\beta_1 = 0;$$

$$\beta_2 = 2 - \sqrt{3};$$

$$\beta_3 = 2 + \sqrt{3}.$$

- (2) On peut vérifier *a posteriori* que l'hypothèse (5.1) du cours est vérifiée. En effet, aucun des pôles de f n'est de module 1. On applique ensuite la remarque 5.2 du cours.
- (3) Après calculs, on montre que les pôles de f de module strictement inférieur à 1 sont donnés par :

$$\alpha_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Après calculs, on montre que les ordres respectifs des pôles $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 2}$ sont donnés par :

$$m_1 = 1;$$

$$m_2 = 1;$$

et que les résidus de f en ces pôles sont donnés par :

$$\text{Rés}(f, \alpha_1) = 1;$$

$$\text{Rés}(f, \alpha_2) = \frac{-3\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} + 6 - 15i}{-6 + 3\sqrt{3}}.$$

Tous les résidus de f en ses pôles tous d'ordre 1 peuvent être calculé grâce au lemme 3.39 page 43 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel `residu.m`.

- (4) Après calculs, on montre que

$$\sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) = -5/3 i\sqrt{3}.$$

On en déduit finalement que l'intégrale I de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) du cours, vaut, selon l'équation (5.4) du cours :

$$I = 10/3 \pi \sqrt{3}.$$

Correction de l'exercice 2.

- (1) Utilisons donc la proposition 5.8 du cours. Celle-ci est applicable puisque l'hypothèse (5.16a) est vraie. On a en effet (5.16a) avec $\deg(B) = 4$ et $\deg(A) = 1$.

- (a) Les pôles de \mathcal{R} correspondent aux zéros du dénominateur B de \mathcal{R} défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad B(z) = z^4 + 1.$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de \mathcal{R} sont donnés par :

$$\beta_1 = -1/2 \sqrt{2} - 1/2 i \sqrt{2};$$

$$\beta_2 = -1/2 i \sqrt{2} + 1/2 \sqrt{2};$$

$$\beta_3 = 1/2 \sqrt{2} + 1/2 i \sqrt{2};$$

$$\beta_4 = -1/2 \sqrt{2} + 1/2 i \sqrt{2}.$$

- (b) On peut vérifier qu'aucun pôle de \mathcal{R} n'est réel.

- (c) Après calculs, on montre que les pôles de \mathcal{R} situés au dessus de l'axe des x sont donnés par :

$$\alpha_1 = 1/2 \sqrt{2} + 1/2 i \sqrt{2};$$

$$\alpha_2 = -1/2 \sqrt{2} + 1/2 i \sqrt{2}.$$

Après calculs, on montre que les ordres respectifs des pôles $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 2}$ sont donnés par :

$$m_1 = 1;$$

$$m_2 = 1;$$

et que les résidus de \mathcal{R} en ces pôles sont donnés par :

$$\text{Rés}(f, \alpha_1) = -1/4 i + 1/8 \sqrt{2} - 1/8 i \sqrt{2};$$

$$\text{Rés}(f, \alpha_2) = 1/4 i + 1/8 \sqrt{2} + 1/8 i \sqrt{2}.$$

Tous les résidus de \mathcal{R} en ses pôles tous d'ordre 1 peuvent être calculé grâce au lemme 3.39 page 43 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel `residu.m`.

- (d) Après calculs, on montre que

$$2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) = 1/2 i\pi \sqrt{2}.$$

Ainsi, de la proposition 5.8 du cours, on déduit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = 1/2 i\pi \sqrt{2}.$$

- (2) Dans un second temps, explicitons l'intégrale de \mathcal{R} . Par définition, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(x) = \frac{x+i}{x^4+1},$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(x) = \left(\frac{x}{x^4+1} \right) + i \left((x^4+1)^{-1} \right).$$

On a alors pour tout R :

$$\int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = \int_{-R}^R \frac{x}{x^4+1} dx + i \int_{-R}^R (x^4+1)^{-1} dx.$$

Or, par symétrie, puisque la fonction à intégrer est impaire, on a

$$\int_{-R}^R \frac{x}{x^4+1} dx = 0.$$

En outre, par symétrie, puisque la fonction à intégrer est paire, on a

$$\int_{-R}^R (x^4 + 1)^{-1} dx = 2 \int_0^R (x^4 + 1)^{-1} dx.$$

Ainsi, en faisant tendre R vers l'infini, le résultat établi dans la première question fournit

$$\int_0^\infty (x^4 + 1)^{-1} dx = 1/4 \pi \sqrt{2}.$$

- (3) (a) Déterminons maintenant à la main (sans utiliser le théorème des résidus) la valeur de l'intégrale J . Pour cela, il faut d'abord décomposer en éléments simple chacune des fractions rationnelles puis intégrer les éléments simples obtenus. On pourra consulter par exemple [Bas19, Section E.1. Primitives de fractions rationnelles de l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"].
- (b) On obtient après calculs la primitive $J(x)$:

$$J(x) = \int (x^4 + 1)^{-1} dx,$$

donnée par :

$$J(x) = 1/8 \sqrt{2} \left(\ln \left(\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right) + 2 \arctan(x\sqrt{2} + 1) + 2 \arctan(x\sqrt{2} - 1) \right)$$

On conclue en déterminant finalement :

$$J(0) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = 1/4 \pi \sqrt{2}$$

et on retrouve donc l'intégrale affichée ci-dessus.

Références

- [Bas19] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.cherz-alice.fr/Polytech/index.html>. 2019. 107 pages.