POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Mécanique 4A OMI3 — Automne 2018

Examen de TD du 03 Octobre 2018

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Une feuille manuscrite A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ☒

Exercice 1.
On considère la fonction f définie par

$$f(z) = ze^{z^2}$$

Déterminer

$$I = \int_\gamma f(z)dz,$$

où γ est le segment $[A, B] = [1 + i, 3 + 2\,i]$.

Exercice 2.

(1) (a) Expliquer sommairement pourquoi la figure 1 représente l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel.

(b) Cette figure a été réalisée avec la fonction f définie par

$$f(z) = e^{z^2}$$

Quelle propriété de f permet de considérer cet écoulement comme stationnaire pour un fluide incompressible irrotationnel ?

(c) Déterminer les équations des lignes de courant.

(2) Expliquer sommairement pourquoi la figure 2 *ne représente pas* l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel.

Exercice 3.
Pour ε et R deux réels tels que $0 < \varepsilon < R$, on considère le chemin fermé Γ constitué des deux arcs de cercles de centre l'origine O et de rayons respectifs ε et R (notés respectivement γ_ε et γ_R) et des

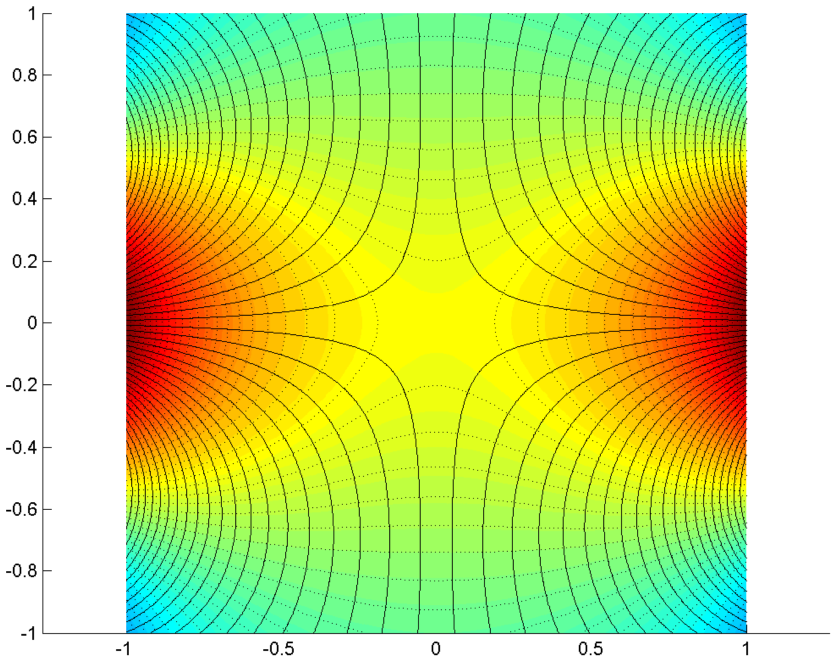

FIGURE 1. L'écoulement considéré (I).

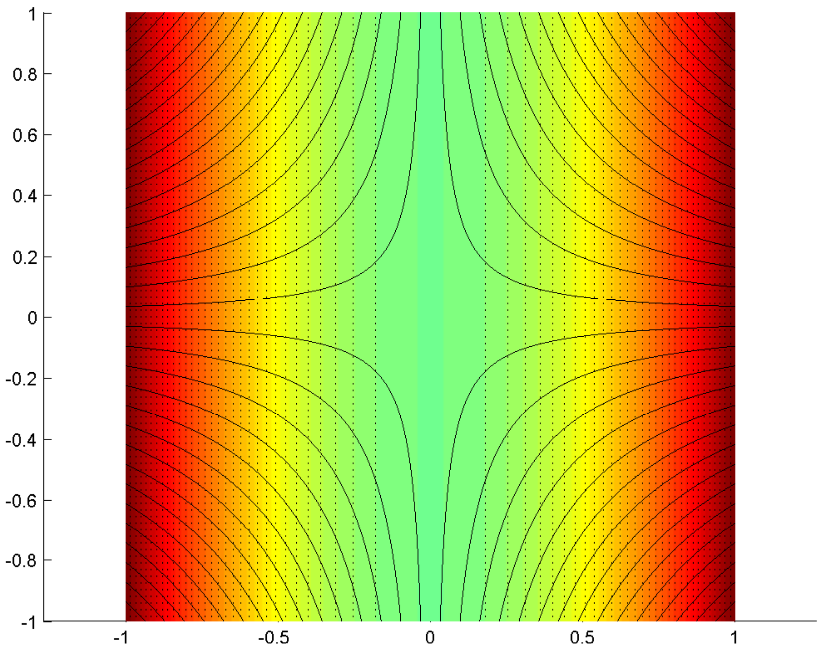

FIGURE 2. L'écoulement considéré (II).

deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure 3. On

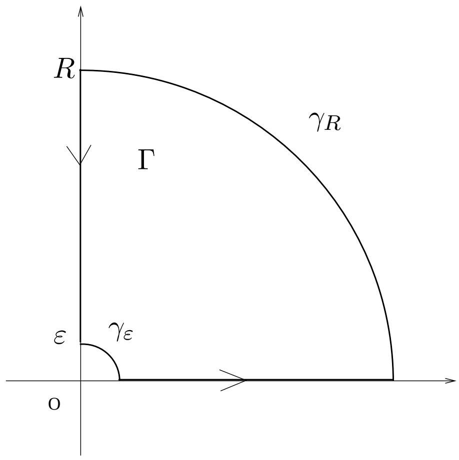

FIGURE 3. Le chemin Γ considéré.

considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \tag{1}$$

(1) Paramétrer correctement les deux cercles et les deux segments constituant Γ et montrer que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{2}$$

(2) (a) Montrer que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta \tag{3}$$

(b) Justifier rapidement pourquoi on a

$$\forall\theta \in [0,\pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{4}$$

(c) En déduire que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{2R} \tag{5}$$

puis que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{6}$$

(3) On admet (comme (3)) que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -i\int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon ie^{i\theta}}d\theta \tag{7}$$

(a) À $\theta \in [0,\pi/2]$ fixé, quelle est la limite de de $e^{\varepsilon ie^{i\theta}}$ quand ε tend vers zéro par valeur strictement positive.

(b) Est-ce une condition suffisante pour assurer que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} -i\int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon ie^{i\theta}}d\theta = -\frac{i\pi}{2}\ ? \tag{8}$$

On admettra néanmoins ce résultat.

(4) Que vaut $\int_\Gamma f(z)dz$?

(5) Conclure et montrer que que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0, \tag{9a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{9b}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`