Mécanique 4A OMI3 Automne 2018

Corrigé de l'examen de TD du 03 Octobre 2018

Correction de l'exercice 1.

Cet exercice est très proche de l'exercice de TD 3.6 !

Il suffisait d'utiliser la proposition 3.16 page 31 du cours puisque la fonction f, admet une primitive, holomorphe sur $\mathbb{C}$. La primitive de la fonction f vaut F définie par

$$F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2};$$

D'après la proposition 3.16 page 31 du cours, il vient

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(B) - F(A).$$

On a compte tenu des valeurs de A et de B :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left(e^{(3+2i)^2} - e^{(1+i)^2}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{5+12i} - e^{2i}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(e^5 e^{12i} - e^{2i}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$I = \frac{1}{2}\left(e^5\cos 12 - \cos(2) + i\left(e^5 \sin 12 - \sin(2)\right)\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) La figure représente l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel puisque les lignes de courant et les équipotentielles semblent être perpendiculaires.

(b) Cette figure a été réalisée avec la fonction f définie par

$$f(z) = e^{z^2}$$

Les dérivées partielles de f existent et sont continues et donc l'aspect dérivable de f est équivalent aux conditions de Cauchy-Riemann, qui traduit l'aspect incompressible et irrotationnel. Voir section 5.2.1 page 56 du cours.

(c) Les équation des lignes de courant sont données par

$$\psi = \operatorname{Im} f = C,$$

où C est une constante. Ici, on a, pour $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et donc

$$f(z) = e^{x^2-y^2+2ixy} = e^{x^2-y^2}e^{2ixy} = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

et les équations de lignes de courant sont donc

$$e^{x^2-y^2}\sin(2xy) = C.$$

(2) La figure ne représente pas l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel puisque les lignes de courant et les équipotentielles ne semblent pas perpendiculaires ? La fonction f utilisée est définie par $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$ qui n'est pas dérivable. Voir exercice de TD 1.3.

Correction de l'exercice 3.

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants des deux arcs de cercles de centre l'origine O et des deux segments constituant Γ :

$$\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [\pi/2, 0]\,; \tag{1a}$$

$$\gamma_R : z = Re^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0, \pi/2]\,; \tag{1b}$$

$$[\varepsilon, R] : z = t \text{ pour } t \in [\varepsilon, R]\,; \tag{1c}$$

$$[iR, i\varepsilon] : z = it \text{ pour } t \in [R, \varepsilon]. \tag{1d}$$

On a aussi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{[iR,i\varepsilon]} f(z)dz.$$

Ainsi, grâce aux deux paramétrages (1c) et (1d), il vient pour chacun d'eux $dz = dt$ et $dz = idt$ de sorte que :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R f(t)dt + i\int_R^\varepsilon f(it)dt,\\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - i\int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{it}dt\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{2}$$

(2) (a) D'après la définition (1b), on a $dz = Rie^{i\theta}d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta,\\ &= Ri\int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\left(Re^{i\theta}\right)}}{Re^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta,\\ &= i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta \tag{3}$$

(b) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0, \pi/2]$, ce dont on déduit que la courbe est au-dessus de sa corde, d'équation $y = 2\theta/\pi$, soit

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{4}$$

(c) D'après (3), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi/2} \left|e^{iRe^{i\theta}}\right| d\theta,\\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

et on déduit de (4) que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta,\\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta,\\ &= -\frac{\pi}{2R}\left(e^{-\frac{2R\times\pi}{2\pi}}-1\right),\\ &= \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right),\\ &\leq \frac{\pi}{2R}\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{2R} \tag{5}$$

dont on déduit immédiatement que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{6}$$

(3) De la même façon que l'on a établi (3), on a $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz &= \int_{\pi/2}^{0} f(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta} d\theta,\\ &= -\varepsilon i \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)}}{\varepsilon e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta,\\ &= -i\int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta,\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -i\int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \tag{7}$$

(a) À $\theta\in[0,\pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} = 1. \tag{8}$$

(b) On a donc la convergence simple de la fonction $\theta\mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ vers 1 sur $[0,\pi/2]$. Si la convergence était uniforme, on pourrait écrire donc que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et en déduire, selon (7) que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -\frac{i\pi}{2}. \tag{9}$$

Malheureusement, cette convergence n'est pas *a priori* uniforme. Cependant, le théorème de convergence dominée de Lebesgue J.3 du cours est aussi valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il suffit donc, pour pouvoir l'appliquer de majorer chaque fonction $\theta\mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ de façon indépendante de ε par une fonction intégrable sur $[0,\pi/2]$, ce qui est aisé car

$$\left|e^{\varepsilon i e^{i\theta}}\right| = e^{-\varepsilon\sin\theta} \leq 1.$$

Remarque 1. Puisque, à $\theta \in [0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\left|e^{Rie^{i\theta}}\right| \leq e^{-R\sin\theta}$$

on déduit d'une part que à $\theta \in]0, \pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{R\to+\infty} e^{Rie^{i\theta}} = 0$$

et d'autre part que, que pour tout $R > 0$, on a

$$\left|e^{Rie^{i\theta}}\right| \leq 1.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue J.3 assure encore que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

et cela pouvait nous permettre d'éviter de passer par la question 2 !

(4) La fonction $f : z \mapsto e^{iz}/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, elle n'a aucune singularité à l'intérieur du chemin Γ. Ainsi, d'après la formule du résidus (formule 3.34) du cours, on a

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{10}$$

Ici, on n'a même pas de résidu à calculer !

(5) Synthétisons tous les résultats : d'après (2) et (10), il vient, pour tout ε et R

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt = 0.$$

ce qui donne, en séparant partie réelle et imaginaire

$$\int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t}dt + \operatorname{Re}\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz\right) = 0,$$

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}dt + \operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0\right).$$

Enfin, d'après (6) et (9), il vient en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t}dt = 0,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

ce que l'on peut noter sous la forme finale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t}dt = 0, \tag{11a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}. \tag{11b}$$

Remarque 2. Les intégrandes de (11) sont prolongeables par continuité en zéro donc la convergence en zéro etait acquise dès le début. Attention cependant, ces intégrales ne sont que semi-convergentes au sens de l'intégration de Riemann : on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right| dt = +\infty,$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty.$$

Au sens de l'intégration de Lebesgue, les fonctions intégrandes ne sont donc pas dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.