Mécanique 4A OMI3 Automne 2013

Examen complémentaire du 4 juillet 2014

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
L'objet de cet exercice est de montrer le résultat sur la somme [1] suivant (dont on admet l'existence) :

$$\forall a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}. \tag{2}$$

(1) Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction complexe f définie par

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}. \tag{3}$$

Quels sont les pôles de cette fonction, notés z_1 et z_2 ?

(2) On considère la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Big((z_l)_{1 \le l \le 2} \cup \mathbb{Z} \Big), \quad g(z) = \pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z) = \pi f(z) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}. \tag{4}$$

Montrer que l'ensemble des pôles de cette fonction est égal à $\Big((z_l)_{1 \le l \le 2} \cup \mathbb{Z} \Big)$.

(3) Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \text{Rés}\,(\pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z), k) = f(k). \tag{5}$$

(4)

Pour N entier non nul, on définit γ_N le chemin carré de $\mathbb{C}$, de centre l'origine et passant par le point d'affixe $N + 1/2$ (voir la figure 1 page suivante). On choisit N assez grand de façon que γ_N contiennent tous les pôles de f.

1. On rappelle que la cotangente hyperbolique, coth, est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{1}$$

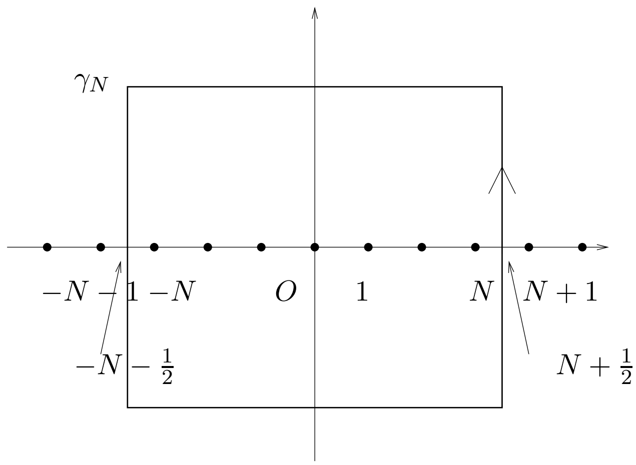

FIGURE 1. le chemin γ_N

Montrer, en utilisant le théorème des résidus que

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z)dz = 2i\pi \sum_{n=-N}^{N} \text{Rés}\left(\pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z), n\right) + 2i\pi \sum_{l=1}^{2} \text{Rés}\left(\pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z), z_l\right), \qquad (6)$$

(5) *En admettant* que

$$\lim_{N\to+\infty} \left| \int_{\gamma_N} \pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z)dz \right| = 0,$$

montrer que la somme $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et vérifie

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{l=1}^{2} \text{Rés}\left(\pi f(z)\mathrm{cotg}(\pi z), z_l\right). \qquad (7)$$

(6) Conclure en montrant le résultat (2).

(7) En admetttant la continuité de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ par rapport à a, quel résultat usuel retrouve-t-on en faisant tendre a vers zéro dans (2) ?

Exercice 2.

L'objet de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle au sens des distributions suivante : on cherche une distribution T telle que

$$T'' + aT + bT' = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \qquad (8)$$

où α et β sont deux réels et δ et δ' sont les distributions de Dirac et sa dérivée en zéro.

(1) On considère le cas particulier $\beta = 0$ et α quelconque.

  (a) Résoudre (8) dans ce cas.

  (b) À quel contexte mécanique est associé cette équation différentielle ?

  (c) La ditribution T obtenue correspond-elle à une fonction ?

(2) On considère maintenant le cas général α et β quelconques.

(a) Résoudre (8) en cherchant une solution sous la forme d'une distribution-fonction x, définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera σ et σ', les sauts de la fonction x et de sa dérivée en zéro :

$$\sigma = x_0 = x(0+0), \tag{9a}$$

$$\sigma' = x'_0 = x'(0+0). \tag{9b}$$

(b) La distribution-fonction obtenue est-elle continue, dérivable en zéro ?

(c) À quel contexte mécanique pourrait être associé cette équation différentielle ?

(d) Pourriez-vous donner un exemple de distribution associé à δ' ? On pourra chercher le résultat sous forme de limite.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`