POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Mécanique 4A OMI3 — Automne 2022

Examen complémentaire du 02 février 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \tag{1}$$

Déterminez les pôles de f et représentez-les dans le plan complexe.

(2) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement la proposition 5.5 page 53 du cours pour calculer l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \quad ? \tag{2}$$

(3)

Pour $R > 0$, on considère le chemin fermé Γ constitué de l'arc de cercle de centre l'origine O et de rayon R (noté γ_R) et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure 1 page suivante.

(a) Que donne la formule des résidus appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R > 0$ fixé ?

(b) Conclure sur la valeur de l'intégrale donnée par (2), en faisant tendre R vers l'infini. On *admettra* que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{3}$$

(4) *Question facultative*

Pourriez-vous déterminer la valeur de l'intégrale donnée par (2) à la main ?

Exercice 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

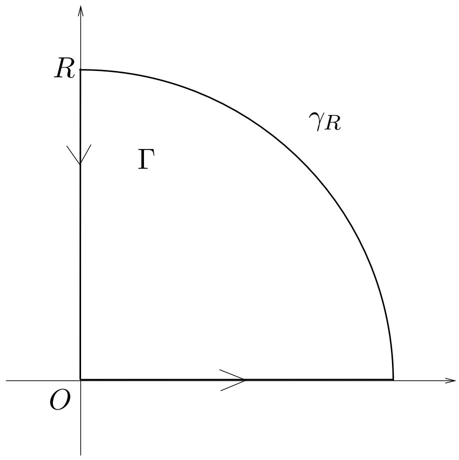

FIGURE 1. Le chemin Γ considéré.

(1) Calculer $\delta_a * \delta_b$.

(2) (a) De façon plus générale, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, calculer $\langle \delta_a * T, \phi \rangle$.

(b) En déduire, dans le cas où T est égale à une distribution-fonction notée $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, que $\delta_a * f$ est une distribution-fonction et que

$$\delta_a * f = f(. - a). \tag{4}$$

Exercice 3.

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \mathcal{F}. \tag{5}$$

On *admettra* que les solutions de l'équation homogène associée à (5) sont les mêmes que l'équation différentielle de fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{6}$$

(1) Préciser la forme de la solution générale de l'équation homogène associée à (5) (ou (6)), qui sera notée ξ.

On rappelle qu'il faut considérer les racines, *a priori* complexes, de l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{7}$$

(2) Donner une réponse impulsionnelle, c'est-à-dire une solution de (5) avec un second membre égal à δ.

Pour cela, on cherchera cette solution sous la forme de la distribution fonction $Y_0 = \xi_0 H$ où H est la fonction de Heaviside et ξ_0 une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(3) (a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (5).

(b) Quelle condition permet d'affirmer qu'il existe une unique solution de (5) ?

(c) Donner alors, sous cette condition, l'unique solution de (5).

(4) (a) Résoudre l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' + Y = \delta. \tag{8}$$

(b) En utilisant la condition mise en évidence dans la question (3b) donner alors l'unique solution de (8).

(5) Soient $\tau > 0$ et (F_n) une suite quelconque de réels.

(a) On cherche toutes les distributions $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{9}$$

et celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$.

(i) Montrer que la distribution suivante existe

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{10}$$

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chercher tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{11}$$

(iii) Par linéarité, trouver une solution particulière de (9) et conclure.

(b) Chercher une situation physique correspondant à $k = 0$ et $C > 0$?

Exercice 4.
On cherche à démontrer dans cet exercice la proposition 6.44 du cours dont l'énoncé est rappelé ici :

Proposition 1 (Formules des sauts (nombre infinis))**.**

(1) Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante telle que

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = +\infty. \tag{12}$$

On supposera que $a_0 \geq -\infty$. On pose alors $\Omega =]a_0, +\infty[$. Soit f une fonction continûment dérivable sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \mathbb{N}$ ayant en chaque a_i pour $i \in \mathbb{N}^*$, une limite à droite et une limite à gauche. On note le saut de f en a_i, pour $i \in \mathbb{N}^*$, la quantité définie par $\sigma_{a_i} = f(a_i + 0) - f(a_i - 0)$ On suppose de plus que

$$f' \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{13}$$

On note f', la fonction définie par la dérivée usuelle de f (sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$). Alors, on a

$$f \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{14}$$

et

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T'_f = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}. \tag{15}$$

Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante et vérifie (12) et les hypothèses précédentes

$$\lim_{i\to-\infty} a_i = -\infty, \tag{16}$$

l'équation (15) est remplacée par

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T'_f = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}. \tag{17}$$

(2) (a) *Plus généralement, on fait les mêmes hypothèses que dans le cas 1 sauf que la suite a_n est strictement monotone et on considère $l \in \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{i \to +\infty} a_i = l. \tag{18}$$

On pose

$$\Omega = \begin{cases}]a_0, K[, & \text{où } K \text{ est un réel quelconque tel que } l < K \leq +\infty \text{ si la suite } a_i \text{ est croissante ;} \\ ]K, a_0[, & \text{où } K \text{ est un réel quelconque tel que } +\infty \leq K < l \text{ si la suite } a_i \text{ est décroissante.} \end{cases} \tag{19}$$

Si l est fini, on suppose de plus que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\sigma_i| < +\infty \ ; \tag{20a}$$

f possède une limite à gauche et à droite en l avec un saut noté σ_l ; (20b)

si la suite a_i est décroissante, f est continûment dérivable sur $]K, l[$; (20c)

si la suite a_i est croissante, f est continûment dérivable sur $]l, K[$. (20d)

(20e)

On a les mêmes conclusions que dans le cas 1 sauf dans le cas où l est fini, auquel cas (15) *est remplacé par*

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i} \delta_{a_i} + \sigma_l \delta_l. \tag{21}$$

(b) *Si la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est strictement monotone, on fait les mêmes hypothèses que dans le cas* (2a). *Dans ce cas,* (21) *est remplacée par*

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ T_f' = f' + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma_{a_i} \delta_{a_i} + \sigma_{l^+} \delta_{l^+} + \sigma_{l^-} \delta_{l^-}, \tag{22}$$

où $l^{\pm}$ désigne la limite de a_i quand i tend $\pm\infty$, quand elle est supposée finie, en supposant dans ce cas que

$$\sum_{i=1}^{\pm\infty} |\sigma_i| < +\infty. \tag{23}$$

Début de l'énoncé :

(1) Démontrons tout d'abord le point 1 de la proposition 1.

Sans perte de généralité et, pour simplifier, on supposera que $a_0 = -\infty$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont on supposera, sans perte de généralité, le support $[A, B]$ assez grand pour que

$$A < a_1. \tag{24}$$

(a) Pourquoi existe-t-il N tel que

$$\forall n \geq N, \quad a_n > B\,? \tag{25}$$

(b) Soit α et β tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$ avec une limite à droite en α et une limite à gauche en β. Comme dans le cours dans la preuve de la proposition 6.35, montrer la formule d'intégration par partie suivante :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f'(x)\phi(x)dx + f(\beta-0)\phi(\beta) - f(\alpha-0)\phi(\alpha).$$

(c) Pour tout $n \geq N$, écrire, comme dans le cours dans la preuve de la proposition 6.35 l'intégrale $\int_A^B f(x)\phi'(x)dx$ sous la forme d'une somme d'intégrales du type $\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx$, à laquelle on appliquera le résultat obtenu dans la question 1b.

(d) Conclure enfin en calculant $\left\langle T_f', \phi \right\rangle$.

(2) Démontrons maintenant le point 2 de la proposition 1.

(a) Pourquoi peut-on considérer $l \in \{-\infty,\infty\} \cup \mathbb{R}$ vérifiant (18) ?

(b) Le cas l infini ayant déjà été traité dans la question 1, on supposera, sans perte de généralité que l est fini, que la suite a_n est strictement croissante et que le réel K de l'équation (19) vaut $+\infty$.

(i) Comme dans la question 1, on considère $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont on supposera, sans perte de généralité, le support $[A,B]$ assez grand pour que (24) soit vérifiée ainsi que

$$B > l. \tag{26}$$

Montrer que

$$\forall N \geq 4, \quad \int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{N-2} \sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1). \tag{27}$$

(ii) Qu'obtient-on si on passe à la limite $N \to +\infty$ dans (27) ?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`