Mécanique 4A OMI3 Automne 2013

Corrigé de l'examen complémentaire du 4 juillet 2014

Correction de l'exercice 1.

On renverra à l'annexe G du cours (et notamment à l'exemple G.23) qui est une généralisation de ce résultat.

(1) La dénominateur de la fonction complexe définie par l'équation (3) de l'énoncé est nul si et seulement si $z^2 + a^2 = 0$, c'est-à-dire, si $z = \pm ai$. Les pôles de f son donc z_1 et z_2 où

$$z_1 = ai, \quad z_2 = -ai. \tag{1}$$

(2) Le dénominateur de la fonction g définie par l'équation (4) de l'énoncé est égal à $(z^2+a^2)\sin(\pi z)$ et est nul si $z = a_l$ avec $l = 1$ ou 2 ou si $\sin(\pi z) = 0$, ce qui est équivalent à $e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 0$, soit $e^{2i\pi z} = 1$, soit z entier. L'ensemble des pôles de la fonction g est donc égal à $\Big((z_l)_{1\leq l\leq 2} \cup \mathbb{Z}\Big)$.

(3) D'après le lemme 3.34 du cours, on a, pour tout k entier relatif, qui n'est donc pas un zéro de f,

$$\text{Rés}\,(g,k) = \frac{\pi f(k)\cos(\pi k)}{[\sin \pi z]'_{z=k}} = \frac{\pi f(k)\cos(\pi k)}{\pi \cos(\pi k)} = f(k).$$

(4) Pour N entier non nul, on définit γ_N le chemin carré de $\mathbb{C}$, de centre l'origine et passant par le point d'affixe $N + 1/2$ (voir la figure 1 de l'énoncé). On choisit N assez grand de façon que γ_N contiennent tous les pôles de f.

D'après le théorème des résidus, il vient donc

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z)\text{cotg}(\pi z)dz = 2i\pi \sum_{n=-N}^{N} \text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), n) + 2i\pi \sum_{l=1}^{2} \text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l)\,, \tag{2}$$

(5) *On admet que*

$$\lim_{N\to+\infty} \left|\int_{\gamma_N} \pi f(z)\text{cotg}(\pi z)dz\right| = 0. \tag{3}$$

Voir page 163 de l'annexe du cours G. D'après le résultat de la question 3

$$2i\pi \sum_{n=-N}^{N} \text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), n) = 2i\pi \sum_{n=-N}^{N} f(n).$$

Enfin, si on passe à la limite $N \to \infty$ dans (2), on en déduit que la somme $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$ admet une limite quand N tend vers l'infini et vérifie

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{l=1}^{2} \text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l)\,. \tag{4}$$

(6) On a, pour $l = 1$ ou 2, d'après le lemme 3.34 du cours,

$$\text{Rés}\,(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l) = \pi\text{cotg}(\pi z_l)\frac{1}{[(z^2+1)']_{z=z_l}} = \pi\frac{\cos(\pi z_l)}{2\sin(\pi z_l)z_l}$$

et donc

$$\sum_{l=1}^{2} \text{Rés}\left(\pi f(z)\text{cotg}(\pi z), z_l\right) = \sum_{l=1}^{2} \pi \frac{\cos(\pi z_l)}{2\sin(\pi z_l) z_l},$$
$$= \frac{\pi}{ai}\frac{\cos(\pi a i)}{\sin(\pi a i)},$$
$$= \frac{\pi}{ai}\frac{(e^{-\pi a}+e^{\pi a})/2}{(e^{-\pi a}-e^{\pi a})/2i}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).$$

et donc

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a),$$

dont on déduit donc le résultat (2) de l'énoncé.

(7) On admet la continuité[1] de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ par rapport à a. Si on fait tendre a vers zéro dans le résultat (2) de l'énoncé, il vient

$$\lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}\right)$$

Après calculs, on montre que cette limite vaut $\pi^2/6$ et on retrouve donc le résultat classique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction de l'exercice 2.

(1) Le cas particulier $\beta = 0$ et α quelconque correspond à l'équation différentielle au sens des distributions suivante : on cherche une distribution T telle que

$$T'' + aT + bT' = \alpha\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{5}$$

qui a été étudiée dans la section 8.1 du chapitre 8, à laquelle on renvoie.

(a) On suppose que x appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution-fonction notée T_x. On obtient l'équation différentielle

$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = 0, \tag{6a}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = 0, \tag{6b}$$
$$x'(0) = \sigma' = \alpha, \tag{6c}$$

équation que l'on sait résoudre facilement en utilisant par exemple les transformée de Laplace (voir cours de OMI2) ou sous matlab symbolique.

1. ce qui n'est pas évident, car on intervertit une limite et une somme infinie

(b) Cette équation différentielle correspond au mouvement d'un point matériel de masse $m = 1$, soumis à un ressort linéaire de raideur k noté ici a et à un amortissement visqueux c, noté ici b, Il est repos, puis soumis à un choc, donné par $f = \alpha\delta$.

(c) La ditribution T obtenue est une fonction, de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, continue sur $\mathbb{R}$, mais de dérivée discontinue en zéro.

(2) On considère maintenant le cas général α et β quelconques.

(a) On procède exactement comme dans la section 8.1 : on résoud (5) en cherchant une solution sous la forme d'une distribution-fonction x, définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^*_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$. On notera σ et σ', les sauts de la fonction x et de sa dérivée en zéro :

$$\sigma = x_0 = x(0+0), \tag{7a}$$
$$\sigma' = x'_0 = x'(0+0). \tag{7b}$$

Puisque x appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution-fonction notée T_x. On considère donc que T_x est solution de

$$T''_x + aT_x + bT'_x = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{8}$$

que l'on pourra noter abusivement sous la forme

$$x'' + ax + bx' = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{9}$$

On refait maintenant des calculs identiques à ceux faits en section 7.5.1.1. Dérivons la distribution T_x grâce au lemme 6.27 page 82, ce qui est légitime car la restriction de x à $\mathbb{R}^*_+$ est de classe C^1 et x est nulle sur $\mathbb{R}_-$

$$T'_x = x' + \sigma\delta. \tag{10}$$

On applique cette fois-ci le lemme 6.27 page 82 à x' ce qui est légitime car les restrictions de x' à tout borné $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ est dans $H^1(\Omega)$:

$$T''_x = x'' + \sigma'\delta + \sigma\delta'. \tag{11}$$

Ainsi, (10) et (11), donnent

$$T''_x + aT_x + bT'_x = x'' + \sigma'\delta + \sigma\delta' + ax + bx' + b\sigma\delta$$

et donc

$$T''_x + aT_x + bT'_x = (x'' + ax + bx') + (\sigma' + b\sigma)\,\delta + \sigma\delta'. \tag{12}$$

Ainsi, (8) donne

$$(x'' + ax + bx') + (\sigma' + b\sigma - \alpha)\,\delta + (\sigma - \beta)\delta' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{13}$$

On utilise alors, un lemme généralisant le lemme 8.1. On a donc

$$\sigma = \beta, \tag{14a}$$
$$\sigma' + b\sigma = \alpha, \tag{14b}$$
$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = 0. \tag{14c}$$

On a donc

$$\sigma = \beta, \tag{15a}$$
$$\sigma' = \alpha - b\sigma. \tag{15b}$$

On résoud (14c) avec les conditions initiales

$$x(0) = \sigma,$$
$$x'(0) = \sigma',$$

en utilisant par exemple les transformée de Laplace (voir cours de OMI2) ou sous matlab symbolique.

(b) La ditribution T obtenue est une fonction, de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, mais discontinue en zéro.

(c) Ici, c'est encore plus violent qu'un choc avec une force égale à $f = \alpha\delta$, puisque $f = \alpha\delta + \beta\delta'$.

(d) Si on utilise le résultat de l'exercice de TD 4.3, on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} = -\delta'.$$

Ainsi, la force f est une combinaison linéaire de δ et de la limite de $\frac{\delta_h-\delta_{-h}}{2h}$ qui peut être vue comme deux chocs successifs opposé appliqués à deux instants, dont l'écart est très bref.