Corrigé de l'examen complémentaire du 8 juillet 2016

Correction de l'exercice 1.

On utilise simplement la définition 2.24 du cours :

– Il vient clairement

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 = 0, \tag{1b}$$

$$\operatorname{Ln}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}. \tag{1c}$$

– Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le module de $-1+\varepsilon i$ vaut $\sqrt{1+\varepsilon^2}$ et la détermination principale de son argument vaut θ où

$$\theta + \arctan\varepsilon = \pi.$$

Ainsi, on a $\theta = \pi - \arctan\varepsilon$ et donc

$$\operatorname{Ln}(-1+\varepsilon i) = \frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2) + i\left(\pi - \arctan\varepsilon\right). \tag{2}$$

– De même, on a

$$\operatorname{Ln}(-1-\varepsilon i) = \frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2) + i\left(-\pi + \arctan\varepsilon\right). \tag{3}$$

– En appliquant (2) avec $\varepsilon = 1$, on a

$$\operatorname{Ln}(-1+i) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4}. \tag{4}$$

– En appliquant (3) avec $\varepsilon = 1$, on a

$$\operatorname{Ln}(-1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{3i\pi}{4}. \tag{5}$$

Correction de l'exercice 2.

On pourra aussi consulter l'exercice 2 de l'examen du 15 décembre 2014, disponible sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/examOMI3A14.pdf`
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/examcorOMI3A14.pdf`
qui montre aussi les utilisations du logarithme complexe, dangereuses, si on ne prend pas les précaution d'emploi !

(1) (a) On paramétrise le segment $[1, 1+i]$ par $z = 1+it$ où $t \in [0,1]$. Ce segment ne contient par l'origine et la fonction $f(z) = 1/z$ y est donc continue. D'après la définition (3.1), on a donc $dz = idt$ et

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(1+it)idt,$$

et donc

$$I = i\int_0^1 \frac{1}{1+it}dt. \tag{6}$$

(b) Pour calculer cette intégrale, on peut passer par les parties réelles et imaginaires de l'intégrande qui vaut :

$$G(t)=\frac{1}{1+it}=\frac{1-it}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}-i\frac{t}{1+t^2}.$$

Or, on a classiquement

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt=\arctan t, \tag{7a}$$

$$\int \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right). \tag{7b}$$

La seconde primitive se calcule en écrivant classiquement

$$\int \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(|1+t^2|)=\frac{1}{2}\ln(1+t^2).$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}I&=i\left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt-i\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt\right),\\&=i\left(\arctan(1)-\arctan(0)-\frac{i}{2}\left(\ln\left(1+1^2\right)-\ln\left(1+0^2\right)\right)\right)=i\arctan(1)+\frac{1}{2}\ln 2,\end{aligned}$$

et donc

$$I=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{i\pi}{4}. \tag{8}$$

(c) Le segment $[1,1+i]$ ne rencontre pas la coupure $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}$ et donc une primitive de $1/z$ est $F(z)=\operatorname{Ln} z$. D'après la proposition 3.15 du cours, on a donc

$$I=\int_\gamma f(z)dz=F(1+i)-F(1)=\operatorname{Ln}(1+i)-\operatorname{Ln} 1.$$

Il suffit alors de réutiliser les résultats (1a) et (1b) de l'exercice 1 :

$$I=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$$

et on retrouve donc (8) très rapidement !

(2) (a) Calculons l'intégrale en question à la fois pour la question 2 et la question 3. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On procède exactement de la même façon : on paramétrise le segment $[x-i,x+i]$ par $z=x+it$ où $t\in[-1,1]$ de sorte que $dz=idt$ et comme précédemment, on a

$$I=i\int_{-1}^1 \frac{1}{x+it}dt. \tag{9}$$

On écrit ensuite

$$G(t)=\frac{1}{x+it}=\frac{x-it}{x^2+t^2}=\frac{x}{x^2+t^2}-i\frac{t}{x^2+t^2},$$

et

$$I=i\left(\int_{-1}^1 \frac{xdt}{x^2+t^2}-i\int_{-1}^1 \frac{tdt}{x^2+t^2}\right)$$

(b) Dans chacune des intégrales, on fait le changement de variable (à $x\neq 0$ fixé) $t=xu$ de sorte que $dt=xdu$ et

$$\begin{aligned}I&=i\left(\int_{-1/x}^{1/x} \frac{x^2du}{x^2+x^2u^2}-i\int_{-1/x}^{1/x} \frac{x^2udu}{x^2+x^2t^2}\right),\\&=i\left(\int_{-1/x}^{1/x} \frac{du}{1+u^2}-i\int_{-1/x}^{1/x} \frac{udu}{1+u^2}\right),\end{aligned}$$

et par parité

$$\begin{aligned}&= 2i\int_0^{1/x}\frac{du}{1+u^2},\\ &= 2i\arctan\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Bref, on a

$$I = 2i\arctan\left(\frac{1}{x}\right). \tag{10}$$

En particulier, pour $x = 1$, on a

$$I = \frac{i\pi}{2}. \tag{11}$$

(c) Le segment $[1-i, 1+i]$ ne rencontre pas la coupure $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}$ et donc une primitive de $1/z$ est $F(z) = \operatorname{Ln} z$. D'après la proposition 3.15 du cours, on a donc

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(1+i) - F(1-i) = \operatorname{Ln}(1+i) - \operatorname{Ln}(1-i),$$

et d'après les résultats de l'exercice 1 :

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

et on retrouve donc de nouveau (11) très rapidement !

(3) (a) Si on utilise la formule (10) pour $x = -1$, on retrouve bien

$$I = \int_{[-1-i,-1+i]}\frac{dz}{z} = i\int_{-1}^{1}\frac{1}{-1+it}dt = -\frac{i\pi}{2}. \tag{12}$$

Si on écrit comme précédemment, il vient

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(-1+i) - F(-1-i) = \operatorname{Ln}(-1+i) - \operatorname{Ln}(-1-i),$$

et d'après les résultats de l'exercice 1 :

$$I = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4} = \frac{3i\pi}{2},$$

ce qui n'est plus cette fois-ci la valeur donnée par (12) !

(b) Cela vient du fait que contrairement aux calculs précédents, le segment $[-1-i, -1+i]$ rencontre la coupure $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}$ et donc on ne peut plus utiliser la proposition 3.15 du cours pour calculer l'intégrale I grâce à la primitive de $1/z$; en effet, le logarithme n'est pas défini en -1 et donc non holomorphe sur tout le segment $[-1-i, -1+i]$.

(c) On peut pallier cet inconvénient de plusieurs façon.

(i) On peut isoler l'intersection de $[-1-i, -1+i]$ et de $\mathbb{R}_-$: on considère $\varepsilon > 0$ et on considère que

$$[-1-i, -1+i] = [-1, i, -1-i\varepsilon] \cup [-1-i\varepsilon, -1+i\varepsilon] \cup [-1+i\varepsilon, -1+i]$$

de sorte que

$$I = \int_\gamma f(z)dz = \int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz + \int_{[-1-i\varepsilon,-1+i\varepsilon]} f(z)dz + \int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz. \tag{13}$$

Puisque f est continue sur $[-1-i\varepsilon,-1+i\varepsilon]$, elle est en particulier bornée et la proposition 3.9 du cours implique que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{[-1-i\varepsilon,-1+i\varepsilon]} f(z)dz = 0 \tag{14}$$

et donc, d'après (13),

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz + \int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz. \tag{15}$$

À $\varepsilon>0$ fixé, chacun des segments $[-1-i,-1-i\varepsilon]$ et $[-1+i\varepsilon,-1+i]$ ne rencontre de nouveau plus $\mathbb{R}_-$ et donc on peut lui appliquer de nouveau la proposition 3.15 :

$$\int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz = \mathrm{Ln}(-1+i)-\mathrm{Ln}(-1+i\varepsilon),$$
$$\int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz = \mathrm{Ln}(-1-i\varepsilon)-\mathrm{Ln}(-1-i).$$

Ainsi, d'après les résultats de l'exercice 1, il vient

$$\begin{aligned}&\int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz + \int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz\\ &= \frac{1}{2}\ln(2)+\frac{3i\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{3i\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2)-i\left(\pi-\arctan\varepsilon\right)+\frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2)+i\left(-\pi+\arctan\varepsilon\right),\\ &= \frac{3i\pi}{2}+2i\arctan\varepsilon-2i\pi.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite $\varepsilon\to 0$, cette dernière égalité et (15) impliquent

$$I = -\frac{i\pi}{2},$$

ce qui est exactement (12), cette fois-ci !

(ii)

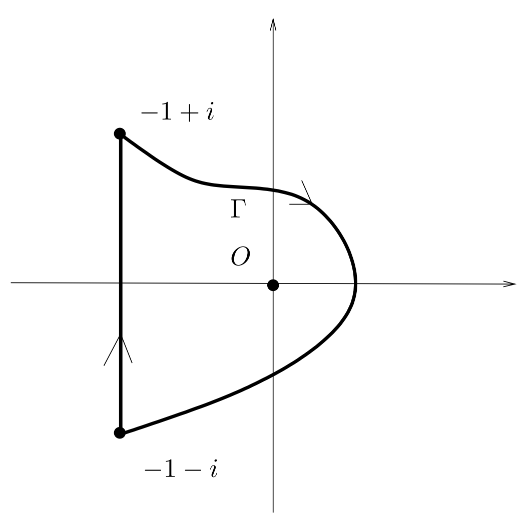

FIGURE 1. Le chemin Γ.

Une autre preuve est de compléter le segment $[-1-i,-1+i]$ par un chemin Γ, qui ne passe par $\mathbb{R}_-$, de telle sorte que $\widetilde{\Gamma}=[-1-i,-1+i]\cup\Gamma$ constitue un chemin fermé qui fait une fois le tour de 0, comme le montre la figure 1 et qui soit inclus dans le plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. On a alors

$$\int_{\widetilde{\Gamma}}\frac{dz}{z}=-2i\pi. \tag{16}$$

En effet, on peut montrer cela de deux façons :

- L'indice de 0 par rapport à Γ est égal à -1 (puisque l'on tourne dans le sens des aiguille d'une montre ! voir remarque 3.13 du cours) et donc d'après la définition 3.3 du cours, on a
$$\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=2i\pi\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=-2i\pi.$$
- Une autre façon [1] est d'appliquer la formule des résidus 3.33 (équation (3.30) avec un signe -1 puisque l'on tourne dans le sens des aiguille d'une montre) à la fonction $1/z$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et ayant un pôle d'ordre 1 en 0 :
$$\int_\Gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=-2i\pi\,\mathrm{Rés}(f,0)$$
On a $\mathrm{Rés}(f,0)=1/[z']_{z=0}=1$ et on peut conclure.

On écrit enfin grâce à (16)

$$-2i\pi=\int_{\widetilde{\Gamma}}\frac{dz}{z}=\int_\Gamma\frac{dz}{z}+\int_{[-1-i,-1+i]}\frac{dz}{z},$$

et donc

$$I=\int_{[-1-i,-1+i]}\frac{dz}{z}=-2i\pi-\int_\Gamma\frac{dz}{z} \tag{17}$$

Puisque Γ ne passe par $\mathbb{R}_-$, on peut donc écrire, cette fois-ci de nouveau

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z}=\mathrm{Ln}(-1-i)-\mathrm{Ln}(-1+i)=-\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{3i\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{3i\pi}{4}$$

et donc

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z}=-\frac{3i\pi}{2}. \tag{18}$$

D'après (17) et (18), il vient donc

$$I=-2i\pi+\frac{3i\pi}{2}=-\frac{i\pi}{2},$$

ce qui est exactement (12).

Remarque 1. Matlab connaît le logarithme complexe et intégre symboliquement en l'utilisant. Si on tape successivement

```
syms x;
int(1/x,1,1+i)
int(1/x,1-i,1+i)
int(1/x,-1-i,-1+i)
```

1. Mais qui revient en théorie au même puisque c'est ainsi qu'est démontrée la formule des résidus !

on obtiendra successivement les résultats

$$\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi\,\mathrm{i}}{4},$$
$$\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2},$$
$$-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}.$$

Les deux premiers sont conformes aux calculs précédents (8), (11) et même (12). On peut aussi passer par les parties et réelles et imaginaires en utilisant (6), (9) et (12) et taper

```
syms x;
int(i/(1+i*x),0,1)
int(i/(1+i*x),-1,1)
int(i/(-1+i*x),-1,1)
```

pour obtenir successivement les mêmes résultats

$$\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi\,\mathrm{i}}{4},$$
$$\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2},$$
$$-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}.$$

Correction de l'exercice 3.

La fonction f donnée par

$$f(z) = \frac{z}{z^4+1}$$

a quatre pôles simples donnés par $z^4+1=0$, soit encore

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^4 = 1$$

ou z_0 est une racine quatrième donnée de -1, par exemple $z_0 = e^{i\pi/4}$. On a donc les quatre pôles de f donnés par

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}(2k+1)}, \quad k \in \{0, ..., 3\}.$$

Seul le pôle z_0 est à l'intérieur du chemin $\mathcal{C}_R$ donné par l'énoncé.

La formule des résidus donne donc, pour $R \geq 1$:

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz = 2i\pi\,\mathrm{Rés}(f, z_0)$$

Le résidu se calcule ainsi

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = \left[\frac{z}{(z^4+1)'}\right]_{z=z_0} = \left[\frac{z}{4z^3}\right]_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0^2} = z_0^{-2}/4 = e^{-i\pi/2}/4 = -i/4,$$

et on a donc

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale $\mathcal{J}$ se décompose sous la forme

$$\mathcal{J} = \int_0^R \frac{x}{x^4+1}dx + \int_{\mathcal{D}_R} f(z)dz + \int_R^0 \frac{(it)}{(it)^4+1}idt$$

où $\mathcal{D}_R$ est le quart de cercle décrit dans l'énoncé. Il en découle donc

$$2\int_0^R \frac{x}{x^4+1}dx + \int_{\mathcal{D}_R} f(z)dz = \frac{\pi}{2}$$

Un petit coup de lemme de jordan nous dit que l'intégrale sur $\mathcal{D}_R$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini et donc que

$$\int_0^R \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 4.

Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 6, l'annexe D et la section 8.5.2.1 du cours.

(1) Soit $\phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$. On considère la fonction $\widetilde{\phi}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ égale à ϕ_1 sur $[0,1/2]$ et nulle ailleurs. On a donc

$$\langle v_1^{(4)}, \phi_1\rangle = \langle v_1, \phi_1^{(4)}\rangle = \int_0^{1/2} v_1(x)\phi_1^{(4)}(x)dx = \int_0^1 v(x)\widetilde{\phi}^{(4)}(x)dx = \langle v, \widetilde{\phi}^{(4)}\rangle = \langle v^{(4)}, \widetilde{\phi}\rangle = \langle \delta_{1/2}, \widetilde{\phi}\rangle = \widetilde{\phi}(1/2) = 0.$$

On a donc

$$\forall \phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1), \quad \langle v_1^{(4)}, \phi_1\rangle = 0$$

et donc dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega_2)$), la distribution $v_1^{(4)}$ (resp. $v_2^{(4)}$) est nulle.

(2) (a) La distribution-fonction $v_1^{(4)}$ est nulle et v_1 est donc un polynôme de degré au plus trois. Il en est de même de v_2. On a donc

$$v_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{19a}$$

$$v_2(x) = ex^3 + gx^2 + gx + h, \tag{19b}$$

où a, ..., h sont des réels.

(b) Supposons que

$$v^{(4)} = \delta_{1/2}, \tag{20}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = 0, \tag{21a}$$

$$v'(0) = 0, \tag{21b}$$

$$v^{(2)}(0) = 0, \tag{21c}$$

$$v^{(3)}(0) = 0. \tag{21d}$$

De (21), on déduit donc

$$v_1(0) = 0, \tag{22a}$$

$$v_1'(0) = 0, \tag{22b}$$

$$v_2^{(2)}(1) = 0, \tag{22c}$$

$$v_2^{(3)}(1) = 0. \tag{22d}$$

Puisque l'on cherche v de classe $\mathcal{C}^2$, la valeur à gauche en $1/2$ et est égale à la valeur à droite en $1/2$. Il est de même de la dérivée d'ordre un et deux. On a donc

$$v_1(1/2) = v_2(1/2), \tag{22e}$$

$$v_1'(1/2) = v_2'(1/2), \tag{22f}$$

$$v_1^{(2)}(1/2) = v_2^{(2)}(1/2). \tag{22g}$$

Enfin, la formule des saut pour la fonction $v^{(3)}$ fournit

$$v^{(4)} = \sigma\delta_{1/2}$$

où $\sigma_{1/2} = v_2^{(3)}(1/2) - v_1^{(3)}(1/2)$. En identifiant avec (20), on obtient donc

$$v_2^{(3)}(1/2) - v_1^{(3)}(1/2) = 1. \tag{22h}$$

La réciproque se montre de la même façon.

(c) Compte tenu de (19), les équations (22) sont équivalentes à huit équations, données par

$$d = 0, \tag{23a}$$
$$c = 0, \tag{23b}$$
$$6\,e + 2\,f = 0, \tag{23c}$$
$$6\,e = 0, \tag{23d}$$
$$1/8\,e + 1/4\,f + 1/2\,g + h - 1/8\,a - 1/4\,b - 1/2\,c - d = 0, \tag{23e}$$
$$3/4\,e + f + g - 3/4\,a - b - c = 0, \tag{23f}$$
$$3\,e + 2\,f - 3\,a - 2\,b = 0, \tag{23g}$$
$$6\,e - 6\,a - 1 = 0, \tag{23h}$$

qui forme un système linéaire.

(d) Après résolution, on a donc les huits valeurs des inconnues a à h, données par

$$a = -1/6, \tag{24a}$$
$$b = 1/4, \tag{24b}$$
$$c = 0, \tag{24c}$$
$$d = 0, \tag{24d}$$
$$e = 0, \tag{24e}$$
$$f = 0, \tag{24f}$$
$$g = 1/8, \tag{24g}$$
$$h = -1/48. \tag{24h}$$

On en déduit donc les deux fonctions

$$v_1 = -1/6\,x^3 + 1/4\,x^2, \tag{25a}$$
$$v_2 = 1/8\,x - 1/48. \tag{25b}$$
$$\tag{25c}$$

On retrouve donc bien les équations (6.6) du cours.