POLYTECH LYON | Université Claude Bernard Lyon 1

Mécanique 4A OMI3 | Automne 2022

Corrigé de l'examen complémentaire du 02 Février 2023

Correction de l'exercice 1.
Cet exercice est traité dans l'annexe H page 217 du cours, rappelée ci-dessous :

(1) On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \tag{1}$$

Les pôles de f sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les z complexes tels que

$$1 + z^4 = 0. \tag{2}$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (2), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

puisque

$$z_0^4 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions z de (2) sous la forme

$$Z = zz_0,$$

ce qui donne

$$Z^4 = (zz_0)^4 = z^4 z_0^4 = -1,$$

et donc, puisque $z_0^4 = -1$, on a

$$z^4 = 1,$$

ce qui nous montre que z est une racine quatrième de l'unité, donc dans l'ensemble $\{1, i, -1, -i\}$, ce qui nous donne :

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } \{z_0, z_1 = iz_0, z_2 = -z_0, z_3 = -iz_0\} \text{ où } z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \tag{3}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } z_k = e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{ik\pi}{2}}, \text{ pour } k \in \{0,1,2,3\}. \tag{4}$$

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

sur le cercle trigonométrique, de module $\pi/4$, par l'identité et les trois rotations, d'angles $\pi/2$, π et $3\pi/2$ de centre 0.

Voir la figure 1.

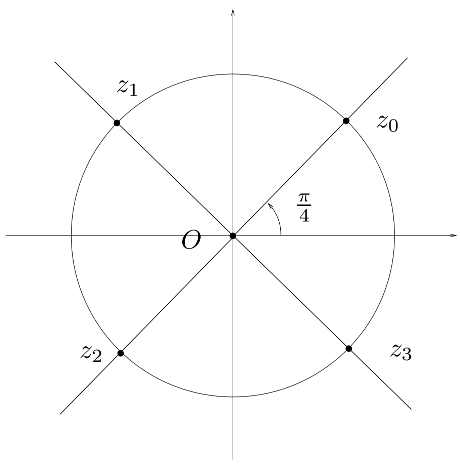


FIGURE 1. Les pôles z_0, z_1, z_2 et z_3 de f.

(2) Si on applique la proposition 5.5 page 53 du cours à la fonction f donnée par (1), on aura

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x}{1+x^4}dx = 2i\pi\sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés au dessus de l'axe des x. Or, la fonction $\frac{x}{1+x^4}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi\sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx. \tag{5}$$

(3) La technique utilisée ci-dessous est proche de celle de l'annexe J page 231 du cours.

(a)

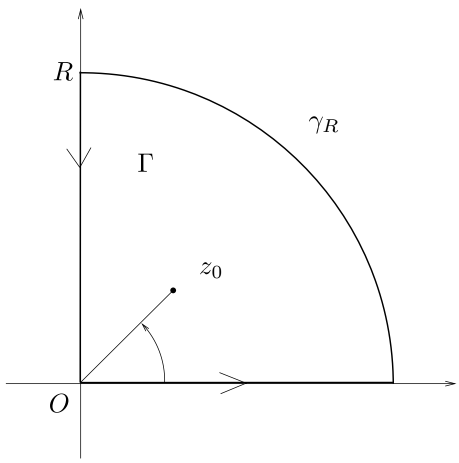


FIGURE 2. Le chemin Γ considéré et l'unique pôle z_0 de f à l'intérieur de Γ.

Pour $R>0$ assez grand, le seul pôle de f à l'intérieur de Γ est z_0, comme le montre la figure 2 page ci-contre. Le théorème 3.44 page 40 du cours appliquée à la fonction f sur le chemin Γ à $R>0$ donne :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, z_k), \tag{6}$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ. Ici, le seul pôle est z_0 d'ordre un, car le polynôme z^4+1 est égal à $(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. On a donc, d'après le lemme 3.47 page 43 du cours :

$$\begin{aligned}
2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) &= 2i\pi \,\text{Rés}(f, z_0),\\
&= 2i\pi \frac{z_0}{\left[1+z^4\right]'_{z=z_0}},\\
&= 2i\pi \frac{z_0}{\left[4z^3\right]'_{z=z_0}},\\
&= 2i\pi \frac{z_0}{4z_0^3},\\
&= \frac{i\pi}{2}\frac{1}{z_0^2},\\
&= \frac{i\pi}{2} z_0^{-2},\\
&= \frac{i\pi}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{-2},\\
&= \frac{i\pi}{2} e^{\frac{-2i\pi}{4}},\\
&= \frac{i\pi}{2} e^{\frac{-i\pi}{2}},\\
&= \frac{i\pi}{2}\frac{1}{i},
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Décomposons maintenant l'intégrale de gauche de (7) en deux trois terme, chacun correspondant à à l'arc de cercles de centre l'origine O et de rayon et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des x et l'axe des y comme le montre la figure 2 page précédente. Le premier segment, inclus dans l'axe des x, est paramétré par

$$z=\gamma(t),\ \text{où } \gamma(t)=t \text{ avec } t\in[0,R], \tag{8}$$

le second, inclus dans l'axe des y est paramétré par

$$z=\gamma(t),\ \text{où } \gamma(t)=it \text{ avec } t\in[R,0]. \tag{9}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_0^R f(t)dt + \int_R^0 f(it)idt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,\\
&= \int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt - i\int_0^R \frac{it}{(it)^4+1}dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,\\
&= \int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt + \int_0^R \frac{t}{i^4t^4+1}dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,
\end{aligned}$$

et donc, d'après (7),

$$\int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

(b) Démontrons la formule suivante, donnée dans l'énoncé :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{11}$$

Elle provient du lemme de Jordan 5.6 page 60 de la version longue du cours, appliqué à $z_0 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $z_0 = 0$ et $R_0 = +\infty$. L'égalité (5.13) page 60 de la version longue du cours a lieu, puisque, quand $|z|$ tend vers l'infini :

$$|zf(z)| = \left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \sim \left|\frac{z^2}{z^4}\right| = \frac{1}{|z|^2},$$

tend vers zéro. On en déduit (11). De (10), on déduit donc en faisant tendre R vers l'infini :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{4}. \tag{12}$$

(4) De façon générale, pour intégrer ce type de fonctions, il faut décomposer en éléments simples et appliquer les techniques présentées par exemple dans [Bas22, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"]. Mais, ici, il est très rapide de procéder ainsi : Faisons le changement de variable $u = x^2$ qui donne $du = 2xdx$ et donc

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan(x^2),$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\left(\arctan(+\infty) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

ce qui permet de retrouver (12).

Correction de l'exercice 2.

Cet exercice correspond à l'exercice 7.1 de TD.

(1) Issu de [Sau, Exercice 86].

Écrivons successivement les différentes définitions : soit ϕ une fonction test. On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle \delta_a * \delta_b, \phi\rangle &= \langle \delta_b, \langle \delta_a, \phi(.+x)\rangle\rangle,\\
&= \langle \delta_b, [\phi(.+x)]_{.=a}\rangle,\\
&= \langle \delta_b, \phi(a+x)\rangle,\\
&= [\phi(a+x)]_{x=b},\\
&= \phi(a+b),\\
&= \langle \delta_{a+b}, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}.$$

(2) (a) Il suffit de reprendre le calcul de la question 1 dans le cas plus général : pour toute fonction test ϕ, on a

$$\langle \delta_a * T, \phi\rangle = \langle T, \langle \delta_a, \phi(.+x)\rangle\rangle$$

et donc

$$\langle \delta_a * T, \phi\rangle = \langle T, \phi(a+x)\rangle. \tag{13}$$

(b) Si $T = f$, on a donc, selon (13),

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * T, \phi\rangle &= \langle f, \phi(a+x)\rangle,\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(a+x)dx,\end{aligned}$$

intégrale dans laquelle, on fait le changement de variable $u = a + x$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}} f(u-a)\phi(u)du,\\ &= \langle f(.-a), \phi\rangle,\end{aligned}$$

et donc $\delta_a * f$ est une distribution donnée par

$$\delta_a * f = f(.-a), \tag{14}$$

qui appartient donc à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3.
Les résultats de cet exercice correspondent aux résultats des sections 8.1 et 8.2 du chapitre 8 du cours.
On renvoit à l'annexe A et surtout à l'annexe B qui reprennent l'ensemble des résultats théoriques de cet exercice.

Correction de l'exercice 4.
Cet exercice correspond à l'exercice 6.12 de TD.

(1) Comme promis dans la correction de l'examen du 17 janvier 2023, une méthode beaucoup plus élégante vous est présentée pour traiter cette question !

(a) D'après l'hypothèse (12) de l'énoncé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad a_n > B. \tag{15}$$

(b) Il suffit de renvoyer au lemme 6.37 que l'on reproduit avec sa preuve, ci-dessous :

Lemme 1 (Intégration par partie générale)**.** *Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$, f continuement dérivable sur $]\alpha, \beta[$ possédant une limite à droite en α, notée $f(\alpha+0)$ et une limite à gauche en β, notée $f(\beta+0)$; on suppose de plus*

$$f' \in L^1_{loc}(]\alpha, \beta[). \tag{16}$$

Soit ϕ, continuement dérivable sur $[\alpha, \beta]$. Alors,

$$f \in L^1_{loc}(]\alpha, \beta[), \tag{17}$$

et

$$\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx + f(\beta-0)\phi(\beta) - (\alpha+0)\phi(\alpha). \tag{18}$$

Démonstration. Considérons X et Y tels que

$$\alpha < X < Y < \beta. \tag{19}$$

Par hypothèse, f et ϕ sont continuement dérivables sur $[X, Y]$ et la formule d'intégration classique donne

$$\int_X^Y f(x)\phi'(x)dx = -\int_X^Y f'(x)\phi(x)dx + [f\phi]_X^Y,$$

et donc

$$\int_X^Y f(x)\phi'(x)dx = -\int_X^Y f'(x)\phi(x)dx + f(Y)\phi(Y) - f(X)\phi(X). \tag{20}$$

Puisque f est continue sur $]\alpha,\beta[$ et admet des limites à droite et à gauche en α et β, elle se prolonge en une fonction continue sur $[\alpha,\beta]$, ce dont on déduit (17). Ainsi $f\phi'$ est intégrable sur $[\alpha,\beta]$ et le théorème de convergence dominée (voir théorème Q.3) implique que :

$$\lim_{\substack{X\to\alpha, X>\alpha,\\ Y\to\beta, Y>\alpha}} \int_X^Y f(x)\phi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)dx. \tag{21}$$

D'après (16), on a de même

$$\lim_{\substack{X\to\alpha, X>\alpha,\\ Y\to\beta, Y>\alpha}} \int_X^Y f'(x)\phi(x)dx = \int_\alpha^\beta f'(x)\phi(x)dx. \tag{22}$$

Par définition de $f(\alpha+0)$ et et $f(\beta+0)$ et puisque ϕ est continue en α et β, on a

$$\lim_{X\to\alpha, X>\alpha} f(X)\phi(X) = f(\alpha+0)\phi(\alpha), \tag{23a}$$

$$\lim_{Y\to\beta, Y<\beta} f(X)\phi(X) = f(\beta-0)\phi(\beta). \tag{23b}$$

Il suffit donc de passer à la limite $X\to\alpha$ avec $X>\alpha$ et $Y\to\beta$ avec $Y<\beta$ et d'utiliser (20) (21), (22) et (23). $\square$

(c) Procédons exactement comme dans le point 3 82 du cours. Soit $i\in\{1,...,N-2\}$. Appliquons le lemme 1 avec $\alpha=a_i$ et $\beta=a_{i+1}$, ce qui donne

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx + f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i),$$

et donc

$$\forall i\in\{1,...,N-2\},\quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx + f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i). \tag{24}$$

Si on somme toute ces égalités pour i décrivant $\{1,...,N-2\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx &= \sum_{i=1}^{N-2}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx,\\
&= \sum_{i=1}^{N-2}\left(-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx + f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i)\right),\\
&= \sum_{i=1}^{N-2}\left(-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx\right) + \sum_{i=1}^{N-2}\left(f(a_{i+1})\phi(a_{i+1}-0) - f(a_i+0)\phi(a_i)\right),\\
&= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{N-2} f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - \sum_{i=1}^{N-2} f(a_i+0)\phi(a_i),
\end{aligned}$$

on manipule les somme pour faire apparaître les sauts de f ; on commence par isoler les deux termes initial et final des deux sommes :

$$= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{N-3} f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - \sum_{i=2}^{N-2} f(a_i+0)\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1),$$

on pose $i'=i+1$ dans la première somme que l'on réécrit ensuite i :

$$\begin{aligned}
&= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=2}^{N-2} f(a_i-0)\phi(a_i) - \sum_{i=2}^{N-2} f(a_i+0)\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1),\\
&= -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=2}^{N-2}\left(f(a_i-0) - f(a_i+0)\right)\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1),
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{N-2}\sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1+0)\phi(a_1). \tag{25}$$

On conclut exactement comme dans le point 3 82 du cours.

De la même façon que dans la question 1c, on obtient en utilisant les deux hypothèses (24) et (25) de l'énoncé

$$\int_A^{a_1} f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^{a_1} f'(x)\phi(x)dx + f(a_1 - 0)\phi(a_1), \tag{26a}$$

$$\int_{a_{N-1}}^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_{N-1}}^B f'(x)\phi(x)dx - f(a_{N-1} + 0)\phi(a_{N-1}). \tag{26b}$$

Bref, si on somme (25) et (26), on obtient

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{N-2} \sigma_{a_i}\phi(a_i)\\ + f(a_{N-1} - 0)\phi(a_{N-1}) - f(a_{N-1} + 0)\phi(a_{N-1}) - f(a_1 + 0)\phi(a_1) + f(a_1 - 0)\phi(a_1),\end{aligned}$$

soit encore

$$\int_A^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i}\phi(a_i). \tag{27}$$

Enfin, d'après l'hypothèse (25) de l'énoncé, pour tout $n \geq N$, $\phi(a_n) = 0$ puisque a_n est en dehors du support de ϕ. Ainsi, (27) s'écrit aussi

$$\forall n \geq N, \quad \int_A^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{a_i}\phi(a_i). \tag{28}$$

et en particulier, en passant à la limite $n \to +\infty$, puisque cette dernière somme est finie et indépendante de n :

$$\int_A^B f(x)\phi'(x)dx = -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i). \tag{29}$$

(d) Bref, on conclut en écrivant, grâce à (29)

$$\begin{aligned}\langle T_f', \phi\rangle &= -\langle T_f, \phi'\rangle,\\ &= -\langle f, \phi'\rangle,\\ &= -\int_A^B f(x)\phi'(x)dx,\\ &= \int_A^B f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i),\\ &= \int_A^B f'(x)\phi(x)dx + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\langle\delta_{a_i}, \phi\rangle,\\ &= \left\langle f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}, \phi\right\rangle.\end{aligned}$$

Remarque 2. Notons que grâce aux équations (28) et (29), on a aussi montré que

$$\text{la distribution } \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} \text{ existe.} \tag{30}$$

Remarque 3. La démontration de l'équation (17) de l'énoncé se fait exactement de la même façon.

(2) La méthode est tout à fait identique à celle de la question 1.

(a) La suite a_n est strictement monotone donc l'existence de l provient du théorème de la limite monotone. Voir par exemple [Bas22, Chapitre "Suites"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`.

(i) On raisonne exactement comme dans la question 1c.

(ii) Précisons les différents passages à la limite dans les différents termes de l'équation (27) de l'énoncé. On rappelle l'hypothèse (18) de l'énoncé.

(A) On rappelle que d'après l'équation (13) de l'énoncé, $f'\phi$ appartient elle aussi à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir théorème Q.3 page 275 du cours.), on a

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{a_1}^{a_{N-1}} f(x)\phi'(x)dx = \int_{a_1}^{l} f(x)\phi'(x)dx. \tag{31}$$

(B) On montre de même que $f\phi'$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{a_1}^{a_{N-1}} f'(x)\phi(x)dx = \int_{a_1}^{l} f'(x)\phi(x)dx. \tag{32}$$

(C) Puisque ϕ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, on peut considérer le maximum M de $|\phi|$ sur $[A,B]$. On a donc, d'après l'hypothèse (20a) de l'énoncé

$$\begin{aligned}\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{i=2}^{N-2} |\sigma_{a_i}\phi(a_i)| &\leq M \sum_{i=2}^{N-2} |\sigma_{a_i}\phi(a_i)|,\\ &\leq M\sum_{i=2}^{+\infty} |\sigma_{a_i}\phi(a_i)|,\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

La série de terme général $\sigma_{a_n}\phi(a_n)$ converge donc et on a

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=2}^{N-2} \sigma_{a_i}\phi(a_i) = \sum_{i=2}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i). \tag{33}$$

Remarque 4. Comme dans la remarque 2, notons que grâce à l'équation (33) on a aussi montré (30).

(D) Montrons que l'hypothèse (20b) de l'énoncé implique

$$\lim_{N\to+\infty} f(a_{N-1}-0)\phi(a_{N-1}) = f(l-0)\phi(l). \tag{34}$$

Démontrons le lemme suivant, qui permet de démontrer (34).

Lemme 5. *Soient α et β, tels que $\alpha<\beta$ et f définie sur $[\alpha,\beta[$, ayant une limite à gauche en β, notée $f(\beta-0)$. Soit (u_n) une suite d'élements de $[\alpha,\beta[$ tendant vers β. On suppose que*

pour tout $n\in\mathbb{N}$, f admet une limite à gauche en u_n, notée $f(u_n-0)$. (35)

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n-0) = f(\beta-0). \tag{36}$$

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après (35), pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que

$$\forall x\in]u_n-r,u_n[,\quad |f(u_n-0)-f(x)|\leq\varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1/n$, il existe

$$v_n \in]u_n - 1/n, u_n[\tag{37}$$

tel que

$$|f(u_n - 0) - f(v_n)| \leq \frac{1}{n}. \tag{38}$$

Il suffit ensuite de passer à la limite $n \to +\infty$. Le théorème des gendarmes, l'hypothèse sur u_n et (37) impliquent

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \beta,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in]\alpha, \beta[.$$

Ainsi, puisque f possède une limite à gauche en β, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(\beta - 0). \tag{39}$$

On conclut grâce en passant à la limite $n \to +\infty$ dans (38) et (39). □

Ainsi, le passage à la limite dans l'équation (27) de l'énoncé implique compte tenu de (31), (32), (33), (34) :

$$\int_{a_1}^{l} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{a_1}^{l} f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(l-0)\phi(l) - f(a_1+0)\phi(a_1). \tag{40}$$

Enfin, de la même façon que dans la question 1c, on obtient (26a) et

$$\int_{l}^{B} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{l}^{B} f'(x)\phi(x)dx - f(l+0)\phi(l). \tag{41}$$

Ainsi, la somme de (26a), (40) et (41) fournit

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)\phi'(x)dx &= -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i) + f(l-0)\phi(l) - f(a_1+0)\phi(a_1) + f(a_1-0)\phi(a_1) - f(l+0)\phi(l),\\
&= -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=2}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i) - \sigma_{a_1}\phi(a_1) - \sigma_l\phi(l),\\
&= -\int_A^B f'(x)\phi(x)dx - \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i) - \sigma_l\phi(l),
\end{aligned}$$

ce qui donne exactement l'équation (21) de l'énoncé.

Remarque 6. L'équation (22) de l'énoncé se montre de la même façon.

Remarque 7. On renvoie aux sections C.1, C.2 et C.3 de l'annexe C où sont traités trois exemples de formules de saut avec un nombre infinis de discontinuités.

Annexe A. Résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 1

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \mathcal{F}. \tag{42}$$

L'"inconnue" est ici la distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La notion de condition initiale n'a pas de sens au sens de distributions. Nous reviendrons dessus plus bas. La résolution de cette équation différentielle est très proche de la suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{43}$$

où l'"inconnue" est ici la fonction y, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On renvoie à la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf` dont on s'inspire pour résoudre (42).
Nous allons

— en section A.2, donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (42) ;
— en section A.3.1, donner les réponses impulsionnelles, c'est-à-dire les solutions de (42) avec un second membre égal à δ ;
— en section A.3.3, donner les solutions générales de l' 'équation différentielle (42) ;
— et enfin, en section A.4, retrouver la solution générale connue d'une équation différentielle ordinaire bien connue, comme cas particulier.

A.1. Un lemme sur la "variation de la constante"

Lemme 8 (Variation de la constante)**.** *La distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle* (42) *si et seulement si la distribution C définie par*

$$C = e^{bt/a} Y, \tag{44}$$

vérifie

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} e^{bt/a} \mathcal{F}. \tag{45}$$

Démonstration. Notons que l'équation (44) a un sens puisque l'on multiplie la fonction $\mathcal{C}^\infty$ $e^{bt/a}$ (qui devrait être notée en toute rigueur $e^{b./a}$) par la distribution C. Elle est équivalente à

$$Y = e^{-bt/a} C. \tag{46}$$

On a alors, en utilisant la proposition 6.53

$$\begin{aligned} aY' + bY = &= a\left(e^{-bt/a}C' - \frac{b}{a}e^{-bt/a}C\right) + be^{-bt/a}C, \\ &= ae^{-bt/a}C' + \underbrace{\left(-be^{-bt/a}C + be^{-bt/a}C\right)}_{\text{quantité nulle}}, \end{aligned}$$

et donc, en disivant par $ae^{-bt/a}$, non nul, on constate que (42) est équivalent à (45). □

A.2. Résolution générale de l'équation homogène associée (EHA)

Lemme 9 (Résolution générale de l'équation homogène associée)**.** *Y est solution de l'équation homogène associée*

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = 0, \tag{47}$$

si et seulement si il existe une constante c telle que

$$Y = ce^{-bt/a}. \tag{48}$$

Dans ce cas, Y est une distribution-fonction.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 8 avec $\mathcal{F} = 0$, selon lequel y est solution de (47) ssi la fonction C définie par (44) vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = 0, \tag{49}$$

ce qui est donc équivalent, d'après la proposition 6.46, à l'existence d'une constante c telle que $C = c$, ce qui est équivalent à (47) en revenant à Y donné par (46). □

A.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"], on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. Ici, nous utiliserons la recherche d'une solution particulière.

A.3.1. Recherche de la solution générale dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ (réponse impulsionnelle).
La réponse impulsionnelle est la solution de (42) dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$: on considère donc l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \delta. \tag{50}$$

Proposition 10 (Réponses impulsionnelles). *La distribution Y est solution de* (50) *ssi il existe une constante c telle que*

$$Y = ce^{-bt/a} + Y_0, \tag{51}$$

où la distribution-fonction Y_0 est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}e^{-bt/a}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{52}$$

ce qui est équivalent à

$$Y_0 = \frac{1}{a}e^{-bt/a}H, \tag{53}$$

où H est la fonction de Heaviside.

Démonstration. Il suffit d'appliquer de nouveau le lemme 8 dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ selon lequel y est solution de (47) ssi la fonction C définie par (44) vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a}e^{bt/a}\delta$$

ce qui est équivalent, d'après l'équation (6.75) de la proposition 6.51

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a}e^{b/a\times 0}\delta,$$

soit

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a}\delta,$$

ce que l'on peut écrire encore sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \left(C - \frac{1}{a}H\right)' = 0. \tag{54}$$

L'équation (54) est donc équivalente, d'après la proposition 6.46, à l'existence d'une constante c telle que

$$C - \frac{1}{a}H = c,$$

soit

$$C = c + \frac{1}{a}H,$$

ce qui est équivalent à (51) en revenant à Y donné par (46). □

A.3.2. Recherche d'une solution particulière dans le cas général.
Nous allons donc maintenant le résultat très important, spécifique aux distributions : une solution de la solution générale est le produit de convolution de la réponse impulsionnelle par le second membre.

Lemme 11 (Une solution particulière dans le cas général)**.** *Une solution de* (42) *est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{55}$$

où Y_0 est donnée par (53)*. On admettra que ce produit existe*[1].

Démonstration. Notons que d'après la proposition 10, en prenant $c = 0$ dans (51), une solution de (50) est donnée par $Y = Y_0$. On a donc

$$aY_0' + bY_0 = \delta. \tag{56}$$

Utilisons pour conclure les deux égalités fondamentales du cours : les équations (7.20) et (7.22) qui impliquent successivement, en considérant Y défini par (55) :

$$\begin{aligned} aY' + bY &= a(\mathcal{F} * Y_0)' + b(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a\mathcal{F} * Y_0' + b\mathcal{F} * Y_0, \\ &= \mathcal{F} * (aY_0' + bY_0), \\ &= \mathcal{F} * (aY_0' + bY_0), \end{aligned}$$

et d'après (56)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

□

Remarque 12. L'égalité (56) peut aussi se retrouver à la main. De deux façons différentes, on peut montrer

$$Y_0' = -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}\delta. \tag{57}$$

(1) À partir de la définition (53), on a

$$\begin{aligned} Y_0' &= \left(\frac{1}{a}e^{-bt/a}H\right)', \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-bt/a}H', \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-bt/a}\delta, \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-b/a\times 0}\delta, \end{aligned}$$

ce qui implique (57).

(2) Si on utilise la formule des sauts (proposition 6.35) et la définition (52) de Y_0, dont la dérivée usuelle vaut

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0'(t) = \begin{cases} -\frac{b}{a}e^{-bt/a}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{58}$$

et qui présente un saut égal à $1/a$ en zéro (voir figure 3). On a donc

$$Y_0' = y_0' + \frac{1}{a}\delta,$$

ce qui implique (57).

1. Tout du moins, on fera si possible l'hypothèse qui assure l'existence ce produit de convolution. Voir la proposition 15.

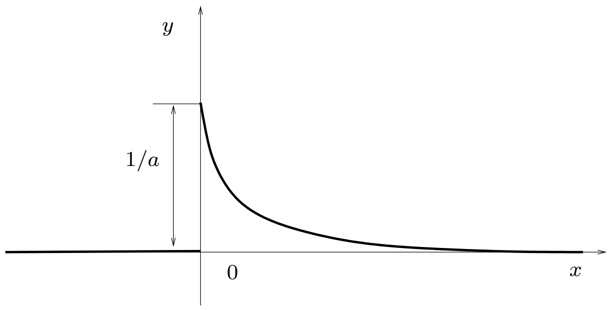


FIGURE 3. La distribution fonction Y_0.

D'après (57), on a donc bien

$$\begin{aligned} aY_0' + bY_0 &= a\left(-\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}\delta\right) + be^{-bt/a}H, \\ &= -be^{-bt/a}H + \delta + be^{-bt/a}H, \\ &= \delta. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

A.3.3. Résolution générale.

On peut enfin conclure, comme pour les équations différentielles usuelles, en utilisant le principe de superposition

Proposition 13 (Résolution générale)**.** *Les solutions de* (42) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{\mathcal{F} * Y_0}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{59}$$

Démonstration. Il suffit de considérer Y une solution quelconque de (42) et de poser $Z = Y - Y_p$, où $Y_p = \mathcal{F} * Y_0$, où Y_0 est définie par (53). On a alors, par linéarité

$$aZ' + bZ = aY' + bY - \left(aY_p' + bY_p\right)$$

qui vaut $\mathcal{F} - \mathcal{F} = 0$ puisque Y et Y_p sont toutes les deux solutions de (42), d'après le lemme 11. D'après le lemme 9 appliqué à Z, on a, d'après (48)

$$Z = ce^{-bt/a},$$

et donc

$$Y - Y_p = ce^{-bt/a},$$

dont on déduit (59). $\square$

On peut remplacer la proposition 13 par la suivante, qui donne une méthode de résolution, tout à finalement identique à celle des équations différentielles habituelles de fonctions :

Proposition 14 (Résolution générale (méthode alternative))**.** *Les solutions de* (42) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{Y_p}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{60}$$

où Y_p est donnée par

$$\mathcal{G} \text{ est une primitive de la distribution } e^{bt/a}\mathcal{F}, \text{ notée } \int e^{b./a}\mathcal{F}d. ; \tag{61a}$$

$$Y_p = \frac{1}{a}e^{-bt/a}\mathcal{G} = \frac{1}{a}e^{-bt/a}\int e^{b./a}\mathcal{F}d. \tag{61b}$$

de sorte que (60) *s'écrit :*

$$Y = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a} e^{-bt/a} \int e^{b./a} \mathcal{F} d. \tag{62}$$

Démonstration. Ce calcul est l'adaptation exacte de ce qui est fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un" et annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2", section "Équations différentielles d'ordre 1"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 8. D'après (45), C est égale à une primitive quelconque de $\frac{1}{a} e^{bt/a} \mathcal{F}$, dont on sait qu'elle existe, d'après l'annexe U. On conclut en écrivant, avec le formalisme (61), sur l'existence d'une constante c telle que

$$C = c + \frac{1}{a} \int e^{b./a} \mathcal{F} d.,$$

et en réutilisant (46) qui permet de conclure. □

♢

A.3.4. Traitement de la condition initiale.

Pour les distributions, la notion de condition initiale n'a *a priori* aucun sens car une distribution n'est pas nécessairement une distribution-fonction et donc la notion de valeur temporelle n'a pas lieu d'être.
Néanmoins, on peut donner une condition initiale grâce à la notion de support d'une distribution.
Nous dirons qu'un signal "vit dans $\mathbb{R}_+$" s'il est associé à une distribution de $\mathcal{D}'_+$. Si cette distribution est une distribution-fonction, être dans $\mathcal{D}'_+$ est équivalent à être nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Proposition 15 (Résolution générale avec une condition initiale particulière)**.** *On suppose que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{D}'_+$. Le produit de convolution $\mathcal{F} * Y_0$ existe et l'unique solution de* (42) *dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{63}$$

où Y_0 est définie par (53).

Démonstration. D'après la proposition 7.10, le produit de convolution $\mathcal{F} * Y_0$ existe puisque $\mathcal{F}$ et Y_0 sont dans $\mathcal{D}'_+$. D'après la proposition 13, toutes les solutions de (42) sont données par (59). Si on impose que Y est dans $\mathcal{D}'_+$, alors nécessairement c est nul. En effet, pour toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}^*_-$, on a par définition (voir la définition 7.8)

$$0 = \langle Y, \phi \rangle = \langle F * Y_0, \phi \rangle + \left\langle ce^{-bt/a}, \phi \right\rangle.$$

on a $\langle F * Y_0, \phi \rangle = 0$ puisque F, Y_0 et $F * Y_0$ sont dans $\mathcal{D}'_+$ (voir remarque 7.13). On a donc

$$0 = \left\langle ce^{-bt/a}, \phi \right\rangle = c \int_{\mathbb{R}_-} e^{-bt/a} \phi(t) dt.$$

On peut choisir ϕ strictement positive sur son support et donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_-} e^{-bt/a} \phi(t) dt$ est strictement positive et donc c est nul. Ainsi, Y d'après (59), est unique est donnée par (63). □

A.3.5. Généralisation.

(1) Si au lieu de se placer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on souhaite se placer sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ où Ω est un intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, la proposition 13 n'est plus valable parce qu'on ne peut pas définir la convolution sur un intervalle autre que $\mathbb{R}$. En, revanche, la propostion 14 reste tout à fait valable.

(2) Supposons, maintenant que a et b sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω est un intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. Au lieu de considérer l'équation différentielle (42), on considère l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad a(t)Y' + b(t)Y = \mathcal{F}, \tag{64}$$

où cette fois, $a(t)$ et $b(t)$ désignent (abusivement) les fonctions a et b. Dans ce cas, même dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$, la proposition 13 n'est plus valable. En effet, elle est fondée sur le calcul fait dans la preuve du lemme 55 qui ne marche pas ici ! En effet, si on considère la réponse impulsionnelle Y_0 de

$$a(t)Y_0' + b(t)Y_0 = \delta, \tag{65}$$

(on sait la déterminer, comme on verra plus bas), alors si on calcule $a(t)Y' + b(t)Y$ en posant $Y = Y_0 * \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= a(t)(\mathcal{F} * Y_0)' + b(t)(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a(t)(\mathcal{F} * Y_0') + b(t)(\mathcal{F} * Y_0), \end{aligned}$$

mais on ne peut conclure, comme dans la preuve du lemme 55, car, en général (sauf si a est constant !), si S et T sont deux distributions,

$$a(t)(S * T) \neq (a(t)S) * T.$$

et on ne peut donc plus conclure en écrivant

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= \mathcal{F} * (a(t)Y_0' + b(t)Y_0), \\ &= \mathcal{F} * (a(t)Y_0' + b(t)Y_0), \end{aligned}$$

et d'après (56)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

Cependant, la proposition 14 demeure, quant à elle, tout à fait valable !

Nous en donnons la généralisation :

Proposition 16 (Résolution générale (méthode alternative, plus générale)). *Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur Ω intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. On considère α une primitive quelconque de b/a. Les solutions de (64) sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{Y_p}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-\alpha(t)}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{66}$$

où Y_p est donnée par

$$\mathcal{G} \text{ est une primitive de la distribution } \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}, \text{ notée } \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \,; \tag{67a}$$

$$Y_p = e^{-\alpha(t)}\mathcal{G} = e^{-\alpha(t)} \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \tag{67b}$$

de sorte que (66) s'écrit :

$$Y = ce^{-\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)} \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \tag{68}$$

Démonstration. Cela se fait exactement comme dans la preuve de la proposition 14 et comme on a fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un" et annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2", section "Équations différentielles d'ordre 1"]. C'est encore une méthode de variation de la constante ! Comme dans le lemme 8, on considère C défini de façon analogue à (44) :

$$C = e^{\alpha(t)}Y. \tag{69}$$

On a alors

$$Y = e^{-\alpha(t)}C \tag{70}$$

et donc

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= = a(t)\left(-\alpha'(t)e^{-\alpha(t)}C + e^{-\alpha(t)}C'\right) + b(t)e^{-\alpha(t)}C, \\ &= -b(t)e^{-\alpha(t)}C + a(t)e^{-\alpha(t)}C' + b(t)e^{-\alpha(t)}C, \\ &= a(t)e^{-\alpha(t)}C' \end{aligned}$$

et, on a, de façon analogue à (45),

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad C' = \frac{1}{a(t)}e^{\alpha(t)}\mathcal{F}. \tag{71}$$

Ainsi, C est égale à une primitive quelconque de $\frac{1}{a(t)}e^{\alpha(t)}\mathcal{F}$, dont on sait qu'elle existe, d'après l'annexe U. On conclut en écrivant, avec le formalisme (61), sur l'existence d'une constante c telle que

$$C = c + \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d.$$

et en réutilisant (70) ce qui permet de conclure. □

◇

A.4. Retour sur la formule de Duhamel

Nous allons pouvoir aussi utiliser les calculs précédents pour déterminer la solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{72a}$$

$$y(0) = y_0. \tag{72b}$$

Si f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait (voir par exemple [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"]) que la solution est donnée par la formule de Duhamel :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{1}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du. \tag{73}$$

On peut affaiblir l'hypothèse sur f que l'on suppose appartenir à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, la formule (73) est encore valable.

Proposition 17 (Formule de Duhamel)**.** *On suppose que f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. L'unique solution de* (72) *est donnée par* (73)*.*

Démonstration.

(1) On introduit tout d'abord la notation suivante :

Notation 18. Si z est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, on la prolonge sur $\mathbb{R}$ en définissant $\widetilde{z}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{z}(x) = \begin{cases} z(x), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{74}$$

Si de plus z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\widetilde{z}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$ (au sens usuel, sauf en zéro) et grâce à la formule des sauts (proposition 6.35), on a

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{\widetilde{z}} = \widetilde{z}' + z(0)\delta. \tag{75}$$

En fait, si z n'est que dérivable presque partout sur $\mathbb{R}_+$, $\widetilde{z}$ n'est que dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et (75) est encore valable (voir proposition 6.48 de la version longue).

Enfin, on a

Lemme 19. *Soient v et w deux fonctions appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Alors, le produit de convolution $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ existe et est donné par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widetilde{v} * \widetilde{w})(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \displaystyle\int_0^x v(x-y)w(y)dy, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{76}$$

La restriction de $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ à $\mathbb{R}_+$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. De plus, si v et w sont dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, alors la restriction de $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ à $\mathbb{R}_+$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. On se contente de calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, le produit $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widetilde{v} * \widetilde{w})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du. \tag{77}$$

Remarquons que, pour tout u, x dans $\mathbb{R}$,

$$(u < 0 \text{ ou } x < u) \Longrightarrow \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u) = 0. \tag{78}$$

En effet, si $u < 0$, alors $\widetilde{w}(u) = 0$. Si $x < u$, alors $x - u < 0$ et $\widetilde{v}(x-u) = 0$.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ fixé. Si $x < 0$, alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $u < 0$ ou $x < u$. En effet, si $u < x$, on a $u < x < 0$. Si $u > x$, alors $x < u$. Donc, d'après (78), la fonction $u \mapsto \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)$ est nulle et son intégrale égale à $(\widetilde{v} * \widetilde{w})(x)$ est nulle. Ainsi, $(\widetilde{v} * \widetilde{w})(x) = 0$. Au contraire, si $x > 0$, on a pour $u < 0$, $\widetilde{w}(u) = 0$ et pour $u > x$, on a $\widetilde{v}(x-u) = 0$. Ainsi, la fonction $u \mapsto \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)$ est nulle sur $]-\infty, 0[\cup]x, +\infty[$ et son intégrale se réduit donc à

$$h(x) = \int \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du = \int_0^x \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du = \int_0^x v(x-u)v(u)du.$$

Les autres résultats sont admis. □

(2) Démontrons la proposition. Supposons donc que y vérifie (72). Transformons l'équation différentielle (72) en une équation du type (42). On définit $\widetilde{y}$ grâce à la notation (18). D'après (75) appliqué à y, on a

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{\widetilde{y}} = \widetilde{y}' + y(0)\delta. \tag{79}$$

et donc

$$\begin{aligned} aT'_{\widetilde{y}} + bT_{\widetilde{y}} &= a\left(\widetilde{y}' + y(0)\delta\right) + b\widetilde{y}, \\ &= a\widetilde{y}' + b\widetilde{y} + ay_0\delta, \end{aligned}$$

et puisque y vérifie (72), on a donc $a\widetilde{y}' + b\widetilde{y} = \widetilde{f}$ et donc

$$aT'_{\widetilde{y}} + bT_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} + ay_0\delta.$$

On a donc (42) vérifiée par $T_{\widetilde{y}}$ avec

$$\mathcal{F} = \widetilde{f} + ay_0\delta. \tag{80}$$

Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{y}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, les distributions associées sont dans $\mathcal{D}'_+$ et d'après la proposition 15, l'unique solution de (42) (dans $\mathcal{D}'_+$) est donnée par

$$T_{\widetilde{y}} = \mathcal{F} * Y_0.$$

soit compte tenu de (80)

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{y}} &= \left(\widetilde{f} + ay_0\delta\right) * Y_0, \\ &= Y_0 * \widetilde{f} + ay_0\delta * Y_0, \end{aligned}$$

et donc

$$T_{\widetilde{y}} = Y_0 * \widetilde{f} + ay_0 Y_0. \tag{81}$$

Puisque f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, alors $\widetilde{f}$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et d'après le lemme 19, la restriction de $Y_0 * \widetilde{f}$ appartient $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. D'après (76), l'équation (81) implique que pour tout [2] $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \widetilde{y}(t), \\ &= \frac{1}{a}\int_0^t e^{-b(t-y)/a} f(y)dy + y_0 e^{-bt/a}, \end{aligned}$$

ce qui est exaxtement (73).

□

Remarque 20.

(1) Ces résultats pourraient aussi être obtenus en utilisant les résultat de [Bas22, la Section "Équations différentielles d'ordre un" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"], fondés sur la méthode de la variation de la constante.

(2) Une autre façon de faire est de d'utiliser les transformations de Laplace (voir votre cours de OMI2).

(3) On peut aussi partir de l'expression donnée par (73) et vérifier que c'est bien la solution de (72).

(a) En effet, si y est donnée par (73), on a

$$y(0) = y_0 e^{-\frac{b}{a}\times 0} + \frac{1}{a}\int_0^0 e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du = y_0.$$

(b) De plus, on vérifie que si g est dérivable, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^t g(u-t)f(u)du\right)' = -\int_0^t g'(u-t)f(u)du + g(0)f(t). \tag{82}$$

Ainsi, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du\right)' = -\frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du + f(t),$$

et donc finalement, si on dérive (73),

$$\begin{aligned} ay'(t) + by(t) &= -y_0 b e^{-\frac{b}{a}t} + y_0 b e^{-\frac{b}{a}t} - \frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du + f(t) + \frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du, \\ &= f(t). \end{aligned}$$

2. en fait, cela est vrai presque partout sur $\mathbb{R}$.

(4) On laisse au lecteur le soin de vérifier que la solution de l'équation

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{83a}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{83b}$$

est

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_{t_0} e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a} \int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u) du. \tag{84}$$

♢

A.5. Deux exemples

Exemple 21.
Cet exemple est issu de [Pet98, p. 52].

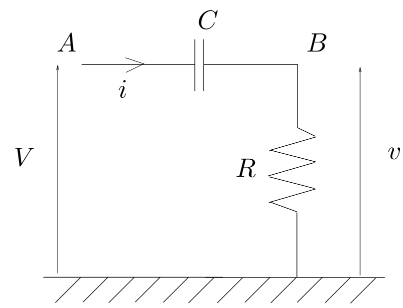


FIGURE 4. Le circuit dérivateur.

On étudie le circuit dérivateur représenté sur la figure 4. On pose $V = V_A$, $v = V_B$. En éliminant i entre

$$q = C(V - v),$$
$$v = Ri,$$
$$i = \dot{q},$$

on obtient

$$v = Ri = RC(\dot{V} - \dot{v}),$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \dot{V}(t), \tag{85}$$

où

$$\tau = RC. \tag{86}$$

On suppose que pour $t \leq 0$, toute les tensions sont nulles. On a donc, en particulier,

$$\forall t \leq 0, \quad v(t) = V(t) = 0. \tag{87}$$

On suppose V connue et on cherche v.

(1) Écrire l'équation différentielle (85) sous la forme d'une équation différentielle de distribution et fournir la forme générale de la distribution T_v associée à v en fonction de la distribution V.

(2) Préciser l'expression de la solution $v = T_v$ si V est une distribution-fonction.

(3) Préciser la forme de v si $V(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

(1) Compte tenu de (85) et de (87), on est donc exactement dans le cadre de la proposition 15 avec $a = 1$, $b = 1/\tau$ et $\mathcal{F} = \dot{V}$. D'après (63), on a donc en notant $Y = T_v$:

$$\begin{aligned} T_v &= \mathcal{F} * Y_0, \\ &= \dot{V} * Y_0, \\ &= (V * Y_0)', \\ &= V * Y_0'. \end{aligned}$$

On sait que

$$Y_0' = \delta - 1/\tau Y_0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_v &= V * (\delta - 1/\tau Y_0), \\ &= V * \delta - 1/\tau V * Y_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$T_v = V - 1/\tau V * Y_0.$$

(2) On suppose que V est une distribution-fonction, (notée v). D'après le lemme 19, on a donc, pour tout $t \geq 0$

$$v(t) = V(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t V(u) e^{-(t-u)/\tau} du$$

(3) Si on a $V(t) = 1$ pour $t \geq 0$, alors

$$v(t) = 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \int_0^t e^{u/\tau} du = 1 - e^{-t/\tau}[e^{u/\tau}] = 1 - e^{-t/\tau}[e^{t/\tau} - 1] = 1 - 1 + e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}.$$

On retrouve donc la réponse impulsionnelle, qui correspond bien à $y = \dot{H} = \delta$ et qui est une fonction discontinue en zéro.

Exemple 22. On s'intéresse à un circuit éléctrique constitué d'une inductance et d'une résistance et soumis à une tension $e(t)$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = e. \tag{88}$$

On suppose que

$$\forall t \leq 0, \quad i(t) = 0, \tag{89}$$

et que $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = E_0 H(t), \tag{90}$$

où E_0 est une constante.
On est encore exactement dans le cas de la proposition 15 avec $a = L$, $b = R$ et $\mathcal{F} = EH$. On alors

$$T_i = \mathcal{F} * Y_0 = E_0 H * Y_0.$$

De nouveau d'après le lemme (19)

$$\forall t \geq 0, \quad i(t) = \frac{E_0}{L} \int_0^t e^{-Ru/L} du = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right),$$

expression qui peut aussi être obtenue très rapidement à la main, comme c'est fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"] ! Cette fonction est continue en zéro.

Annexe B. Résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 2

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \mathcal{F}. \tag{91}$$

L'"inconnue" est ici la distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La notion de conditions initiales n'a pas de sens au sens de distributions. Nous reviendrons dessus plus bas. La résolution de cette équation différentielle est très proche de la suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \tag{92}$$

où l'"inconnue" est ici la fonction y, deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On renvoie à la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf` dont on s'inspire pour résoudre (91).
Le calcul est très proche de celui de la section 8.1 et, comme dans le cas des équations d'ordre un, la seule difficulté théorique est d'étudier l'équation homogène associée, dont le calcul est quasiment identique à celui des équations différentielles de fonctions. On s'inspire pour cela de la méthode élémentaire donnée dans le papier à la fois très complet et succinct de Daniel Perrin, disponible sur `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf`
Nous allons

- en section B.2, donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (91) ;
- en section B.3.1, donner une réponse impulsionnelle, c'est-à-dire une solution de (91) avec un second membre égal à δ ;
- en section B.3.3, donner les solution générales de l' 'équation différentielle (91) ;
- et enfin, en section B.4, retrouver la solution générale connue d'une équation différentielle ordinaire bien connue, comme cas particulier.

B.1. Un lemme sur la "variation de la constante"

Lemme 23. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et b, c et $r \in \mathbb{R}$. On considère une distribution Z et une distribution Y donnée par*

$$Y = e^{rt} Z. \tag{93}$$

On a alors dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$aY'' + bY' + cY = e^{rt}\left(aZ'' + (2ar + b)Z' + (ar^2 + br + c)Z.\right). \tag{94}$$

Démonstration. Il suffit de calculer successivement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Y, Y' et Y'', en utilisant (93). On a respectivement

$$\begin{aligned}
Y &= e^{rt} Z, \\
Y' &= re^{rt} Z + e^{rt} Z', \\
Y'' &= r^2 e^{rt} Z + re^{rt} Z' + re^{rt} Z' + e^{rt} Z'', \\
&= r^2 e^{rt} Z + 2re^{rt} Z' + e^{rt} Z''.
\end{aligned}$$

On a donc

$$aY'' + bY' + cY = e^{rt}\left(ar^2 Z + 2arZ' + aZ'' + brZ + bZ' + cZ\right)$$

dont on déduit, après réarangement des termes, (94). □

◊

B.2. Résolution générale de l'équation homogène associée (EHA)

Comme dans le lemme 9, où intervient la distribution-fonction définie par (48) (et une constante quelconque) solution de (105), nous allons tout d'abord définir une fonction définie par deux constantes quelconques et qui sera solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{95}$$

Le calcul est très ensuite proche de la résolution des équations différentielles de fonctions, pour l'équation homogène associée, donnée dans la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] et rappelé dans le lemme 25.

Définition 24 (Définition de la fonction ξ)**.** L'équation caractéristique associée à (95) est

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{96}$$

qui admet *a priori* deux solutions complexes r_1 et r_2. On considère alors les différents cas suivants selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Si $\Delta \neq 0$: on a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.

(a) Si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont réelles données par

$$r_k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{97}$$

On définit alors, pour C_1 et C_2 deux constantes données, la fonction ξ par

$$\xi(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{98}$$

(b) Si $\Delta < 0$, r_1 et r_2 sont complexes conjuguées ; on considère $(\omega, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ définis par

$$r_k = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\omega. \tag{99}$$

On définit [3] alors, pour A et B deux constantes données, la fonction ξ par

$$\xi(t) = e^{\alpha t}\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big). \tag{101}$$

(2) Si $\Delta = 0$: on a deux racines réelles confondues, égales à

$$r = -\frac{b}{2a}. \tag{102}$$

On définit alors, pour A et B deux constantes données, la fonction ξ par

$$\xi(t) = e^{rt}(At + B). \tag{103}$$

Lemme 25.
On reprend les notations de la définition 24.

(1) La solution générale de (95) *est la fonction ξ donnée dans la définition 24, définie par deux constantes, notées (C_1, C_2) ou (A, B) selon les différents cas.*

(2) Pour tout couple de réel (y_0, y_0') il existe (respectivement selon les cas 1a, 1b et 2) un unique couple respectivement noté (C_1, C_2) ou (A, B) tel que l'unique solution ξ définie donnée dans la définition 24, associée à ces constantes, vérifie les conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \tag{104a}$$
$$y'(t_0) = y_0'. \tag{104b}$$

Démonstration.

3. On peut aussi la mettre sous une autre forme équivalente :

$$\xi(t) = e^{\alpha t} A\cos(\omega t + \phi), \tag{100}$$

(1) Voir [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"].

(2) Calcul simple laissé au lecteur. Chaque couple est donné par un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui admet une unique solution.

□

♢

Le lemme 26 n'est que la copie du point 1 du lemme 25, adapté aux distributions.

Lemme 26 (Résolution générale de l'équation homogène associée)**.** *Y est solution de l'équation homogène associée*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = 0, \tag{105}$$

ssi Y est la distribution-fonction solution de l'équation différentielle (95) *et est égale à ξ, fournie par la définition 24.*

Démonstration.

(1) Premier cas : $\Delta = 0$. La racine unique r de l'équation caractéristique (96) est donnée par (102) et vérifie donc aussi

$$2ar + b = 0. \tag{106}$$

On considère Y solution de l'equation homogène associée et Z donnée par (93). D'après le lemme 94, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= aY'' + bY' + cY, \\ &= \left(aZ'' + (2ar+b)Z' + (ar^2 + br + c)Z.\right), \end{aligned}$$

et d'après (96) et (106)

$$= aZ'',$$

et puisque $a \neq 0$, on a donc $Z'' = 0$. D'après la proposition 6.46, la distribution Z' est constante et il existe donc une constante A telle que

$$Z' = A = (At)'.$$

Puisque $(Z - At)' = 0$, en utilisant de nouveau la proposition 6.46, cela implique qu'il existe une constante B telle que

$$Z - At = B,$$

et donc

$$Z = At + B,$$

et, en revenant à Y grâce à (93), on en déduit (103).

(2) Deuxième cas : $\Delta > 0$.

Nous avons deux racines r_1 et r_2 données par (97), dont on déduit (ce qui provient aussi de résultats plus généraux sur la somme de racines de polynôme)

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \tag{107}$$

On considère Y solution de l'equation homogène associée et, cette fois-ci, Z donnée par (93) où

$$r = r_1. \tag{108}$$

D'après le lemme 94, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= aY'' + bY' + cY, \\ &= \left(aZ'' + (2ar_1+b)Z' + (ar_1^2 + br_1 + c)Z.\right), \end{aligned}$$

et donc, d'après l'équation caractéristique (96), on a

$$aZ'' + (2ar_1 + b)Z' = 0.$$

soit

$$a(Z')' + (2ar_1 + b)Z' = 0.$$

ou encore

$$Z'' + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)Z' = 0.$$

D'après le lemme 9, il existe une constante K telle que

$$Z' = Ke^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t}.$$

Puisque $\Delta \neq 0$, on vérifie que

$$2r_1 + \frac{b}{a} \neq 0.$$

On en déduit

$$Z' = \left(-\frac{K}{2r_1+\frac{b}{a}}e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t}\right)'$$

et, donc, d'après la proposition 6.46, qu'il existe une constante C_1 telle que

$$Z = -\frac{K}{2r_1+\frac{b}{a}}e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

soit, en notant

$$C_2 = -\frac{K}{2r_1+\frac{b}{a}},$$

on a

$$Z = C_2e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

En revenant à Y grâce à (93) (avec (108)), on en déduit

$$\begin{aligned}
Y &= e^{r_1t}\left(C_2e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1\right),\\
&= C_2e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}+r_1\right)t} + C_1e^{r_1t},\\
&= C_1e^{r_1t} + C_2e^{\left(-r_1-\frac{b}{a}\right)t},
\end{aligned}$$

et d'après (107), on a $-r_1 - \frac{b}{a} = r_2$ et donc

$$= C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t},$$

ce qui montre (98).

(3) Troisième cas : $\Delta < 0$.

Ici, on utilise une méthode légèrement différente de celle utilisée dans `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf` afin de pouvoir l'adapter aux distributions.

Il suffit de reprendre les calculs du cas 2 en supposant cette fois-ci que les racines r_1 et r_2 sont complexes, données par (97). Il existe donc des complexes C_1 et C_2 tels que (98) ait lieu. Avec les notations (99), on a donc

$$Y = C_1e^{(\alpha+i\omega)t} + C_2e^{(\alpha-i\omega)t},$$

et donc

$$Y = e^{\alpha t}\left(C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t}\right) \tag{109}$$

On écrit ensuite que la distribution-fonction Y est à valeurs réelles. On la note désormais sous la forme $Y = y$. D'après (109), on a

$$\overline{y(t)} = \overline{\left(e^{\alpha t}\right)}\left(\overline{C_1}\,\overline{\left(e^{i\omega t}\right)} + \overline{C_2}\,\overline{\left(e^{-i\omega t}\right)}\right)$$

et donc, puisque α et ω sont réels, on a

$$\overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\overline{C_1}e^{-i\omega t} + \overline{C_2}e^{i\omega t}\right) \tag{110}$$

De (109) et (110), on déduit

$$y(t) - \overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\left(C_1 - \overline{C_2}\right)e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right)e^{-i\omega t}\right). \tag{111}$$

On a donc, pour tout t, puisque $y(t)$ est réel

$$0 = y(t) - \overline{y(t)}$$

et donc, d'après (111),

$$\left(C_1 - \overline{C_2}\right)e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right)e^{-i\omega t} = 0.$$

Puisque cela est vrai pour tout t, on peut prendre deux valeurs différentes de t et vérifier que cela implique

$$C_1 = \overline{C_2} \text{ et } C_2 = \overline{C_1}$$

Si on remplace cela dans (109), on a donc

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1e^{i\omega t} + \overline{C_1}e^{-i\omega t}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1 e^{i\omega t}}\right), \\ &= 2e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\left(C_1 e^{i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Si on écrit $C_1 = K + iK'$, avec K et K' réels, o a donc

$$\begin{aligned} C_1 e^{i\omega t} &= (K + iK')e^{i\omega t}, \\ &= (K + iK')\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right), \\ &= K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t) + i\left(K\sin(\omega t) + K'\cos(\omega t)\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Re}(y(t)) = K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t),$$

et, d'après ce qui précède

$$y(t) = 2e^{\alpha t}\left(K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t)\right)$$

ce qui permet de montrer (97), en posant $A = 2K$ et $B = -2K'$.

□

◇
La suite du calcul est très proche de celui de la section 8.1.

B.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre deux" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"], on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. Ici, nous utiliserons la recherche d'une solution particulière.

B.3.1. Recherche d'une solution particulière le cas où $\mathcal{F} = \delta$.
La réponse impulsionnelle est la solution de (91) dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$: on considère donc l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \delta. \tag{112}$$

La technique est légèrement différente de celle du lemme 10 mais le résultat en est assez proche. À la différence de ce lemme, on ne cherche pas toutes les solutions de (112) mais une solution (voir le lemme 28). Néanmoins, on montrera *a priori* dans la section B.3.5 (voir proposition 33) qu'en fait on obtient bien toutes les solutions de (112).
Grâce au lemme 25, on définit tout d'abord la fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Définition 27. Il existe une unique fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \tag{113a}$$
$$y(0) = 0, \tag{113b}$$
$$y'(0) = \frac{1}{a}. \tag{113c}$$

Elle est donnée par (en utilisant les notations du lemme 25) :

$$\text{si } \Delta > 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{a(r_1 - r_2)}., \tag{114a}$$
$$\text{si } \Delta < 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{\alpha t}\sin(\omega t)}{a\omega},, \tag{114b}$$
$$\text{si } \Delta = 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{rt}t}{a}. \tag{114c}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les différentes équations le lemme 25. Les différentes constantes intervenant dans ces fonctions sont données par (113b) et (113c) et qui fournissent les différents cas (selon les cas 1a, 1b et 2), données ici :

$$C_1 + C_2 = 0, \quad r_1 C_1 + r_2 C_2 = 1/a,$$

ou

$$A = 0, \quad B\omega + A\alpha = 1/a,$$

ou

$$B = 0, \quad rB + A = 1/a.$$

dont on déduit successivement

$$\begin{aligned}
&C_1 = \frac{1}{a(r_1 - r_2)}, \quad C_2 = -\frac{1}{a(r_1 - r_2}, \\
&A = 0, \quad B = \frac{1}{a\omega}, \\
&A = \frac{1}{a}, \quad B = 0,
\end{aligned}$$

dont on déduit (114). □

♢

Lemme 28 (Une réponse impulsionnelle)**.** *Une solution particulière de* (112) *est donnée par la distribution-fonction Y_0 définie de la façon suivante :*

(1) On considère l'unique fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ fournie par la définition 27;

(2) On considère alors la distribution-fonction Y_0 donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases} \tag{115}$$

ce qui est équivalent à

$$Y_0 = \xi_0 H, \tag{116}$$

où H est la fonction de Heaviside.

Démonstration. On cherche Y une solution particulière de (112) sous la forme

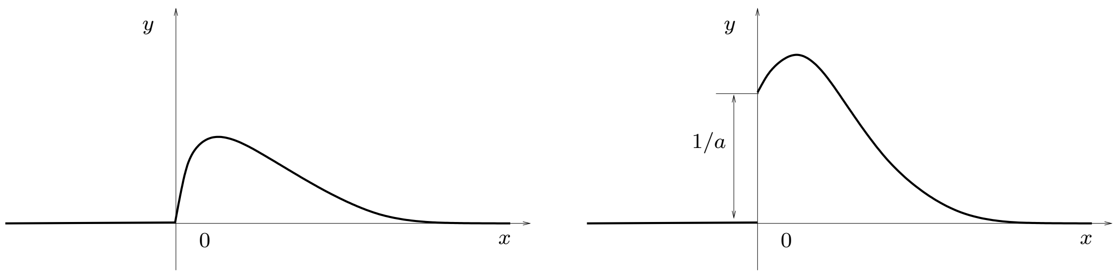
$$Y = yH, \tag{117}$$

où y est une fonction classe $\mathcal{C}^\infty$ ce qui est légitime comme le produit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par la distribution H. On calcule dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ successivement en utilisant la proposition 6.53 et l'équation (6.75) de la proposition 6.51

$$Y_0 = yH,$$

puis

$$\begin{aligned}
Y_0' &= (yH)', \\
&= y'H + yH', \\
&= y'H + y\delta, \\
&= y'H + y(0)\delta,
\end{aligned}$$



(a) la fonction (b) sa dérivée usuelle

FIGURE 5. La distribution-fonction Y_0.

puis

$$\begin{aligned}
Y_0'' &= \left(y'H + y(0)\delta\right)', \\
&= \left(y'H\right)' + \left(y(0)\delta\right)', \\
&= y''H + y'H' + y(0)\delta', \\
&= y''H + y'\delta + y(0)\delta', \\
&= y''H + y'(0)\delta + y(0)\delta',
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
aY'' + bY' + cY &= a\left(y''H + y'(0)\delta + y(0)\delta'\right) + b\left(y'H + y(0)\delta\right) + c\left(yH\right), \\
&= ay''H + ay'(0)\delta + ay(0)\delta' + by'H + by(0)\delta + cyH, \\
&= \left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0)\delta\right)\delta + ay(0)\delta',
\end{aligned}$$

et puisque Y doit être solution de (112), on a donc (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0)\delta\right)\delta + ay(0)\delta' = \delta,$$

soit

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0) - \delta\right)\delta + ay(0)\delta' = 0.$$

Pour cela, il suffit que

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H = 0, \tag{118a}$$

$$ay'(0) + by(0) - 1 = 0, \tag{118b}$$

$$ay(0) = 0. \tag{118c}$$

L'équation (118a) est vraie ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

ce qui est fait en vrai si (95) a lieu. Notons que (118b) et (118c) sont équivalentes à

$$y(0) = 0, \tag{119a}$$

$$y'(0) = \frac{1}{a}. \tag{119b}$$

Choisissons y comme solution de l'équation différentielle (95) avec les conditions initiales (119). D'après la définition 27, alors est nécessairement y égale à ξ_0, ce qui permet de conclure, d'après (117) qui implique (116). □

Remarque 29. En fait, d'après (116), les valeurs de y pour $t < 0$ n'interviennent pas. De façon analogue à la figure (3), on peut tracer la distribution-fonction Y_0 et sa dérivée usuelle : voir figure 5.

$\diamondsuit$

B.3.2. Recherche d'une solution particulière dans le cas général.
Le lemme suivant est l'analogue du lemme 11.

Lemme 30 (Une solution particulière dans le cas général)**.** *Une solution de* (91) *est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{120}$$

où Y_0 est donnée par (116)*. On admettra que ce produit existe*[4]*.*

Démonstration. Notons que d'après le lemme 28, une solution de (112) est donnée par $Y = Y_0$. On a donc

$$aY_0'' + bY_0' + bY_0 = \delta. \tag{121}$$

Utilisons pour conclure les deux égalités fondamentales du cours : les équations (7.20), (7.22) et (7.26) pour $n = 2$, qui impliquent successivement, en considérant Y défini par (120) :

$$\begin{aligned} aY'' + bY' + cY &= a(\mathcal{F} * Y_0)'' + b(\mathcal{F} * Y_0)' + c(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a\mathcal{F} * Y_0'' + b\mathcal{F} * Y_0' + c\mathcal{F} * Y_0, \\ &= \mathcal{F} * (aY_0'' + b'Y_0 + cY_0), \end{aligned}$$

et d'après (121)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

$\square$

B.3.3. Résolution générale.
On conclut enfin exactement comme pour la proposition (13).

Proposition 31 (Résolution générale)**.** *Les solutions de* (91) *sont données par : il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 24 (et donc définie par deux constantes) et une unique distribution Y_0 définie par* (116) *telles que*

$$Y = \underbrace{\mathcal{F} * Y_0}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{\xi}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{122}$$

Démonstration. Il suffit de considérer Y une solution quelconque de (112) et de poser $Z = Y - Y_p$, où $Y_p = \mathcal{F} * Y_0$, où Y_0 est définie par (116). On a alors, par linéarité

$$aZ'' + bZ' + cZ = aY' + bY' + cZ - \left(aY_p'' + bY_p\right)$$

qui vaut $\mathcal{F} - \mathcal{F} = 0$ puisque Y et Y_p sont toutes les deux solutions de (112). D'après le lemme 26 appliqué à Z, on a donc $Z = \xi$. Il vient donc $Y - Y_p = \xi$, dont on déduit (122). $\square$

B.3.4. Traitement de la condition initiale.

Proposition 32 (Résolution générale avec une condition initiale particulière)**.** *On suppose que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{D}'_+$. L'unique solution de* (91) *dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{123}$$

où Y_0 est définie par (116)

4. Tout du moins, on fera implicitement l'hypothèse qui assure l'existence ce produit de convolution.

Démonstration. D'après la proposition 31, toutes les solutions de (42) sont données par (122). Si on impose que Y est dans $\mathcal{D}'_+$, alors nécessairement ξ est nul. En effet, pour toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, on a par définition (voir la définition 7.8)

$$0 = \langle Y, \phi\rangle = \langle F * Y_0, \phi\rangle + \langle \xi, \phi\rangle .$$

on a $\langle F * Y_0, \phi\rangle = 0$ puisque F, Y_0 et $F * Y_0$ sont dans $\mathcal{D}'_+$ (voir remarque 7.13). On a donc

$$0 = \langle \xi, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}_-} \xi(t)\phi(t)dt. \tag{124}$$

Puisque (124) a lieu pour toute fonction test à support inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, cela signifie que la fonction ξ est nulle. En effet, on peut considérer $\widetilde{\xi}$, la restriction de ξ à $\mathbb{R}_-$. D'après (124), on peut donc écrire, en considérant $T_{\widetilde{\xi}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_-)$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_-), \quad \left\langle T_{\widetilde{\xi}}, \phi \right\rangle = 0,$$

ce qui signifie d'après le théorème 6.16, que $T_{\widetilde{\xi}}$ est nulle, et $\widetilde{\xi}$ est donc (presque partout) nulle sur $\mathbb{R}_-$ et par continuité, nulle sur $\mathbb{R}_-$. Vue la forme de $\widetilde{\xi}$ comme restriction sur $\mathbb{R}_-$ de la fonction donnée dans la définition 24, et donc définie par deux constantes, on laisse au lecteur vérifier que, dans tous les cas, ces constantes sont nulles, ce qui implique la nullité de ξ. Ainsi, Y est unique et est donnée par (123). □

B.3.5. Retour sur la recherche de toutes les solutions dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ (réponse impulsionnelle).

En fait le lemme 28 permet d'obtenir toutes les réponses impulsionnelles, comme dans le lemme 10.

Proposition 33 (Réponses impulsionnelles)**.** *Les solutions de* (112) *sont données par : il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 24 (et donc définie par deux constantes) telle que*

$$Y = \xi + Y_0, \tag{125}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 31 avec $\mathcal{F} = \delta$. Dans ce cas, $\mathcal{F} * Y_0 = \delta * Y_0 = Y_0$ et (122) implique (125). □

◊

B.4. Retour sur la formule de Duhamel

Nous allons pouvoir aussi utiliser les calculs précédents pour déterminer la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \tag{126a}$$
$$y(0) = y_0, \tag{126b}$$
$$y'(0) = y'_0, \tag{126c}$$

et obtenir une formule proche de la formule de Duhamel (73).

Proposition 34 (Formule de Duhamel)**.** *On suppose que f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. L'unique solution de* (126) *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy + ay_0\xi'_0(t) + (ay'_0 + by_0)\xi_0(t). \tag{127}$$

Plus précisement, en uilisant la définition 27, on a

$$\textit{si } \Delta > 0, \quad y(t) = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} \int_0^t \left(e^{r_1(t-y)} - e^{r_2(t-y)}\right) f(y)dy + \frac{y_0}{r_1 - r_2}\left(r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t}\right) + \frac{ay_0' + by_0}{a(r_1 - r_2)}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right), \tag{128a}$$

$$\textit{si } \Delta < 0, \quad y(t) = \frac{1}{a\omega} \int_0^t e^{\alpha(t-y)} \sin(\omega(t-y)) f(y)dy + \frac{y_0}{\omega}\left(\alpha e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \omega e^{\alpha t}\cos(\omega t)\right) + \frac{ay_0' + by_0}{a\omega} e^{\alpha t}\sin(\omega t), \tag{128b}$$

$$\textit{si } \Delta = 0, \quad y(t) = \frac{1}{a} \int_0^t e^{r(t-y)}(t-y) f(y)dy + ry_0 e^{rt}(rt+1) + \frac{(ay_0' + by_0)}{a} e^{rt} t. \tag{128c}$$

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 17.
Supposons donc que y vérifie (126). On supposera que y admet une dérivée seconde. Transformons l'équation différentielle (126) en une équation du type (91). On définit $\widetilde{y}$ grâce à la notation (18). Puisque y admet une dérivée seconde, $\widetilde{y}$ admet une dérivée seconde usuelle[5] sur $\mathbb{R}^*$. On a tout d'abord (79), que l'on peut dériver de nouveau sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T''_{\widetilde{y}} = \left(\widetilde{y}'\right)' + y(0)\delta'. \tag{129}$$

Puisque $\widetilde{y}'$ admet un saut égal à $y'(0)$ en zéro et que sa dérivée usuelle vaut $\widetilde{y}''$, on a donc d'après la formule de sauts (proposition 6.35)

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \left(\widetilde{y}'\right)' = \left(T_{\widetilde{y}'}\right)' = \widetilde{y}'' + y'(0)\delta.$$

et donc, d'après (129)

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T''_{\widetilde{y}} = \widetilde{y}'' + y'(0)\delta + y(0)\delta'. \tag{130}$$

On a donc, d'après (79) et (130) :

$$\begin{aligned} aT''_{\widetilde{y}} + bT'_{\widetilde{y}} + cT_{\widetilde{y}} &= a\left(\widetilde{y}'' + y'(0)\delta + y(0)\delta'\right) + b\left(\widetilde{y}' + y(0)\delta\right) + c\widetilde{y}, \\ &= \left(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y}\right) + ay(0)\delta' + \left(ay'(0) + by(0)\right)\delta, \end{aligned}$$

et donc, d'après les conditions initiales (126b) et (126c), on a

$$aT''_{\widetilde{y}} + bT'_{\widetilde{y}} + cT_{\widetilde{y}} = \left(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y}\right) + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta.$$

Puisque y vérifie (126), on a donc $a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y} = \widetilde{f}$ et donc

$$aT''_{\widetilde{y}} + bT'_{\widetilde{y}} + cT_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta. \tag{131}$$

On a donc (91) vérifiée par $T_{\widetilde{y}}$ avec

$$\mathcal{F} = \widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta. \tag{132}$$

Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{y}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, les distributions associées sont dans $\mathcal{D}'_+$ et d'après la proposition 32, l'unique solution de (112) (dans $\mathcal{D}'_+$) est donnée par

$$T_{\widetilde{y}} = \mathcal{F} * Y_0.$$

soit compte tenu de (132)

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{y}} &= \left(\widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta\right) * Y_0, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\delta' * Y_0 + \left(ay_0' + by_0\right)\delta * Y_0, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0 Y_0' + \left(ay_0' + by_0\right) Y_0, \end{aligned}$$

et d'après (116)

$$\begin{aligned} &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\left(\xi_0 H\right)' + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\left(\xi_0' H + \xi_0 H'\right) + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\xi_0\delta + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\xi_0(0)\delta + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H, \end{aligned}$$

et d'après (113b)

$$= \widetilde{f} * Y_0 + 0 \times \delta + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H,$$

5. en toute rigueur définie presque partout sur $\mathbb{R}$.

et donc

$$T_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} * Y_0 + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0 H + ay_0\xi_0' H. \tag{133}$$

On conclue enfin en utilisant (76) et (133) : pour tout[6] $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \widetilde{y}(t), \\ &= \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy + \left(ay_0' + by_0\right)\xi_0(t) + ay_0\xi_0'(t), \end{aligned}$$

ce qui est exactement (127). □

Remarque 35.

(1) Ces résultats pourraient aussi être obtenus en utilisant les résultat de [Bas22, la Section "Équations différentielles d'ordre deux" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"]. fondés sur la méthode de la double variation de la constante.

(2) Une autre façon de faire est de d'utiliser les transformations de Laplace (voir votre cours de OMI2).

(3) On peut aussi partirde l'expression donnée par (127) et vérifier que c'est bien la solution de (126), comme c'est fait dans la remarque 20. On peut remarquer que y est la somme de y_1 et y_2 (qui sont en fait respectivement une solution de l'équation particulière de (126a) la solution générale de l'équation homogène associée (95)) donnée par

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy, \\ y_2(t) &= ay_0\xi_0'(t) + (ay_0' + by_0)\xi_0(t). \end{aligned}$$

Puisque ξ_0 (et donc ξ_0') sont solutions de (95)), par linéarité y_2 l'est aussi. Vérifions que y_1 est solution de (126a). D'après (82), on a successivement (grâce à (113b) et (113c)) :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \left(\int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy\right)', \\ &= \int_0^t \xi_0'(t-y)f(y)dy + \xi_0(0)f(t), \\ &= \int_0^t \xi_0'(t-y)f(y)dy, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= \left(\int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy\right)'', \\ &= \left(\int_0^t \xi_0'(t-y)f(y)dy\right)', \\ &= \int_0^t \xi_0''(t-y)f(y)dy + \xi_0'(0)f(t), \\ &= \int_0^t \xi_0''(t-y)f(y)dy + \frac{1}{a}f(t). \end{aligned}$$

On a donc puisque ξ_0 est solution de (95)

$$\begin{aligned} ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) &= \int_0^t \left(a\xi_0''(t-y) + b\xi_0'(t-y) + c\xi_0(t-y)\right) f(t)dt + f(t), \\ &= f(t). \end{aligned}$$

et par linéarité, on a donc

$$ay''(t) + by(t) + cy(t) = f(t).$$

Vérifions enfin les conditions initiales (126b) et (126c). D'après (113b) et (113c), on a donc

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_0^0 \xi_0(0-y)f(y)dy + ay_0\xi_0'(0) + (ay_0' + by_0)\xi_0(0), \\ &= y_0 \end{aligned}$$

6. en fait, cela est vrai presque partout sur $\mathbb{R}$.

et

$$\begin{aligned}
y'(0) &= \int_0^0 \xi_0'(0-y)f(y)dy + \xi_0(0)f(0) + ay_0\xi_0''(0) + (ay_0' + by_0)\xi_0'(0), \\
&= y_0(-b\xi_0'(0) - c\xi_0(0)) + (ay_0' + by_0)\xi_0'(0), \\
&= (-by_0 + ay_0' + by_0)\xi_0'(0) - cy_0\xi_0(0), \\
&= y_0',
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (par unicité de la solution).

♢

B.5. Exemples

Exemple 36 (Une équation de distribution particulière)**.** Chercher toutes les distributions $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' + Y = \delta, \tag{134}$$

et déterminer celles qui appartiennentà $\mathcal{D}'_+$.

D'après la proposition 31, il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 24 (et donc définie par deux constantes) et une unique distribution Y_0 définie par (116) telles que Y est donnée par (122). L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (134) est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $\pm i$. Ainsi, d'après la définition 24 et l'équation (116), on a

$$Y = \delta * Y_0 + \xi = Y_0 + \xi,$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$\begin{aligned}
&\xi(t) = A\cos t + B\sin t, \\
&\xi_0(t) = \sin(t)
\end{aligned}$$

où A et B sont deux constantes quelconques et donc

$$Y = H\sin t + A\cos t + B\sin t. \tag{135}$$

Si, on impose que Y appartient à $\mathcal{D}'_+$, alors, d'après la proposition 123, la seule solution est donnée par

$$Y = H\sin t. \tag{136}$$

Exemple 37 (Une équation de distribution particulière)**.** Chercher toutes les distributions $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' - 3Y' + 2Y = \delta, \tag{137}$$

et déterminer celles qui appartiennentà $\mathcal{D}'_+$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, c'est-à-dire $(r-1)(r-2) = 0$, dont les racines sont 1 et 2. Comme dans l'exemple 36, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$Y = H\left(e^t - e^{2t}\right) + C_1 e^t + C_2 e^{2t}. \tag{138}$$

Si, on impose que Y appartient à $\mathcal{D}'_+$, alors, d'après la proposition 123, la seule solution est donnée par

$$Y = H\left(e^t - e^{2t}\right). \tag{139}$$

Exemple 38 (Choc en mécanique)**.** On considère un point matériel de masse m, soumis à un ressort linéaire de raideur k et à un amortissement visqueux C, dont le mouvement est donc gouverné par l'équation différentielle

$$\forall t, \quad mx''(t) + kx(t) + Cx'(t) = f(t), \tag{140}$$

où f est l'unique force extérieure appliquée. Si le solide est initialement au repos et que l'on commence appliquer une force f continue à partir de $t = 0$, la fonction x étant de classe C^2, $x(0)$ et $x'(0)$ sont nuls. Il est des cas où si on applique une force f non continue, on peut avoir une discontinuité de la vitesse initiale.

On suppose que le solide est initialement au repos et qu'on le soumet à un choc, appelé percussion, souvent considérée comme une grandeur infiniment grande appliquée sur un intervalle infiniment petit (autour de zéro, par exemple). Le bon cadre est celui des distribution, de prendre $f = F\delta$ et de considérer (140) au sens des distributions sur $\mathbb{R}$. La distribution $F\delta$ peut être considérée, comme la limite, au sens des disributions, quand ε tend vers zéro de la fonction valant $F\varepsilon$ sur $[-F\varepsilon/2, -F\varepsilon/2]$ comme nous le montrent l'exemple 6.29, l'exercice 6.2 de TD (avec $n = 1/\varepsilon$) ou le TP 2.1. On cherche donc la distribution $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telle que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = F\delta, \tag{141}$$

où F est une constante, ce qui est exactement le cadre de la proposition 32 (puisque $F\delta$ est dans $\mathcal{D}'_+$) avec $\mathcal{F} = F\delta$. On a donc, grâce à (123) :

$$X = \mathcal{F} * Y_0 = F\delta * Y_0 = FY_0,$$

Ainsi, d'après (116), X est une distribution-fonction, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à $F\xi_0$ sur $\mathbb{R}_+$ où ξ_0 est donnée dans la définition 27 (avec $a = m$, $b = C$ et $c = k$). Bref, on a donc

$$\forall t \geq 0, \quad X(t) = FY_0(t) = F\xi_0(t)H(t). \tag{142}$$

Ainsi, X est une distribution-fonction (voir figure 5), nulle sur $\mathbb{R}_-$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, continue en zéro, dont la dérivée admet une discontinuité en zéro.

Exemple 39 (Infinités de chocs successifs en mécanique)**.**
Traitons cet exemple sous la forme d'un exercice corrigé (donnée en examen à l'automne 2022).
Énoncé
Soient $\tau > 0$ et (F_n) une suite quelconque de réels.

(1) On cherche toutes les distributions $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{143}$$

et celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$.

(a) Montrer que la distribution suivante existe

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{144}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chercher tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{145}$$

(c) Par linéarité, trouver une solution particulière de (143) et conclure.

(2) Chercher une situation physique correspondant à $k = 0$ et $C > 0$?

Corrigé

(1) (a) Nous avons déjà vu (voir remarque 6.5 page 102 des corrections de TD) que la distribution définie par

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{146}$$

existe ; il suffit pour cela de considérer la suite définie par $a_i = i\tau$ et de remplacer σ_{a_i} par F_i.

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{147}$$

D'après le lemme 28, Y_n, une solution particulière de (91) avec

$$a = m, \quad b = C, \quad c = K \tag{148}$$

et

$$\mathcal{F} = \delta_{nT}, \tag{149}$$

est donnée par (115) (où ξ_0 est fournie par la définition 27). Ainsi, d'après le lemme (30), $\widetilde{Y}_n$, une solution particulière de (147) est donnée par

$$\widetilde{Y}_n = \delta_{\tau n} * Y_n.$$

D'après (116), on a donc

$$\widetilde{Y}_n = \delta_{\tau n} * (\xi_0 H) \tag{150}$$

D'après ce que l'on a déjà vu , on sait que si f est une distribution-fonction, on a

$$\delta_{\tau n} * f = f(. - \tau n), \tag{151}$$

et d'après (150), on a donc

$$\widetilde{Y}_n = (\xi_0 H)(. - \tau n), \tag{152}$$

c'est-à-dire (on rappelle que ξ_0 est donnée par la définition 27 avec (148)) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{Y}_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\tau n, \\ \xi_0(t - \tau n), & \text{si } x \geq \tau n. \end{cases} \tag{153}$$

qui appartient donc à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(c) Il suffit de sommer ensuite toute les solutions données par (en les multipliant par F_i) (152).

- Tout d'abord, montrons qu'existe la somme suivante :

$$\widetilde{Y} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n). \tag{154}$$

Prenons une fonction test ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[A, B]$. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n=0}^{p} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle &= \sum_{n=0}^{p} F_n \langle (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{p} F_n \int_{\mathbb{R}} (\xi_0 H)(t - \tau n)\phi(t)dt, \end{aligned}$$

on pose de nouveau $u = t - \tau n$ dans chaque intégrale

$$= \sum_{n=0}^{p} F_n \int_{\mathbb{R}} (\xi_0 H)(u)\phi(u + \tau n)du,$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{p} (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{p} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n)du. \tag{155}$$

Puisque $n\tau$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq N, \quad \tau p \geq B. \tag{156}$$

Soit $p \geq N$, alors d'après (156), pour tout $n \geq p$, pour tout $u \geq 0$, on a $u + \tau n \geq \tau p \geq B$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u+\tau n)du$ est nulle. Ainsi, d'après (155)

$$\forall p \geq N, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{p} F_n(\xi_0 H)(.-\tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u+\tau n)du,$$

qui est une somme finie, indépendante de p. On peut donc faire tendre p vers l'infini et donc

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi_0 H)(.-\tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u+\tau n)du,$$

ce qui nous montre que la distribution définie par (154) est définie.

- Grâce au lemme 6.55 page 87, on a donc (par linéarité de la somme "infinie" en fait)

$$\begin{aligned}
m\left(\widetilde{Y}\right)'' + k\widetilde{Y} + C\left(\widetilde{Y}\right)' &= m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right)'' + k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right) + C\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right)', \\
&= m\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n'' + k\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n' + C\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n', \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \left(m\widetilde{Y}_n'' + k\widetilde{Y}_n + C\widetilde{Y}_n'\right),
\end{aligned}$$

et puisque $\widetilde{Y}_n$ est définie comme la solution de (147)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{nT},$$

et on a donc bien trouvé une solution notée $\widetilde{Y}$ de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{157}$$

- Enfin, comme dans la preuve de la proposition 31, on montre que toute les solutions de (157) sont la somme d'une solution particulière de (157) et de l'équation homogène associée, c'est-à-dire,

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(\xi_0 H)(.-\tau n) + \xi, \tag{158}$$

où ξ, est fournie par la définition 24 (avec (148)).
Celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$ sont données, d'après la proposition 32, par

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(\xi_0 H)(.-\tau n). \tag{159}$$

(2) En cours de rédaction

REPRENDRE (voir latex)

Annexe C. Exemples de formules de saut avec un nombre infinis de discontinuités

Traitons trois exemples de fonctions pour illustrer la formules de saut avec un nombre infinis de discontinuité. (dans le cadre de la correction de l'exercice 4).

C.1. Premier exemple

En cours de rédaction

C.2. Deuxième exemple

En cours de rédaction

C.3. Troisième exemple

En cours de rédaction

Références

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[Pet98] R. Petit. *L'outil mathématique pour la physique.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 PET, 4e étage). Dunod, 1998.

[Sau] T. Saumtally. "Exercices d'Analyse". Exercices de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État.