Mécanique 4A OMI3 Automne 2019

Corrigé de l'examen du 22 Novembre 2019

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Correction de l'exercice 1.

(1) Nous utilisons tout d'abord le résultat (2.22) du cours qui permet d'écrire :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Puis l'équation (2.27) du cours permet de conclure.

(2) Puisque

$$f(z) = f(x,y) = e^x \left(\cos y + i \sin y\right), \tag{1}$$

les dérivées partielles de f valent respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \left(\cos y + i \sin y\right), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \left(-\sin y + i \cos y\right), \tag{2b}$$

qui sont continues ; ainsi f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. De plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont donc vérifiées et d'après la proposition 1.13 page 8 du cours f est dérivable ; de plus, d'après l'équation (1.15) du cours et (2a), on a

$$f'(z) = e^x \left(\cos y + i \sin y\right) = f(z).$$

Correction de l'exercice 2.

On pourra aussi consulter l'exercice de TD 5.11, où on utilise aussi la fonction $\sqrt{\cdot}$. Attention, dans cet exercice 5.11, la coupure du logarithme, utilisée, n'est pas $\mathbb{R}_-$. Une autre convention, aussi utilisée dans [AF03], y est utilisée.

On pourra aussi consulter le TP 1.4, en lien avec ces calculs.

(1) La faute commmise est l'utilisation de la formule

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \tag{3}$$

qui n'est valable que dans le cas où a et b sont des réels positifs. On verra plus bas qu'il est légitime de parler de la racine d'un complexe, moyennant certaines précaution. Ainsi, l'équation

$$i = \sqrt{-1}. \tag{4}$$

est correcte. Cependant, nous expliquerons aussi pourquoi le fait d'écrire

$$\sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}, \tag{5}$$

n'est en revanche pas correct. Nous expliquerons aussi comment rendre ce calcul correct.

(2) (a) Par définition, pour tout $z \in \mathcal{Q}$, on a

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[. \tag{6}$$

On a donc

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta},$$

qui appartient bien au plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, puisque θ est dans $]-\pi, \pi[$.
Réciproquement, si $z \in U$, on a

$$z = Re^{i\phi}, \quad R > 0, \quad \phi \in \left]-\pi, \pi\right[. \tag{7}$$

Montrons qu'il existe un unique $\zeta \in Q$ tel que

$$\zeta^n = z. \tag{8}$$

On a

$$\zeta = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[. \tag{9}$$

Ainsi, (8) est équivalent à

$$\begin{aligned} r^n &= R, \\ n\theta &\equiv \phi\,[2\pi]. \end{aligned}$$

Puisque $n\theta$ et ϕ appartiennent tous les deux à $]-\pi, \pi[$, ils sont égaux et on a donc

$$r = \sqrt[n]{R}, \tag{10a}$$

$$\theta = \frac{\phi}{n}, \tag{10b}$$

ce qui définit bien unique $\zeta \in Q$ vérifiant (8) Ainsi l'application $f_n : z \mapsto z^n$ est une bijection de la partie Q de $\mathbb{C}$ définie par

$$Q = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[\right\} \tag{11}$$

sur le plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(b) L'ensemble $\widetilde{Q}$ de l'énoncé est aussi définit par

$$\widetilde{Q} = Q \cup \mathcal{Q} \tag{12}$$

où

$$\mathcal{Q} = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta = \frac{\pi}{n}.\right\} \tag{13}$$

On remarque que l'ensemble $\mathcal{Q}$ est envoyé par la fonction f_n sur $\mathbb{R}_-$, complémentaire de U dans $\mathbb{C}$. Ainsi

$$f_n \text{ est une bijection de } \widetilde{Q} \text{ sur } \mathbb{C}. \tag{14}$$

Notons que

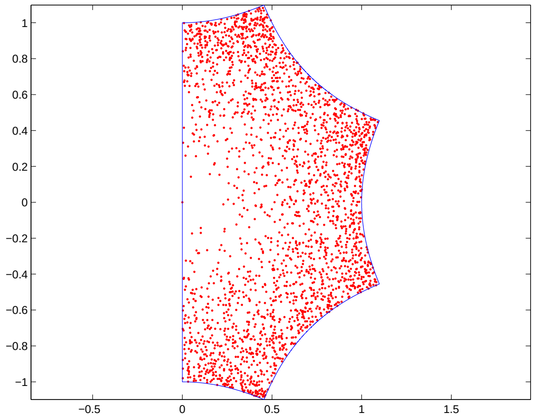
$$0^n = 0. \tag{15}$$

(c) Il est légitime de noter $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ou $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ la fonction réciproque de f_n et par définition de f_n^{-1}, notée comme dans le cas réel $z^{1/n}$, on a donc

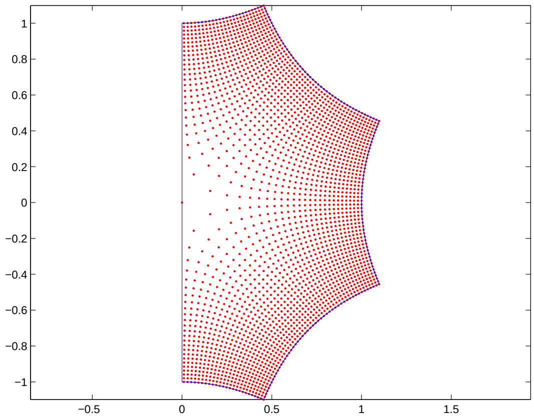
$$\forall z \in Q, \quad \forall \zeta \in U, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}} \tag{16}$$

et

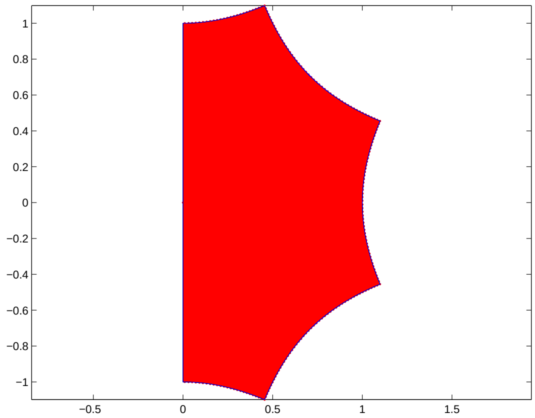
$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta = z^n \Longleftrightarrow z = \zeta^{\frac{1}{n}}. \tag{17}$$



(a) Image d'une partie de D (choix aléatoire)



(b) Image d'une partie de D (choix équiréparti)



(c) Image de D

FIGURE 1. Image d'une partie ou de la totalité de D par $z^{1/2}$.

Remarque 1. On peut vérifier que matlab utilise bien la même définition des fonctions $z^{1/n}$ en traçant l'image d'un ensemble de points appartenant à D, défini par

$$z \in D \iff \mathrm{Re}(z) \in [-1,1] \text{ et } \mathrm{Im}(z) \in [-1,1].$$

Voir les figures 1 et 2. On consultera le TP 1.4 pour retrouver ces figures.

(d) On retrouve alors une extension à $\mathbb{C}$ des fonctions x^n et $x^{1/n}$ qui sont définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x = y^n \Longleftrightarrow y = x^{\frac{1}{n}}. \tag{18}$$

Remarque 2. Montrons que

$$\forall z \in \widetilde{Q}, \quad (z^n)^{\frac{1}{n}} = z, \tag{19}$$

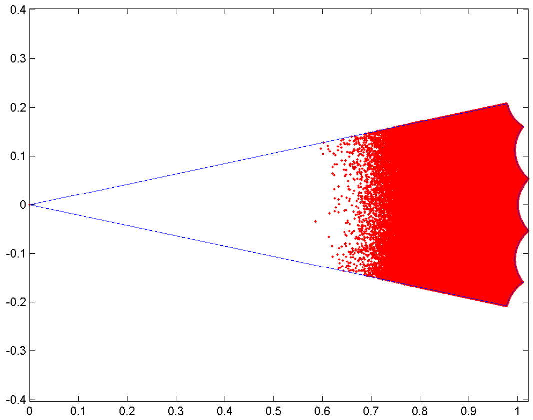
et que

$$\forall \in \mathbb{C}, \quad z = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n, \tag{20}$$

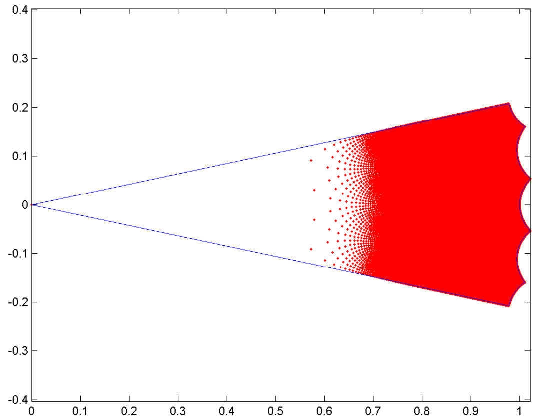
mais que on n'a pas nécessairement :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z^n)^{\frac{1}{n}} = z. \tag{21}$$

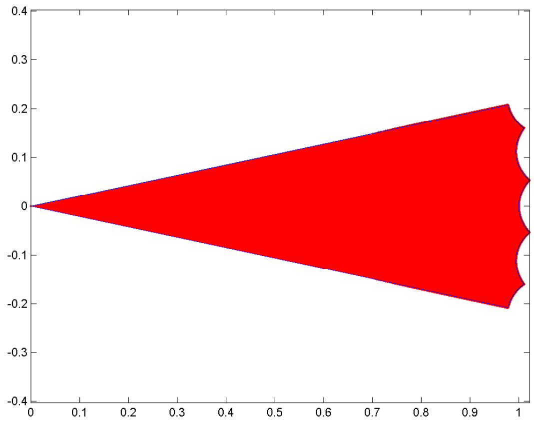
Les équations (19) et (20), proviennent tout simplement de la définition de f_n et de f_n^{-1}, comme bijection respectives de $\widetilde{Q}$ sur $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{C}$ sur $\widetilde{Q}$.



(a) Image d'une partie de D (choix aléatoire)



(b) Image d'une partie de D (choix équiréparti)



(c) Image de D

FIGURE 2. Image d'une partie ou de la totalité de D par $z^{1/15}$.

Démontrons (21) en explicitant $(z^n)^{\frac{1}{n}}$.
On utilise la définition

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(z^n)}, \tag{22}$$

et la difficulté est que l'on n'a pas comme dans le cas réel :

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n\operatorname{Ln}(z), \tag{23}$$

puisqu'on peut montrer, comme dans le cas de l'équation (2.52) du cours, que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \operatorname{Ln}(z^n) = n\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi, \tag{24}$$

où $k \in \{-n, ..., n\}$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, on a

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = 0 = z.$$

On a donc z non nul et on peut supposer que

$$z = \rho e^{i\theta}, \tag{25}$$

où $\theta \in]-\pi, \pi]$. On a donc, d'après (22)

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}\left(\left(\rho e^{i\theta}\right)^n\right)} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(\rho^n e^{in\theta})},$$

et donc

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i\frac{1}{n}\arg\left(e^{in\theta}\right)} \tag{26}$$

On peut découper $\mathbb{C}^*$ de telle sorte que, pour z donné par (25), on ait

$$-\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \theta \leq \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \tag{27}$$

où k est compris entre deux valeurs entieres. Attention, au voisine de $\mathbb{R}_-$, il faut affiner cette définition en prenant deux-sous cas, non décrits ici. On a donc

$$e^{in\theta} = e^{i\phi}$$

où $\phi = n\theta$ et donc

$$-\pi < n\theta - 2k\pi \leq \pi,$$

de sorte que

$$\arg\left(e^{in\theta}\right) = n\theta - 2k\pi,$$

et donc grâce à (26),

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

et donc

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = ze^{-\frac{2ki\pi}{n}}. \tag{28}$$

Par exemple, on peut montrer, pour $n = 2$, que si $Z \in \widetilde{Q}$,

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = z,$$

et sinon

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = -z,$$

autrement dit, on retrouve le cas réel :

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm z,$$

à ne pas écrire ici sous la forme

$$\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} = |z|\,!$$

(3) (a) (i) D'après (17) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z_0 \in \widetilde{Q}$ tel que $\zeta = z_0^2$, noté $\sqrt{\zeta}$. Ainsi

$$z^2 = \zeta \tag{29}$$

est équivalent à

$$z^2 = z_0^2. \tag{30}$$

Si ζ est nul, il en est de même de z_0 et de z. Sinon z_0 est non nul, on peut diviser par z_0 et obtenir

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1. \tag{31}$$

Les deux nombres complexes τ vérifiant

$$\tau^2 = 1, \tag{32}$$

sont ± 1 de sorte que (29) est équivalent à

$$z = \pm\sqrt{\zeta}, \tag{33}$$

ce qui est vrai, que ζ soit nul ou non et ce qui est identique au cas réel.

(ii) Pour calculer, de deux façons différentes, $\sqrt{1+i}$, on procède ainsi :
On donne deux méthodes différentes.

(A) On utilise le calcul habituel de calcul de racine carré d'un nombre complexe. Rappelons à ce propos les formules habituelles, par exemple issues de l'annexe A du cours : soit un nombre complexe z (non nul). Il existe une unique paire $\{z_1, z_2\}$ de complexes telle que

$$z_1 = -z_2 \text{ et } z_1^2 = z_2^2 = z. \tag{34}$$

On pose $z = a + ib$ et on cherche les nombres z_1 et z_2 sous la forme

$$Z = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$z = a + ib = Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha\beta = b/2. \end{cases} \tag{35}$$

Puisque $|Z|^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est connu, on déduit donc de (35) ue

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{36}$$

Par somme et différence, on en déduit α^2 et β^2 :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right). \end{cases} \tag{37}$$

On vérifie que les deux quantités $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ et $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$ sont nécessairement positives. On en déduit donc alors α (aux signe près, deux solutions) et β (aux signe près, deux solutions), ce qui fait quatre solutions pour Z. On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par la seconde équation de (35) on obtient donc bien deux solutions opposées pour Z. Si on prend $a = 1$ et $b = 1$, on obtient donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right). \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)}, \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right)}. \end{cases}$$

Puisque $\alpha\beta > 0$, on a donc les deux racine sous la forme

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right)}\right).$$

On ne garde que le complexe à partie réelle strictement positive (c'est-à-dire celui qui est dans $\widetilde{Q}$) :

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right)}. \tag{38}$$

Le carré du module de ce nombre complexe vaut

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2},$$

et on admet que l'argument de ce nombre vaut $\pi/8$, de sorte que (38) est équivalent à

$$z = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}}. \tag{39}$$

(B) La seconde façon de calculer $\sqrt{1+i}$ est d'anticiper sur la question (4) On a donc, d'après la définition du cours,

$$\sqrt{1+i}=(1+i)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+i)}=e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{i\pi}{4}\right)}=e^{\frac{1}{4}\ln(2)+\frac{i\pi}{8}}=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}},$$

ce qui est bien identique à (39)

(b) On reprend les calculs de la question 3(a)i pour un entier n quelconque.
D'après (17) pour tout $\zeta\in\mathbb{C}$, il existe un unique $z_0\in\widetilde{Q}$ tel que $\zeta=z_0^n$, noté $\sqrt[n]{\zeta}$. Ainsi

$$z^n=\zeta \tag{40}$$

est équivalent à

$$z^n=z_0^n. \tag{41}$$

Si ζ est nul, il en est de même de z_0 et de z. Sinon z_0 est non nul, on peut diviser par z_0 et obtenir

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n=1. \tag{42}$$

Les n complexes τ vérifiant

$$\tau^n=1, \tag{43}$$

sont les n racines n-ième de l'unité définie par $\tau=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $0\leq k\leq n-1$, de sorte que (40) est équivalent à

$$z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\sqrt[n]{\zeta},\ \text{avec } 0\leq k\leq n-1. \tag{44}$$

ce qui est vrai, que ζ soit nul ou non.

(4) Reprenons les calculs de la question 2a On y a montré que l'unique $\zeta\in Q$ vérifiant (8) est donné par (9) avec r et θ définis par (10). On a donc

$$\zeta=re^{i\theta}=\sqrt[n]{R}e^{\frac{i\phi}{n}},$$

soit encore en utilisant les propriétés du logarithme réel et de l'exponentielle complexe :

$$\zeta=R^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\phi}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(R)}e^{\frac{i\phi}{n}},$$

et donc

$$\zeta=e^{\frac{1}{n}(\ln(R)+i\phi)}. \tag{45}$$

D'après la définition (7) de z, R et ϕ et la définition du logarithme complexe 2.28 page 22 du cours, on a

$$\ln(R)+i\phi=\operatorname{Ln}(z),$$

Ainsi, d'après (45), n a

$$\forall z\in U,\quad z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(z)}, \tag{46}$$

ce qui est exactement la définition de $z^{1/n}$ correspondant à la fonction z^α du cours pour $\alpha=1/n$, donnée par (2.56). *Attention*, dans cette définition, z ne peut appartenir à $\mathbb{R}_-$. Si c'est le cas, d'après ce qui précède, f_n envoie $\mathcal{Q}$ sur $\mathbb{R}_-$ et donc f_n^{-1} envoie $\mathbb{R}_-$ sur $\mathcal{Q}$. Ainsi, si z est un réel négatif, on a en reprenant les calculs précédents

$$z^{1/n}=e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|)+i\pi)}. \tag{47}$$

Si on adopte les conventions des remarques remarque 2.30 page 23 et 2.37 page 27, on a $\arg(z)=\pi$ et $\operatorname{Ln}(z)=\ln(|z|)+i\pi$ et donc d'après (47),

$$\forall z\in\mathbb{R}_-,\quad z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|)+i\arg(z))}=e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(z)}. \tag{48}$$

D'après l'équation (2.60) du cours, cette équation a aussi un sens pour $z=0$ et est cohérente avec (15).

D'après (46) et (48), on a donc montré que $z\mapsto z^{\frac{1}{n}}$, avec la définition de la question 2c, coïncide avec la fonction z^α du cours pour $\alpha=1/n$, à condition d'étendre le logarithme complexe à $\mathbb{R}_-^*$.

(5) Levons alors le paradoxe de la question 1. On peut écrire rigoureusement en utilisant tout ce qui précède :

$$\sqrt{-1} = i. \tag{49}$$

Car i est dans $\widetilde{Q}$ (avec $n = 2$) et $i^2 = -1$. On a donc rigoureusement

$$1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{(-1) \times (-1)},$$

et donc

$$1 = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}((-1)\times(-1))} \tag{50}$$

On aussi

$$-1 = i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$

soit encore

$$-1 = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(-1)} e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(-1)} = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(-1)+\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(-1)},$$

et donc

$$-1 = e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(-1)+\mathrm{Ln}(-1))}. \tag{51}$$

Dire que "$-1 = 1$", d'après (50) et (51), revient à donc écrire que

$$\mathrm{Ln}(-1) + \mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{Ln}((-1) \times (-1)), \tag{52}$$

ce qui est tout à fait aussi faux que d'utiliser (3) avec a et b non réels positifs. D'après l'équation (2.52) page 23 du cours, on a

$$\mathrm{Ln}((-1) \times (-1)) = \mathrm{Ln}(-1) + \mathrm{Ln}(-1) + 2ik\pi, \tag{53}$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$. dans la mesure où le logarithme complexe est étendu à $\mathbb{C}$ tout entier. Ainsi, dire que (52) est faux revient à montrer que $k \neq 0$.

Montrons-le : Si on reprend la preuve de l'équation (2.52) du cours avec $z_1 = -1$ et $z_2 = -1$, on a : Pour $l \in \{1, 2\}$, on écrit $z_l = \rho_l e^{i\theta_l}$ où $\theta_l \in]-\pi, \pi]$ (et non dans $]-\pi, \pi[$) On a donc

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\left(\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right),$$

et puisque $\theta_1 + \theta_2$ n'est pas nécessairement dans $]-\pi, \pi]$, d'après les points 5 et 6 page 23 du cours

$$\begin{aligned}
&= \ln(\rho_1\rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2) + 2ik\pi,\\
&= \ln(\rho_1) + i\theta_1 + ln(\rho_2) + i\theta_2 + 2ik\pi,\\
&= \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2 + 2ik\pi.
\end{aligned}$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned}
&-\pi < \theta_1 \leq \pi,\\
&-\pi < \theta_2 \leq \pi,
\end{aligned}$$

et donc

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi.$$

On a vu dans la preuve du cours que si

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 < -\pi,$$

alors $k = 1$. De même, si

$$\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi,$$

on a $k = -1$. Enfin, si

$$-\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi,$$

on a $k = 0$. Ici, on a $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ et donc

$$k = -1, \tag{54}$$

et le paradoxe est levé ! ! Plus précisément, on a, de plus, d'après (53),

$$\mathrm{Ln}((-1) \times (-1)) = \mathrm{Ln}(-1) + \mathrm{Ln}(-1) - 2i\pi. \tag{55}$$

Si on reprend le faux calcul paradoxal, d'après (50) et (55), on a donc

$$\begin{aligned}
1 &= e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}((-1)\times(-1))},\\
&= e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(-1)+\mathrm{Ln}(-1)-2i\pi)},\\
&= e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(-1)+\mathrm{Ln}(-1))}e^{\frac{1}{2}(-2i\pi)},\\
&= e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(-1)}e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(-1)}e^{-i\pi},\\
&= \sqrt{-1}\sqrt{-1}e^{-i\pi},\\
&= i^2 \times (-1),\\
&= 1.
\end{aligned}$$

la présence du -1 salvateur provient donc de la valeur non nulle de k ! !

Remarque 3. Il est important de se rappeler que le logarithme complexe étendu sur $\mathbb{C}$ n'est pas continu. Cette absence de continuité peut induire des erreurs comme le montre le raisonnement faux suivant : Soit $\varepsilon > 0$.

On a

$$(-1 + \varepsilon i)\,(-1 - \varepsilon i) = 1 + \varepsilon^2. \tag{56}$$

On écrit, fort du raisonnemement précédent,

$$\mathrm{Ln}((-1 + \varepsilon i)\,(1 - \varepsilon i)) = \mathrm{Ln}\,(-1 + \varepsilon i) + \mathrm{Ln}\,(1 - \varepsilon i)\,. \tag{57}$$

En effet, avec les notations utilisées dans la correction de la question 5, on a

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \arg(-1 + \varepsilon i) \in]0, \pi[,\\
\theta_2 &= \arg(-1 - \varepsilon i) \in] - \pi, 0[,
\end{aligned}$$

et donc

$$\theta_1 + \theta_2 \in] - \pi, \pi[,$$

et donc $k = 0$, ce qui justifie (56). D'après (56), on a donc

$$\mathrm{Ln}(1 + \varepsilon^2) = \mathrm{Ln}\,(-1 + \varepsilon i) + \mathrm{Ln}\,(-1 - \varepsilon i)\,. \tag{58}$$

Ainsi, on a successivement

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \varepsilon^2} &= e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(\sqrt{1+\varepsilon^2})},\\
&= e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(-1+\varepsilon i))}e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(-1-\varepsilon i))},\\
&= \sqrt{-1 + \varepsilon i}\sqrt{-1 - \varepsilon i}
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2} = \sqrt{-1 + \varepsilon i}\sqrt{-1 - \varepsilon i}. \tag{59}$$

On passe à la limite $\varepsilon \to 0$, et on a

$$1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1, \tag{60}$$

et de nouveau un problème !

Ce paradoxe vient du fait que le logarithme complexe n'est pas continu au voisinage de $\mathbb{R}_-$! Si $\varepsilon > 0$, le complexe $-1+\varepsilon i$ est au-dessus de cet axe et son argument est dans $]0,\pi[$ et tend vers π quand ε tend vers 0. Avec les conventions des remarques 2.30 et 2.37 cours, on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Ln}\,(-1+\varepsilon i) = i\pi. \tag{61}$$

En revanche, le complexe $-1-\varepsilon i$ est au-dessous de cet axe et son argument est dans $]-\pi,0[$ et tend vers $-\pi$ quand ε tend vers 0. Avec les conventions des précédentes, on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Ln}\,(-1-\varepsilon i) = -i\pi. \tag{62}$$

On pourra consulter la correction de l'exercice de TD 2.1. On passe à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (59) et on a donc

$$1 = e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2}} = i \times (-i) = 1,$$

et il n'y a plus de paradoxe !

Correction de l'exercice 3.

Le calcul présenté est très proche du calcul de l'intégrale de l'exercide de TD 5.2.
Calculons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx.$$

Considérons f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^4+z^2+1}. \tag{63}$$

Les pôles de f sont donnés par

$$z^4+z^2+1=0,$$

soit, en posant $U=z^2$,

$$U^2+U+1=0,$$

de solution $U=j=e^{2i\pi/3}$ ou $U=\overline{j}=e^{-2i\pi/3}$. On obtient donc

$$z = \pm e^{\pm i\pi/3}.$$

On peut aussi remarquer que les pôles de f sont les racines carrées de j et j^2, soit $\pm j^2$ et $\pm j$ (puisque $j^4=j$). Seuls j et $-j^2$ ont une partie imaginaire positive.

$$\text{Les pôles de } f \text{ à partie imaginaire positive sont } j \text{ et } -j^2. \tag{64}$$

On peut appliquer la proposition 5.7 page 55 du cours, on a directement

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f,\alpha_k) = 2i\pi \left(\text{Rés}(f,j) + \text{Rés}(f,-j^2)\right).$$

et donc

$$I = 2i\pi \left(\text{Rés}(f,j) + \text{Rés}(f,-j^2)\right).$$

Ces pôles sont d'ordre 1 et d'après le lemme 3.37 page 43 du cours, on a, pour $\alpha \in \{j,-j^2\}$,

$$\text{Rés}(f,\alpha) = \frac{1}{4z^3+2z}.$$

En particulier, pour $\alpha = j$, on a

$$\text{Rés}(f,j) = \frac{1}{4j^3+2j} = \frac{1}{4+2j} = \frac{1}{2(2+j)},$$

et pour $\alpha = -j^2$,

$$\text{Rés}(f,-j^2) = \frac{1}{-4z^6-2j^2} = -\frac{1}{2(2z^6+j^2)} = -\frac{1}{2(2+j^2)}.$$

On a donc

$$I = i\pi\left(\frac{1}{2+j} - \frac{1}{2+j^2}\right).$$

Or, on a

$$1 + j + j^2 = 0,$$

et donc successivement

$$\begin{aligned}
I &= i\pi\left(\frac{1}{2+j} - \frac{1}{2-1-j}\right),\\
&= i\pi\left(\frac{1}{2+j} - \frac{1}{1-j}\right),\\
&= \frac{i\pi}{(2+j)(1-j)}\left(1-j-2-j\right),\\
&= -\frac{i\pi(1+2j)}{2-2j+j-j^2},\\
&= -\frac{i\pi(1+2j)}{2-j-j^2},\\
&= -\frac{i\pi(1+2j)}{2-j+1+j},\\
&= -\frac{i\pi(1+2j)}{3},
\end{aligned}$$

et puisque

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

on a

$$I = -\frac{i\pi\left(1-1+i\sqrt{3}\right)}{3} = -\frac{i\pi\left(i\sqrt{3}\right)}{3},$$

et donc finalement

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}. \tag{65}$$

Correction de l'exercice 4.

(1) On peut supposer, sans perte de généralité, que $\lambda_n > 0$. On a donc en faisant le changement de variable :

$$y = \lambda_n(x-a), \tag{66}$$

$dy = \lambda_n dx$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n |f(\lambda_n(x-a))|dx$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy, \tag{67}$$

qui est fini car $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, f_n appartient à $L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$).

(2) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si on refait le calcul (66) et (67) sur l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx,$$

et on obtient de la même façon

$$\begin{aligned}\langle f_n, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_n f(\lambda_n(x-a))\phi(x)dx,\end{aligned}$$

et donc

$$\langle f_n, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi\left(\frac{y}{\lambda_n}+a\right)dy \tag{68}$$

On montre exactement comme dans la correction de l'exercice de TD 6.2 page 55 que, puisque $1/\lambda_n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(a)dy = \phi(a)\int_{\mathbb{R}} f(y)dy = \phi(a),$$

et donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty}\langle f_n, \phi\rangle = \langle \delta_a, \phi\rangle, \tag{69}$$

ce qui traduit exactement que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} f_n = \delta_a, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{70}$$

Correction de l'exercice 5.
On renvoie à la correction de l'exercice de TD 6.9 page 62, que l'on rappelle ici :

(1) Sur chaque intervalle $[n, n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$, E est constante et égale à n, soit

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in [n, n+1[, \quad E(x) = n. \tag{71}$$

(2) La fonction E est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. En chaque entier n, $n \in \mathbb{Z}$, elle présente un saut de hauteur 1. Si la formule des sauts était vraie pour un ensemble infini (discret) de discontinuité, on pourrait écrire directement

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Cela est vrai, mais il faut le montrer.

Proposons deux preuves.

(a) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_n égale à E sur $[-n, n]$ et nulle sinon. La fonction E_n tend simplement sur $\mathbb{R}$ vers E quand n tend vers l'infini. Cette limite a aussi lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et si n est assez grand pour que le support de ϕ (borné) soit inclus dans $[-n, n]$. On a donc, à partir de $n \geq N$,

$$\langle E_n, \phi\rangle = \langle E, \phi\rangle$$

et donc la limite quand n tend vers l'infini de $\langle E_n, \phi\rangle$ existe et vaut $\langle E, \phi\rangle$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = E, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

ce qui implique aussi

$$\lim_{n\to+\infty} E_n' = E', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{72}$$

Par ailleurs, à n fixé, la formule des sauts donne

$$E_n' = \sum_{|k|<n} \delta_k \tag{73}$$

Comme précédemment, on vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|k|<n} \delta_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{74}$$

Compte tenu de (72), (73), (74), on a donc

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k.$$

(b) On considère la fonction de Heaviside H dont on rappelle ici la définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{75}$$

Le fait que $H(0) = 1$ n'a en principe pas d'incidence sur les calculs de distributions fait presque partout, mais c'est important de le spécifier dans cet exercice sur la partie entière. Montrons que l'on peut écrire (71) sous la forme d'une somme faisant intervenir H.
Supposons tout d'abord $x \geq 0$. Posons

$$F(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k).$$

Cette somme est finie et vaut $E(x)$. En effet, d'après (75) $H(x-k)$ est non nul et vaut 1 ssi $x-k \geq 0$ et $k \geq 1$ soit $1 \leq k$ et $k \leq x$ soit encore $1 \leq k$ et $k \leq E(x)$. On a donc

$$F(x) = \sum_{1\leq k\leq E(x)} H(x-k) = \sum_{1\leq k\leq E(x)} 1 = E(x).$$

Notons aussi que si on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_+(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k), \tag{76}$$

alors cette somme est finie pour tout x et nulle si $x < 0$. On a déjà vu le cas $x \geq 0$. Si $x < 0$, alors pour tout $k \geq 1$, $x - k < -k < 0$ et donc cette somme est nulle. Finalement, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_+(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{77}$$

Supposons maintenant que $x < 0$ et que x est non entier. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq -1$. Si $x \in]p, p+1[$, alors $E(x) = p$. On a aussi $-x \in]-p-1, -p[$ et donc $E(-x) = -p-1$. Ainsi,

$$E(x) = p = -(E(x-) + 1) = -E(-x) - 1,$$

et d'après (77)

$$E(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} -H(-x-k)\right) - 1.$$

Remarquons aussi que

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad -H(-y) + 1 = H(y),$$

et donc, puisque x est non entier

$$E(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x+k) - 1\right) - 1,$$

cette somme étant finie. On peut aussi l'écrire

$$E(x) = \left(\sum_{k\in-\mathbb{N}^*} H(x-k) - 1\right) - 1,$$

ou encore

$$E(x) = \sum_{k\in-\mathbb{N}} H(x-k) - 1,$$

puisque pour $x<0$, $H(x)=0$. Comme précédemment, on montre que si l'on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_-(x) = \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1, \tag{78}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_-(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x<0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{79}$$

Si x est entier, on peut vérifier que cette équation n'est plus vraie mais, au sens des distributions, cela nous est égal. Compte tenu de (77) et (79), on a donc

$$E(x) = E_+(x) + E_-(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k) + \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1, \text{ p.p sur } \mathbb{R}. \tag{80}$$

On ne peut pas écrire

$$E(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k) + \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - \sum_{k\in -\mathbb{N}} 1,$$

car la somme $\sum_{k\in-\mathbb{N}} 1$ est infinie. Les sommes intervenant dans (80) sont finies et on peut montrer, comme dans la preuve (2a), que cette égalité a lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme série de distributions :

$$E = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(.-k) + \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(.-k) - 1, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{81}$$

Puisque

$$H'(.-k) = \delta_k, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

on peut dériver terme à terme pour obtenir :

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \delta_k + \sum_{k\in -\mathbb{N}} \delta_k, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

et donc

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{82}$$

Références

[AF03] M. J. Ablowitz et A. S. Fokas. *Complex variables : introduction and applications.* Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.