Mécanique 4A OMI3 — Automne 2019

Corrigé de l'examen du 27 Novembre 2019

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Correction de l'exercice 1.

(1) Nous utilisons tout d'abord le résultat (2.22) du cours qui permet d'écrire :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Puis l'équation (2.27) du cours permet de conclure.

(2) Puisque

$$f(z) = f(x,y) = e^x (\cos y + i \sin y), \tag{1}$$

les dérivées partielles de f valent respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x (\cos y + i \sin y), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x (-\sin y + i \cos y), \tag{2b}$$

qui sont continues ; ainsi f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. De plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont donc vérifiées et d'après la proposition 1.13 page 8 du cours f est dérivable ; de plus, d'après l'équation (1.15) du cours et (2a), on a

$$f'(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = f(z).$$

(3) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ fixé et $H = h + ik \in \mathbb{C}$, on calcule

$$\alpha = f(z+H) - f(z).$$

Il vient, par définition,

$$\begin{aligned}
\alpha &= f(x+h, y+k) - f(x,y),\\
&= (f(x+h,y+k) - f(x,y+k)) + (f(x,y+k) - f(x,y)),\\
&= \left(e^{x+h} - e^x\right)(\cos(y+k) + i\sin(y+k)) + (\cos(y+k) - \cos(y) + i(\sin(y+k) - \sin y))\, e^x.
\end{aligned}$$

En écrivant les développements limités des fonctions exponentielle, cos et sinus au voisinage respectifs de x, y et y, on obtient, en écrivant que $o(h)$ et $o(k)$ ne dépendent respectivement que de h et k (mais éventuellement de x et de y) :

$$\begin{aligned}
&e^{x+h} = he^x + o(h),\\
&\cos(y+k) - \cos(y) = -k\sin(y) + o(k),\\
&\sin(y+k) - \sin(y) = k\cos(y) + o(k),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\alpha &= (\cos(y+k)+i\sin(y+k))(he^x+o(h))+(-k\sin(y)+ik\cos(k)+o(k))e^x,\\ &= e^x\left(h(\cos(y+k)+i\sin(y+k))+ik(\cos(y)+i\sin(y))\right)+o(h)+o(k).\end{aligned}$$

On écrit aussi

$$\begin{aligned}\cos(y+k)&=\cos(y)+\varepsilon(k),\\ \sin(y+k)&=\sin(y)+\varepsilon(k),\end{aligned}$$

où $\varepsilon(k)$ (fonction générique, toujours notée ainsi) tend vers zéro quand k tend vers zéro. On a donc

$$\begin{aligned}\alpha &= e^x\left(h(\cos(y)+i\sin(y))+ik(\cos(y)+i\sin(y))\right)+o(h)+o(k),\\ &= e^x(\cos(y)+i\sin(y))(h+ik)+o(h)+o(k),\end{aligned}$$

et donc

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=f(x,y)H+o(h)+o(k),$$

et donc, pour tout $H\neq 0$:

$$\frac{f(z+H)-f(z)}{H}=f(z)+\frac{o(h)+o(k)}{H}. \tag{3}$$

On remplace $o(h)$ et $o(k)$ respectivement par $k\varepsilon(k)$ et $h\varepsilon(h)$:

$$\left|\frac{k\varepsilon(k)+h\varepsilon(h)}{|H|}\right|\leq \max\left(|\varepsilon(k)|,|\varepsilon(h)|\right)\frac{|h|+|k|}{|H|},$$

et en écrivant l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}&\leq C\max\left(|\varepsilon(k)|,|\varepsilon(h)|\right)\frac{\sqrt{\left(|h|^2+|k|^2\right)}}{|H|},\\ &\leq C\max\left(|\varepsilon(k)|,|\varepsilon(h)|\right),\end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand H tend vers zéro. D'après (3), on a donc

$$\lim_{H\to 0}\frac{f(z+H)-f(z)}{H}=f(z). \tag{4}$$

Cela implique que f est dérivable (au sens complexe), de dérivée égale à elle-même.

Correction de l'exercice 2.

Remarque 1. Les résultats de la proposition 1 de l'énoncé sont montrés dans l'examen du 22 Novembre 2019 et son corrigé.

Donnons maintenant le corrigé à proprement parler de l'exercice.
On pourra consulter les url suivantes :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_cosinus`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_sinus`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonométrie_complexe`

(1) La fonction sinus complexe étend la fonction réelle à $\mathbb{C}$ tout entier et est donnée par la proposition 2.24 page 20 du cours et est rappelée ici :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{5}$$

(2) (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ donné, on cherche donc un complexe ξ vérifiant

$$\sin \xi = z. \tag{6}$$

Compte tenu de la définition du sinus, cela est équivalent à

$$\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = z,$$

soit encore à

$$e^{i\xi} - e^{-i\xi} = 2iz,$$

et puisque $e^{i\xi}$ est non nul, c'est équivalent à

$$\left(e^{i\xi}\right)^2 - e^{-i\xi}e^{i\xi} = 2ize^{i\xi},$$

soit encore à

$$\left(e^{i\xi}\right)^2 - 2ize^{i\xi} - 1 = 0.$$

En posant

$$Z = e^{i\xi}. \tag{7}$$

on obtient donc l'équation du second degré suivante (en Z) :

$$Z^2 - 2izZ - 1 = 0, \tag{8}$$

(b) Pour résoudre (8) on calcule le discriminant réduit donné par

$$\delta' = (iz)^2 + 1 = 1 - z^2.$$

On sait que ce nombre complexe admet deux racines carrées. On a vu précedemment (voir proposition rappelée en début d'énoncé avec $n = 2$) que la fonction $\sqrt{.}$ est définie sur $\mathbb{C}$ et est la fonction réciproque de $z \mapsto z^2$. On peut considérer l'une des des racines de $1 - z^2$ définie par $\sqrt{1 - z^2}$. Les deux racines Z de (8) sont données par

$$Z = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \tag{9}$$

(c) Ces deux racines sont non nulles, car leur produit vaut :

$$\alpha = \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)\left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right) = (iz)^2 - \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2 = -z^2 - \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2,$$

soit encore, d'après la formule (C.24) de l'annexe du cours, avec $n = 2$:

$$\alpha = -z^2 - 1 + z^2 = -1 \neq 0.$$

On choisit arbitrairement l'une des deux racines, donnée par $iz + \sqrt{1 - z^2}$. D'après (7), on sait que ξ vérifie donc

$$e^{i\xi} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

et donc, d'après ce qu'on a vu sur le logarithme complexe, défini sur $\mathbb{C}^*$, on peut donc choisir ξ vérifiant

$$i\xi = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

qui est défini puisque

$$iz + \sqrt{1 - z^2} \neq 0. \tag{10}$$

On pose donc conventionnellement

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{11}$$

Par construction, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\arcsin(z)) = z. \tag{12}$$

Remarque 2. On aurait pu considérer l'autre racine et poser conventionnellement

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \operatorname{Ln}\left(iz - \sqrt{1-z^2}\right). \tag{13}$$

(3) Pour calculer

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)i\right)\right), \tag{14}$$

on utilise (11). On a successivement, en posant

$$z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)i\right), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{2}{16}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)^2-\left(e-\frac{1}{e}\right)^2+2i\left(e+\frac{1}{e}\right)\left(e-\frac{1}{e}\right)\right), \\ &= \frac{1}{8}\left(e^2+\frac{1}{e^2}+2-e^2-\frac{1}{e^2}+2+2i\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\right), \\ &= \frac{1}{4}\left(2+i\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\right) \end{aligned}$$

et donc

$$1-z^2 = \frac{1}{4}\left(4-2-i\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\right),$$

et donc

$$1-z^2 = \frac{1}{4}\left(2-i\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\right). \tag{16}$$

Pour chercher $\zeta = \sqrt{1-z^2}$, on utilise la méthode de l'annexe de l'annexe A du cours : On pose $u = 1-z^2 = a+ib$ où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right) \end{cases}$$

et on cherche le nombre ζ sous la forme

$$\zeta = \alpha + i\beta.$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right). \end{cases}$$

On a

$$a^2+b^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}\left(e^4+\frac{1}{e^4}-2\right) = \frac{1}{16}\left(e^4+\frac{1}{e^4}+2\right) = \left(\frac{1}{4}\left(e^2+\frac{1}{e^2}\right)\right)^2$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(e^2+\frac{1}{e^2}\right)\right), \\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(e^2+\frac{1}{e^2}\right)\right), \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{8}\left(2+e^2+\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e+\frac{1}{e}\right)\right)^2, \\ \beta^2 = \frac{1}{8}\left(-2+e^2+\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)^2. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e+\frac{1}{e}\right), \\ \beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right), \end{cases}$$

On discrimine grâce à l'étude du signe de $\alpha\beta$ fourni par

$$\alpha\beta = b/2 < 0$$

et donc on a les deux racines suivantes :

$$\zeta = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right) - i\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)$$

Conformément au choix de l'annexe C, on choisit la racine à partie réelle positive :

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right) - i\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)$$

Il nous reste donc à calculer

$$\begin{aligned}
\eta &= -i\,\mathrm{Ln}\left(i\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)i\right)\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)-i\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)\right),\\
&= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)(i+1)+\left(e-\frac{1}{e}\right)(-i-1)\right)\right),\\
&= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e\,(i+1-i-1)+\frac{1}{e}\,(i+1+i+1)\right)\right),\\
&= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{e}\,(2+2i)\right)\right),\\
&= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+i}{e}\right).
\end{aligned}$$

Or on a

$$1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},$$

et donc

$$\eta = -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{e}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$

et par définition du logarithme complexe

$$\eta = -i\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)+i\frac{\pi}{4}\right) = -i\left(-\ln(e)+i\frac{\pi}{4}\right),$$

et donc, finalement :

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(e+\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)i\right)\right) = \frac{\pi}{4}+i. \tag{17}$$

(4) On a vu en cours (proposition 2.38 page 27) que la fonction $z^{1/2}$ est dérivable de dérivée $1/2z^{-1/2}$. Cela est vrai sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Compte tenu des résultats précédents sur la racine, on en déduit que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}. \tag{18}$$

De même, le logarithme complexe est dérivable sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ de dérivée $1/z$:

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad (\mathrm{Ln}\,z)' = \frac{1}{z}. \tag{19}$$

Grâce à la propostion 1.7 du cours, on peut donc dériver successivement en utilisant (18) et (19), si $1-z^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, on a

$$\left(\sqrt{1-z^2}\right)' = -\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

et si $1-z^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, on a donc

$$\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)'=i-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{i}{\sqrt{1-z^2}}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).$$

Ainsi, si $1-z^2$ et $iz+\sqrt{1-z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors

$$\left(\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\right)'=\frac{\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)'}{iz+\sqrt{1-z^2}}=\frac{i}{\sqrt{1-z^2}}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\times\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}=\frac{i}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Ainsi, grâce à (11), on a si $1-z^2$ et $iz+\sqrt{1-z^2}$ ne sont pas des nombres réels négatifs, alors

$$(\arcsin(z))'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{20}$$

On peut montrer que $1-z^2$ n'est pas un réel négatifs ssi z appartient à $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. L'étude des z tels que $iz+\sqrt{1-z^2}$ n'est pas un réel négatif est plus difficile et, en fait, inutile. On admet en utilisant (20), que arcsin est dérivable sur $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$ et que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[),\quad (\arcsin(z))'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{21}$$

(5) (a) Supposons z réel. On a alors

$$|z|>1\Longleftrightarrow 1-z^2<0. \tag{22}$$

— Dans le cas

$$|z|>1, \tag{23}$$

le réel $1-z^2$ est négatif et sa racine est égale à $\sqrt{z^2-1}\,i$ et par définition

$$\arcsin(z)=-i\,\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{z^2-1}\,i\right),$$

et donc

$$\arcsin(z)=-i\,\mathrm{Ln}\left(\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)i\right). \tag{24}$$

On a

$$\forall z>1,\quad z+\sqrt{z^2-1}>0, \tag{25a}$$

$$\forall z<-1,\quad z+\sqrt{z^2-1}<0. \tag{25b}$$

En effet, si $z>1$, c'est immédiat. Sinon, c'est équivalent à

$$\sqrt{z^2-1}<-z,$$

et donc à

$$z^2-1<z^2,$$

ce qui est vrai. Compte tenu de (25), on a donc

$$\forall z>1,\quad \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)i=\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|e^{\frac{i\pi}{2}},$$

$$\forall z<-1,\quad \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)i=\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|e^{\frac{-i\pi}{2}},$$

Dans le premier cas, d'après (24), on a donc, d'après la définition du logarithme

$$\arcsin(z)=-i\left(\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+\frac{i\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|.$$

Dans le second cas, on a

$$\arcsin(z)=-i\left(\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|-\frac{i\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|.$$

Bref, on a donc, pour tout z réel dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

$$\forall z>1,\quad \arcsin(z)=\frac{\pi}{2}-i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|, \tag{26a}$$

$$\forall z<-1,\quad \arcsin(z)=-\frac{\pi}{2}-i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right| \tag{26b}$$

ce qui peut se condenser en

$$\forall z\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\quad \arcsin(z)=\operatorname{signe}(z)\frac{\pi}{2}-i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|. \tag{27}$$

— Dans le cas

$$|z|<1, \tag{28}$$

la nombre $\sqrt{1-z^2}$ est un réel positif et en posant

$$\eta=iz+\sqrt{1-z^2},$$

on a alors

$$|\eta|=\sqrt{z^2+1-z^2}=1.$$

De plus, l'argument de η est dans $]-\pi/2,\pi/2[$. On a donc

$$\eta=e^{i\theta}$$

où

$$\theta=\arcsin\left(\frac{z}{|\eta|}\right)=\arcsin(z),$$

où ici arcsin est la fonction réelle (de $[-1,1]$ dans $[\pi/2,\pi/2]$). D'après (11), on a donc

$$\arcsin(z)=-i\,(i\theta)=\arcsin(z)$$

On a donc

$$\text{la fonction arcsin définie sur } \mathbb{C} \text{ coïncide avec l'arcsin réel habituel sur }]-1,1[. \tag{29}$$

— Enfin, dans le cas

$$|z|=1, \tag{30}$$

on a $z=\pm 1$ et d'après (11),

$$\arcsin(z)=-i\operatorname{Ln}(\pm i)=-i\left(\pm\frac{i\pi}{2}\right)=\pm\frac{\pi}{2}=\arcsin(z),$$

où ici arcsin est la fonction réelle (de $[-1,1]$ dans $[\pi/2,\pi/2]$). On peut donc prolonger (29), par

$$\text{la fonction arcsin définie sur } \mathbb{C} \text{ coïncide avec l'arcsin réel habituel sur } [-1,1]. \tag{31}$$

Dans ce cas, on remarque que (27), peut se prolonger en

$$\forall z\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[,\quad \arcsin(z)=\operatorname{signe}(z)\frac{\pi}{2}-i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|. \tag{32}$$

(b) On retrouve l'arcsin réel (voir (31)).

(6) (a) On raisonne comme dans les questions 1 et 2a. La fonction cosinus complexe étend la fonction réelle à $\mathbb{C}$ tout entier et est donnée par la proposition 2.24 page 20 du cours et est rappelée ici :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Pour $z\in\mathbb{C}$ donné, on cherche donc un complexe ξ vérifiant

$$\cos\xi=z.$$

On procèderait comme précédemment.

(b) On admet que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\right),\quad (\arccos(z))'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{33}$$

Si on compare à (21), on a donc

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\right),\quad (\arcsin(z))'+(\arccos(z))'=0,$$

et il existe donc C telle que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\right),\quad \arcsin(z)+\arccos(z)=C.$$

Pour $z=0$, on a donc

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\right),\quad \arcsin(z)+\arccos(z)=\frac{\pi}{2}. \tag{34}$$

Les fonctions arcos et arcsin sont continues au voisinage de $(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$ par dessus et il vient donc en faisant tendre z vers un point de $(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \arcsin(z)+\arccos(z)=\frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Remarque 3. L'équation (35) est aussi valable naturellement pour les fonctions réelles (sur $[-1,1]$) et la preuve se fait de la même façon, dans $\mathbb{R}$!

Remarque 4. L'équation (35) nous fournit l'expression suivante

$$\arccos(z)=\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right). \tag{36}$$

Correction de l'exercice 3.

Le calcul présenté est très proche du calcul de l'intégrale de l'exercide de TD 5.2.

Remarque 5. Calculons tout d'abord l'intégrale

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx.$$

Considérons f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z)=\frac{1}{z^4+z^2+1}. \tag{37}$$

Les pôles de f sont donnés par

$$z^4+z^2+1=0,$$

soit, en posant $U=z^2$,

$$U^2+U+1=0,$$

de solution $U=j=e^{2i\pi/3}$ ou $U=\overline{j}=e^{-2i\pi/3}$. On obtient donc

$$z=\pm e^{\pm i\pi/3}.$$

On peut aussi remarquer que les pôles de f sont les racines carrées de j et j^2, soit $\pm j^2$ et $\pm j$ (puisque $j^4=j$). Seuls j et $-j^2$ ont une partie imaginaire positive.

$$\text{Les pôles de } f \text{ à partie imaginaire positive sont } j \text{ et } -j^2. \tag{38}$$

On peut appliquer la proposition 5.7 page 55 du cours, on a directement

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=2i\pi\sum_k \mathrm{Rés}(f,\alpha_k)=2i\pi\left(\mathrm{Rés}(f,j)+\mathrm{Rés}(f,-j^2)\right).$$

et donc

$$I=2i\pi\left(\mathrm{Rés}(f,j)+\mathrm{Rés}(f,-j^2)\right).$$

Ces pôles sont d'ordre 1 et d'après le lemme 3.37 page 43 du cours, on a, pour $\alpha \in \{j, -j^2\}$,

$$\text{Rés}(f, \alpha) = \frac{1}{4z^3 + 2z}.$$

En particulier, pour $\alpha = j$, on a

$$\text{Rés}(f, j) = \frac{1}{4j^3 + 2j} = \frac{1}{4 + 2j} = \frac{1}{2(2 + j)},$$

et pour $\alpha = -j^2$,

$$\text{Rés}(f, -j^2) = \frac{1}{-4z^6 - 2j^2} = -\frac{1}{2(2z^6 + j^2)} = -\frac{1}{2(2 + j^2)}.$$

On a donc

$$I = i\pi \left(\frac{1}{2 + j} - \frac{1}{2 + j^2} \right).$$

Or, on a

$$1 + j + j^2 = 0,$$

et donc successivement

$$\begin{aligned}
I &= i\pi \left(\frac{1}{2 + j} - \frac{1}{2 - 1 - j} \right), \\
&= i\pi \left(\frac{1}{2 + j} - \frac{1}{1 - j} \right), \\
&= \frac{i\pi}{(2 + j)(1 - j)} \left(1 - j - 2 - j \right), \\
&= -\frac{i\pi(1 + 2j)}{2 - 2j + j - j^2}, \\
&= -\frac{i\pi(1 + 2j)}{2 - j - j^2}, \\
&= -\frac{i\pi(1 + 2j)}{2 - j + 1 + j}, \\
&= -\frac{i\pi(1 + 2j)}{3},
\end{aligned}$$

et puisque

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

on a

$$I = -\frac{i\pi \left(1 - 1 + i\sqrt{3} \right)}{3} = -\frac{i\pi \left(i\sqrt{3} \right)}{3},$$

et donc finalement

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}. \tag{39}$$

Donnons maintenant le corrigé à proprement dit.

(1) On considère la fonction $\mathcal{R}$ donnée par

$$\mathcal{R}(z) = \frac{e^{2iz}}{z^4 + z^2 + 1}. \tag{40}$$

Les pôles de $\mathcal{R}$ sont donnés par

$$z^4 + z^2 + 1 = 0,$$

soit, en posant $U = z^2$,

$$U^2 + U + 1 = 0,$$

de solution $U = j = e^{2i\pi/3}$ ou $U = \overline{j} = e^{-2i\pi/3}$. On obtient donc

$$z = \pm e^{\pm i\pi/3}.$$

On peut aussi remarquer que les pôles de $\mathcal{R}$ sont les racines carrées de j et j^2, soit $\pm j^2$ et $\pm j$ (puisque $j^4 = j$). Seuls j et $-j^2$ ont une partie imaginaire positive.

$$\text{Les pôles de } \mathcal{R} \text{ à partie imaginaire positive sont } j \text{ et } -j^2. \tag{41}$$

Comme dans le corrigé de l'exercice de TD 5.2 page 28, on peut montrer que

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} |z\mathcal{R}(z)| = 0.$$

On peut donc appliquer la proposition 5.9 page 56 du cours.

Les pôles de $\mathcal{R}$ sont d'ordre 1 et d'après le lemme 3.37 page 43 du cours, on a, pour $\alpha \in \{j, -j^2\}$,

$$\text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha) = \frac{e^{2iz}}{4z^3 + 2z}.$$

En particulier, pour $\alpha = j$, on a

$$\text{Rés}(\mathcal{R}, j) = \frac{e^{2ij}}{4j^3 + 2j} = \frac{e^{2ij}}{4 + 2j} = \frac{e^{2ij}}{2(2 + j)},$$

et pour $\alpha = -j^2$,

$$\text{Rés}(\mathcal{R}, -j^2) = \frac{e^{-2ij^2}}{-4z^6 - 2j^2} = -\frac{e^{-2ij^2}}{2(2z^6 + j^2)} = -\frac{e^{-2ij^2}}{2(2 + j^2)}.$$

On a donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{R}(x)dx = 2i\pi \left(\frac{e^{2ij}}{2(2+j)} - \frac{e^{-2ij^2}}{2(2+j^2)}\right),$$

et donc par imparité

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^4 + x^2 + 1} dx = i\pi \left(\frac{e^{2ij}}{2+j} - \frac{e^{-2ij^2}}{2+j^2}\right),$$

Or

$$e^{2ij} = \exp\left(2i\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right) = e^{-\sqrt{3}-i}$$

et de même

$$e^{-2ij^2} = e^{-\sqrt{3}+i}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
K &= i\pi \left(\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{2+j} - \frac{e^{-\sqrt{3}+i}}{2+j^2}\right), \\
&= e^{-\sqrt{3}} i\pi \left(\frac{e^{-i}}{2+j} - \frac{e^{+i}}{2+j^2}\right), \\
&= e^{-\sqrt{3}} i\pi \left(\frac{e^{-i}}{2+j} - \frac{e^{+i}}{2+j^2}\right), \\
&= e^{-\sqrt{3}} i\pi \left(\frac{\cos(1) - i\sin(1)}{2+j} - \frac{\cos(1) + i\sin(1)}{2+j^2}\right),
\end{aligned}$$

On peut finalement montrer en faisant un calcul identique à celui de de l'exercide de TD 5.2, que

$$K = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\sin 1 + \cos 1\right). \tag{42}$$

(2) (a) On utilise la régle de linéarisation

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$

et on a donc (on vérifie au préalable que les toutes intégrales existent)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^4+x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^4+x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^4+x^2+1}\, dx\right)$$

et donc, en posant

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^4+x^2+1}\, dx, \tag{43}$$

on a

$$J = \frac{1}{2}(I-K), \tag{44}$$

où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\, dx. \tag{45}$$

(b) On donne (voir remarque 5)

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}. \tag{46}$$

On a donc, d'après (42) et (44)

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\sin 1 + \cos 1\right)\right),$$

et donc

$$J = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\left(1 - e^{-\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\sin 1 + \cos 1\right)\right), \tag{47}$$

Correction de l'exercice 4.

La distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est définie dans l'exemple 6.29 page 96 du cours, par l'équation (6.57), rappelée ici :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \tag{48}$$

où on note abusivement

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

On multiplie cette distribution par la fonction $\mathcal{C}^\infty$, xg (qui note abusivement $x \mapsto xg(x)$). On a donc d'après la définition 6.43 page 101 du cours,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \alpha = \left\langle (xg)\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), (xg)\phi \right\rangle,$$

ce qui vaut, d'après (48),

$$\alpha = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[} \frac{xg(x)\phi(x)}{x} dx.$$

et donc

$$\alpha = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[} g(x)\phi(x) dx.$$

Or, $\int_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[} g(x)\phi(x)dx$ tend clairement, quand ε tend zéro (puisque $g(x)\phi(x)$ est continue et à support compact, donc intégrable sur $\mathbb{R}$) vers

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)dx = \langle g, \phi\rangle,$$

et on a donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle (xg)\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \langle g, \phi\rangle, \tag{49}$$

soit encore

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (xg)\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = g. \tag{50}$$

Correction de l'exercice 5.

On renvoie à la correction de l'exercice de TD 6.12 page 65, que l'on rappelle ici :

(1) Pour tout n, on pose

$$I_n = n\int_0^1 t^n f(t)dt.$$

Dans cette intégrale, on fait le changement de variable $u = n(1-t)$, on obtient $t = 1-u/n$ et $du = -ndt$ et donc

$$I_n = -\int_n^0 \left(1-\frac{u}{n}\right)^n f\left(1-\frac{u}{n}\right)du,$$

soit encore

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n f\left(1-\frac{u}{n}\right)du. \tag{51}$$

On a

$$\forall u \in [0,n], \quad 1-\frac{u}{n} \geq 0, \tag{52}$$

et on a aussi

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n = e^{-u}. \tag{53}$$

En effet, pour $n \geq 0$ et pour $n \geq u$, on écrit

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)}{-\frac{u}{n}}(-u)\right). \tag{54}$$

Par ailleurs, on a aussi, puisque f est continue en 1 :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{u}{n}\right) = f(1). \tag{55}$$

On définit la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(u) = \begin{cases} \left(1-\frac{u}{n}\right)^n f\left(1-\frac{u}{n}\right), & \text{si } u \in [0,n], \\ 0, & \text{si } u \in]n,+\infty[, \end{cases} \tag{56}$$

De sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{+\infty} g_n(u)du. \tag{57}$$

Montrons que

$$\forall u \in [0,n], \quad 0 \leq \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}. \tag{58}$$

Pour cela, on utilise le fait que (par convexité ou Taylor-Lagrange)

$$\forall h > -1, \quad \ln(1+h) \leq h. \tag{59}$$

Pour $u \in [0,n[$, on pose $h = -u/n$ qui est bien strictement supérieur à -1, on obient donc

$$\ln\left(1-\frac{u}{n}\right) \leq -\frac{u}{n},$$

ce qui implique

$$-\ln\left(1-\frac{u}{n}\right) \geq \frac{u}{n},$$

et donc

$$-n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right) \geq u,$$

et

$$n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right) \leq -u,$$

ce qui permet de conclure en prenant l'exponentielle. Si $n = u$, (58) est vrai. De (58), on déduit donc

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad |g_n(u)| \leq Me^{-u}, \tag{60}$$

où M le maximum de $|f|$ sur $[0,1]$, qui existe car f est continue. La fonction $u \mapsto Me^{-u}$ est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. De (53) et (55), on déduit donc

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to\infty} g_n(u) = g(u), \tag{61}$$

où $g(u) = f(1)e^{-u}$. Ainsi, d'après (60) et (61), les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont vérifiées et on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g(u)du = \int_0^{+\infty} f(1)e^{-u}du = f(1), \tag{62}$$

et on retrouve donc (67).

(2) La fonction g_n est dans $L^1(\mathbb{R})$. Si on applique le résultat de la question 1 à toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\phi(t) = \phi(1),$$

soit encore, compte tenu de la définition de g_n :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\phi(t) = \delta_1(\phi),$$

ce qui traduit donc que, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \delta_1.$$

(3) Oui, on peut mais c'est plus technique :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [1-\eta, 1], \quad |f(x) - f(1)| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{63}$$

Pour tout n, on a par ailleurs,

$$\left|n\int_0^1 t^n f(t)dt - f(1)\right| \leq \left|n\int_0^{1-\eta} t^n f(t)dt\right| + \left|n\int_{1-\eta}^1 t^n f(t)dt - f(1)\right|,$$

et donc en posant

$$\|f\|_\infty = \max_{y\in[0,1]} |f(y)|,$$

on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|n\int_0^1 t^n f(t)dt - f(1)\right| \leq n\,\|f\|_\infty \int_0^{1-\eta} t^n dt + \left|n\int_{1-\eta}^1 t^n f(t)dt - f(1)\right|. \tag{64}$$

Le premier terme vaut

$$\|f\|_\infty \frac{n}{n+1}(1-\eta)^{n+1},$$

et donc, d'après (64),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|n\int_0^1 t^n f(t)dt - f(1)\right| \leq \|f\|_\infty \frac{n}{n+1}(1-\eta)^{n+1} + \left|n\int_{1-\eta}^1 t^n f(t)dt - f(1)\right|. \tag{65}$$

Majorons maintenant le second terme : d'après (63), on a

$$\forall x \in [1-\eta, 1], \quad f(1) - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(t) \leq f(1) + \frac{\varepsilon}{4},$$

et donc

$$nt^n\left(f(1) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq nt^n f(t) \leq nt^n\left(f(1) + \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

et en intégrant en $t \in [1-\eta, t]$, il vient

$$n\left(f(1) - \frac{\varepsilon}{4}\right)\int_{1-\eta}^1 t^n dt \leq n\int_{1-\eta}^1 t^n f(t)dt \leq n\left(f(1) + \frac{\varepsilon}{4}\right)\int_{1-\eta}^1 t^n dt,$$

ce qui implique après calcul de l'intégrale et en soustrayant $f(1)$

$$n\left(f(1) - \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) - f(1) \leq n\int_{1-\eta}^1 t^n f(t)dt - f(1) \leq n\left(f(1) + \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) - f(1),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} f(1)\left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} - 1\right) - \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) &\leq n\int_{1-\eta}^1 t^n f(t)dt - f(1) \\ &\leq f(1)\left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} - 1\right) + \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) \end{aligned} \tag{66}$$

À ε et $\eta >$ fixés, puisque $1 - \eta < 1$, la limite de $(1-\eta)^n$ est nulle quand n tend vers l'infini. Ainsi, il existe N_1, N_2 et N_3 tel que

$$\begin{aligned} &\forall n \geq N_1, \quad \|f\|_\infty \frac{n}{n+1}(1-\eta)^{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\forall n \geq N_2, \quad \left|f(1)\left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} - 1\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\forall n \geq N_3, \quad \frac{\varepsilon}{4}\left|\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (65), et (66), pour $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$, on a

$$\left|n\int_0^1 t^n f(t)dt - f(1)\right| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n f(t)dt = f(1). \tag{67}$$

Références

[AF03] M. J. Ablowitz et A. S. Fokas. *Complex variables : introduction and applications.* Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.