

Corrigé de l'examen du 3 décembre 2013

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

Correction de l'exercice 1. Exercice issu de [Boc96, p. 119, exemple 2].

On est dans le cas typique des intégrales du deuxième type (voir section 5.1.1 page 29 et l'exemple 5.2 du cours).

On intègre la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad (1)$$

sur le chemin γ_R indiqué dans l'énoncé. Il est défini par la réunion du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle de centre 0, de rayon R et inclus dans \mathbb{R}_+ , parcouru une seule fois dans le sens trigonométrique.

Le dénominateur de f est nul ssi $z^2 + 1 = 0$. Ainsi, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Les points $\pm i$ sont des pôles simples de f . Le seul pôle de f à l'intérieur du chemin est égal à i (pour une valeur de R assez grande). Le résidu de f en ce point vaut, d'après le lemme 3.29 page 26 du cours

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{1}{[1+z^2]'_{z=i}} = \frac{1}{[2z]'_{z=i}},$$

soit donc

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{1}{2i}. \quad (2)$$

Par ailleurs, le théorème des résidus 3.27 page 25 du cours nous donne

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur de γ_R et donc d'après (2)

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \pi. \quad (3)$$

Enfin, on a en explicitant l'intégrale de f sur γ_R

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2 \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} f(z) dz, \quad (4)$$

où C_R est le demi-cercle de centre 0, de rayon R et inclus dans \mathbb{R}_+ , parcouru une seule fois dans le sens trigonométrique. Puisque $|zf(z)|$ tend vers zéro quand $|z|$ tend vers l'infini, d'après le lemme de Jordan 3.5 page 20 du cours, $\int_{C_R} f(z) dz$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini. Ainsi, (3) et (4) impliquent

$$I = \frac{\pi}{2},$$

ce que l'on pouvait trouver très rapidement en utilisant la primitive de $1/(1+x^2)$!

Correction de l'exercice 2. Exercice issu de [Tau06, p. 193].

Attention, dans ce livre et dans ce corrigé, le calcul est présenté pour n quelconque avec

$$-1 < \alpha < n-1. \quad (5)$$

Le lecteur, supposé assidu, mènera sans difficulté le calcul pour $n = 2$ à partir de la correction. Pour $n = 2$, on a donc bien l'hypothèse de l'énoncé

$$-1 < \alpha < 1. \quad (6)$$

(1) La fonction donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) = \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt, \quad (7)$$

est positive et continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, on a au voisinage de 0,

$$f(t) \sim t^\alpha,$$

qui est intégrable puisque $-1 < \alpha$. Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(t) \sim \frac{t^\alpha}{t^n} = t^{\alpha-n},$$

qui est intégrable puisque $\alpha - n + 1 < 0$. Ainsi, I définie par

$$I = \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt, \quad (8)$$

existe.

(2)

On considère $\gamma_{r,R}$, le chemin défini par la réunion de deux segments et de deux demi-cercle, comme défini sur la figure 1 page ci-contre. Sur la figure 1(a), ce chemin est représenté pour n quelconque, vérifiant (5). Sur la figure 1(b), ce chemin est représenté pour $n = 2$. Sur la figure 1, l'angle β est donné par

$$\beta = \frac{2\pi}{n}. \quad (9)$$

Attention, contrairement au cours, on choisira la coupure suivante de \mathbb{C} : $C = i\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C}, z = it \text{ où } t \leq 0\}$.

On intègre la fonction donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-, \quad f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^n} = \frac{e^{\alpha \operatorname{Ln}(z)}}{1+z^n}. \quad (10)$$

sur le chemin $\gamma_{r,R}$.

(a) On rappelle que par définition (voir section 2.5.2.2 page 16), on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-, \quad \operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \arg(z), \quad (11)$$

où \arg est la détermination principale de l'argument. Ici, la coupure est choisie égale à $C = i\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C}, z = it \text{ où } t \leq 0\}$ et donc la détermination principale de l'argument appartenant à $] -\pi/2, 3\pi/2[$. Ainsi, $z \mapsto e^{\alpha \operatorname{Ln}(z)}$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$.

– Comme dans l'exercice 1, pour $n = 2$, les points $\pm i$ sont des pôles simples de f . Ainsi, f est holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_- \cup \{i\})$ et en particulier le chemin $\gamma_{r,R}$ de la figure 1(b) ne passe par $i\mathbb{R}_- \cup \{i\}$. On vérifie donc que le seul pôle de f à l'intérieur de $\gamma_{r,R}$ (pour r assez petit et R assez grand) vérifiant donc (14), est donné par

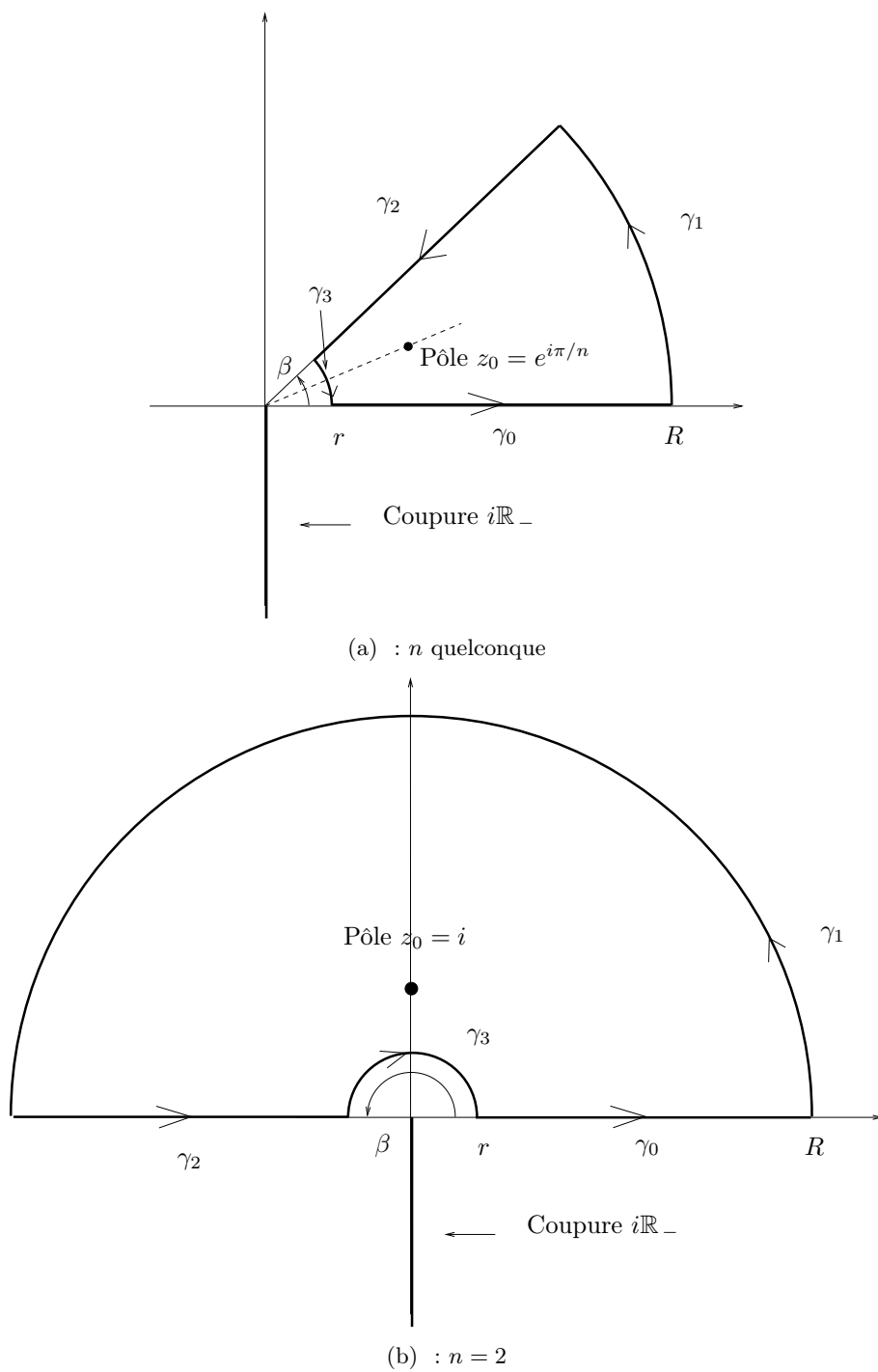
$$z_0 = i. \quad (12)$$

– Dans le cas général, les pôles de f sont les racines de

$$1 + z^n = 0, \quad (13)$$

que l'on résoud en utilisant les racines n -ième de l'unité. On a, en écrivant $z = \rho e^{i\theta}$,

$$\rho^n e^{in\theta} = -1 = e^{i\pi},$$

FIGURE 1. Le chemin $\gamma_{r,R}$ considéré.

et donc

$$\theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (14)$$

Ces pôles sont donc tous simples. On vérifie que le seul pôle de f à l'intérieur de $\gamma_{r,R}$ (pour r assez petit et R assez grand) vérifiant donc (14), est donné par

$$z_0 = e^{i\pi/n}. \quad (15)$$

Voir la figure 1(a). f est holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_- \cap \{z_0\})$ et en particulier le chemin $\gamma_{r,R}$ de la figure 1(a) ne passe par $i\mathbb{R}_- \cap \{z_0\}$.

Dans les deux cas, le choix de la coupure inhabituelle $C = i\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C}, z = it \text{ où } t \leq 0\}$ est justifié : f est holomorphe sur Ω , dans lequel est inclus le chemin $\gamma_{r,R}$. Cela n'aurait pas été le cas, pour $n = 2$, si la coupure habituelle avait été \mathbb{R}_* .

Le domaine Ω n'est pas convexe et en théorie, on ne peut appliquer le théorème des résidus 3.27 page 25 du cours. En fait, celui-ci s'étant pour des ouverts étoilé du type $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}_- \cap \{z_0\}\}$ (voir [Tau06]). On a donc

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)dz = 2i\pi \text{ Rés}(f, z_0). \quad (16)$$

On utilise de nouveau

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{z_0^\alpha}{[1+z^n]'_{z=z_0}} = \frac{z_0^\alpha}{[nz^{n-1}]'_{z=z_0}},$$

soit donc

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{z_0^\alpha}{nz_0^{n-1}}. \quad (17)$$

Remarque 1. Nous avons la propriété suivante qui généralise le cas réel, laissé au lecteur :

$$\forall A, B, z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \implies z^A z^B = z^{A+B}. \quad (18)$$

De même, on a

$$\forall A \in \mathbb{C}, \quad \forall \theta \in]-\pi/2, 3\pi/2[, \quad (e^{i\theta})^A = e^{iA\theta}. \quad (19)$$

Démonstration. On a effet, par définition,

$$(e^{i\theta})^A = e^{A \text{Ln}(e^{i\theta})},$$

et donc d'après l'équation (2.36) du cours, (puisque $\theta \in]-\pi/2, 3\pi/2[$ pour la coupure ici considérée).

$$(e^{i\theta})^A = e^{Ai\theta}$$

□

En utilisant l'équation (2.35) du cours, on montre que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (e^{i\theta})^m = e^{im\theta}. \quad (20)$$

Grâce aux résultats (non évidents *a priori*) de la remarque 1, on donc d'après (17)

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{z_0^\alpha}{nz_0^{n-1}} = \frac{z_0^{\alpha-n+1}}{n} = \frac{(e^{i\pi/n})^{\alpha-n+1}}{n} = \frac{e^{\frac{i\pi(\alpha-n+1)}{n}}}{n} = \frac{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n} - i\pi}}{n} = \frac{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}} e^{-i\pi}}{n} = -\frac{1}{n} e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}},$$

et donc d'après (16)

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)dz = -\frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}. \quad (21)$$

- (b) Si z décrit l'un des arcs de cercles γ_1 ou γ_3 , on a $z = \rho e^{i\theta}$ où θ décrit l'intervalle $[0, \beta]$ ou $[\beta, 0]$ et $\rho \in \{r, R\}$. Ainsi, pour $k \in \{1, 3\}$, on a $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ et

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq \int_0^\beta \left| \frac{z^\alpha}{1+z^n} \right| \rho d\theta.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad |z^A| = |z|^A. \quad (22)$$

On a donc

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq \int_0^\beta \frac{\rho^{\alpha+1}}{|1+z^n|} d\theta. \quad (23)$$

Par ailleurs, en utilisant

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||,$$

on déduit de (22)-(23)

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq \int_0^\beta \frac{\rho^{\alpha+1}}{||z^n| - 1|} d\theta = \int_0^\beta \frac{\rho^{\alpha+1}}{|\rho^n - 1|} d\theta = \beta \frac{\rho^{\alpha+1}}{|\rho^n - 1|}$$

Si $\rho = r$ tend vers zéro, cette quantité est équivalente à

$$\beta \rho^{\alpha+1}$$

qui tend vers zéro quand r tend vers zéro selon (5). Au contraire, si $\rho = R$ tend vers l'infini, cette quantité est équivalente à

$$\beta \frac{\rho^{\alpha+1}}{\rho^n} = \rho^{\alpha+1-n},$$

qui tend vers zéro quand R tend vers l'infini selon (5).

Ainsi, quand R tend vers l'infini et r tend vers zéro, les intégrales respectives de f sur les demi-cercle de rayons R et r tendent vers zéro :

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0 \quad (24)$$

- (c) Explicitons maintenant la valeur de l'intégrale de f sur γ_0 , sur lequel $z = t$ où t décrit $[r, R]$. Ainsi

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_r^R \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt$$

et puisque I existe, on a

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\gamma_0} f(z) dz = I = \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt \quad (25)$$

Explicitons maintenant la valeur de l'intégrale de f sur γ_2 , sur lequel $z = \rho e^{i\beta}$ où ρ décrit $[R, r]$.

On a donc $dz = e^{i\beta} d\rho$ et, compte tenu de (9),

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_R^r \frac{(\rho e^{i\beta})^\alpha}{1 + (\rho e^{i\beta})^n} e^{i\beta} d\rho = - \int_r^R \frac{\rho^\alpha e^{i\beta\alpha}}{1 + \rho^n e^{i\beta n}} e^{2i\pi/n} d\rho \\ &= - \int_r^R \frac{\rho^\alpha e^{i\beta\alpha}}{1 + \rho^n e^{2i\pi n/n}} e^{2i\pi/n} d\rho = -e^{2i\pi\alpha/n} e^{2i\pi/n} \int_r^R \frac{\rho^\alpha}{1 + \rho^n} d\rho = -e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)} \int_r^R \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt, \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\gamma_2} f(z) dz = -e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)} I. \quad (26)$$

Bref, grâce à (21), (24), (25) et (26), il vient

$$I \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)} \right) = -\frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}. \quad (27)$$

Puisque $(\alpha + 1)/n < 1$, on a naturellement $e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)} \neq 1$. On a alors classiquement

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)}}, \\ &= -\frac{\frac{2i\pi}{n}}{e^{-\frac{i\pi}{n}(\alpha+1)} - e^{\frac{i\pi}{n}(\alpha+1)}}, \\ &= \frac{\frac{2i\pi}{n}}{e^{\frac{i\pi}{n}(\alpha+1)} - e^{-\frac{i\pi}{n}(\alpha+1)}}, \\ &= \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}(\alpha+1)\right)}, \end{aligned}$$

et donc

$$I = \frac{\pi}{n \sin(\pi(\alpha+1)/n)}, \quad (28)$$

et dans le cas de $n = 2$

$$I = \frac{\pi}{2 \sin(\pi(\alpha+1)/2)}, \quad (29)$$

Correction de l'exercice 3.

- (1) La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable sur \mathbb{R}^* au sens des fonctions et sa dérivée est égale à la fonction signe, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{signe}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Ainsi, en vertu de la formule des sauts (6.52) du cours ou du lemme 6.25 page 53 du cours, on a

$$f' = \text{signe}, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (31)$$

- (2) On raisonne de même pour la fonction $f(x) = |\sin(x)|$: elle est dérivable sur \mathbb{R} , sauf là où le sinus est nul, c'est-à-dire aux points du type $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Si $\sin(x) > 0$, alors

$$f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x) = \text{signe}(\sin(x)) \cos(x),$$

et si $\sin(x) < 0$, alors

$$f'(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x) = \text{signe}(\sin(x)) \cos(x).$$

Bref,

$$f' = \text{signe}(f) f', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (32)$$

On obtient le même résultat pour $f(x) = |\cos(x)|$.

- (3) *Question facultative*

- (a) Si g et g' sont localement intégrables, alors, on a de même,

$$|g|' = \text{signe}(g) g', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (33)$$

On peut le montrer en raisonnant de la façon suivante. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par définition,

$$\langle |g|', \phi \rangle = -\langle |g|, \phi' \rangle = -\int |g(x)| \phi'(x) dx.$$

Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} I_+ &= \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) > 0\}, \\ I_- &= \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) < 0\}, \\ I_0 &= \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 0\}, \end{aligned}$$

g et g' sont localement intégrables, g est continue et I_- et I_+ sont des ouverts de \mathbb{R} . En effet, par exemple,

$$I_+ = g^{-1}(\mathbb{R}_+^*),$$

et \mathbb{R}_+^* est un ouvert de \mathbb{R} . On peut donc considérer les composantes connexes de I_+ : il existe des intervalles $]a_n, b_n[$, n décrivant un ensemble J au plus dénombrable tel que

$$I_+ = \bigcup_{n \in J}]a_n, b_n[.$$

De même,

$$I_- = \bigcup_{n \in J}]c_n, d_n[.$$

D'après les propriétés de l'intégration (de Lebesgue), on a

$$\begin{aligned} -\langle |g'|, \phi \rangle &= \int |g(x)|\phi'(x)dx, \\ &= \int_{I_+} |g(x)|\phi'(x)dx + \int_{I_-} |g(x)|\phi'(x)dx + \int_{I_0} |g(x)|\phi'(x)dx, \end{aligned}$$

ce qui vaut, par définition,

$$\begin{aligned} &= \int_{I_+} g(x)\phi'(x)dx - \int_{I_-} g(x)\phi'(x)dx + \int_{I_0} 0 \times \phi'(x)dx, \\ &= \sum_{n \in J} \int_{a_n}^{b_n} g(x)\phi'(x)dx - \sum_{n \in J} \int_{c_n}^{d_n} g(x)\phi'(x)dx. \end{aligned}$$

Au bord de chaque intervalle ouvert $]a_n, b_n[$ et $]c_n, d_n[$, on sait que g est nulle. Ainsi une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{b_n} g(x)\phi'(x)dx &= - \int_{a_n}^{b_n} g'(x)\phi(x)dx, \\ \int_{c_n}^{d_n} g(x)\phi'(x)dx &= - \int_{c_n}^{d_n} g'(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \langle |g|', \phi \rangle &= \sum_{n \in J} \int_{a_n}^{b_n} g'(x) \phi(x) dx - \sum_{n \in J} \int_{c_n}^{d_n} g'(x) \phi(x) dx, \\
 &= \int_{I_+} g'(x) \phi(x) dx - \int_{I_-} g'(x) \phi(x) dx, \\
 &= \int_{I_+} \text{signe}(g(x)) g'(x) \phi(x) dx + \int_{I_-} \text{signe}(g(x)) g'(x) \phi(x) dx + \int_{I_0} 0 \times \phi(x) dx, \\
 &= \int_{I_+} \text{signe}(g(x)) g'(x) \phi(x) dx + \int_{I_-} \text{signe}(g(x)) g'(x) \phi(x) dx + \int_{I_0} \text{signe}(g(x)) g'(x) \phi(x) dx, \\
 &= \int \text{signe}(g(x)) g'(x) \phi(x) dx, \\
 &= \langle \text{signe}(g) g', \phi \rangle
 \end{aligned}$$

et donc

$$|g|' = \text{signe}(g) g', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (34)$$

(b) Si f et g sont deux fonctions dérivables, on a, au sens des fonctions,

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g'. \quad (35)$$

Si applique cela au des distributions avec $f = |\cdot|$, de dérivée signe, on aurait

$$(f \circ g)' = (|g|)' = (\text{signe} \circ g) g',$$

ce qui nous permet de retrouver (33). Cela n'est que formel car on ne sait pas définir, de façon générale $f \circ g$ si f et g sont deux distributions.

Correction de l'exercice 4. Soit a un nombre réel quelconque.

(1) D'après le cas 2 de la section récapitulative 7.5.3 du cours, l'équation différentielle suivante, au sens des distributions,

$$Y_0' + aY_0 = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (36)$$

admet une solution unique (qui est une distribution-fonction) donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (37)$$

(2) Soit $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. D'après le cas 3 de la section récapitulative 7.5.3 du cours, l'équation différentielle suivante, au sens des distributions,

$$Y' + aY = F, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (38)$$

où F est donnée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ admet une solution unique (qui est une distribution) donnée par

$$T = F * Y_0, \quad (39)$$

où Y_0 est définie par (37).

(3) (a) Ainsi, la solution de (38) avec $F = H$, où H est la fonction de Heaviside, est donnée par

$$T = H * Y_0. \quad (40)$$

Puisque Y_0 et H sont deux fonctions nulle sur \mathbb{R}_-^* , on peut utiliser le lemme 7.5 page 58 du cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (H * Y_0)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \int_0^x H(x-y) Y_0(y) dy, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (41)$$

Pour $x \geq 0$, on a donc, grâce à (37),

$$(H * Y_0)(x) = \int_0^x H(x-y)Y_0(y)dy = \int_0^x e^{-ay}dy$$

Après calcul, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \begin{cases} \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}), & \text{si } a \neq 0, \\ x, & \text{si } a = 0 \end{cases}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (42)$$

La distribution T est évidemment une fonction, qui est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(b) Si $F = \delta'$, la solution de (38) est donnée par

$$T = \delta'_0 * Y_0. \quad (43)$$

Or, d'après la proposition 7.15 page 62 du cours, on a

$$T = Y'_0. \quad (44)$$

Il suffit d'utiliser (36) (!) pour calculer cela :

$$Y'_0 = -aY_0 + \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

où la distribution-fonction Y_0 est donnée par (37). Bref, la solution est

$$T = -aY_0 + \delta. \quad (45)$$

On a vu dans le cours que δ n'est pas une fonction de L^2 . Puisque Y_0 est une fonction de L^2 , T n'est donc pas une distribution-fonction.

(c) *Question facultative*

De même, Si $F = \delta^{(n)}$, la solution de (38) est donnée par

$$T = \delta_0^{(n)} * Y_0. \quad (46)$$

Or, d'après la proposition 7.17 page 62 du cours, on a

$$T = Y_0^{(n)}. \quad (47)$$

Regardons ce qui se passe pour les petites valeurs de n . On a, pour $n = 0$,

$$Y_0^{(n)} = Y_0. \quad (48)$$

Pour $n = 1$, on a d'après (44)-(46),

$$Y_0^{(1)} = -aY_0 + \delta. \quad (49)$$

Pour $n = 2$, on dérive de nouveau, en utilisant (49) :

$$\begin{aligned} Y_0^{(2)} &= (Y_0^{(1)})', \\ &= (-aY_0 + \delta)', \\ &= -aY_0' + \delta', \\ &= -a(-aY_0 + \delta) + \delta', \\ &= -a\delta + \delta' + a^2Y_0, \end{aligned}$$

et donc

$$Y_0^{(2)} = a^2 Y_0 - a\delta + \delta' \quad (50)$$

Généralisons en procédant par récurrence sur n . Au vu des résultats (48), (49) et (50), on propose donc de montrer que pour tout $n \geq 0$, la solution de (38) avec $F = \delta^{(n)}$, est donnée par

$$Y_0^{(n)} = (-1)^n a^n Y_0 + (-1)^{n-1} a^{n-1} \delta + (-1)^{n-2} a^{n-2} \delta' + \dots + (-1)^0 a^0 \delta^{(n-1)}, \quad (51)$$

soit donc encore

$$Y_0^{(n)} = (-1)^n a^n Y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \delta^{(n-1-j)}, \quad (52)$$

propriété que le lecteur démontrera par récurrence sur n .

Correction de l'exercice 5. Ce problème est très proche du problème étudié dans la section 8.4.1 du cours ou dans l'exercice 6.3 de TD. Il suffit dans l'équation (8.17) du cours de ne pas prendre en compte le terme f , de poser $L = 1$ et $\lambda = 0$! On peut aussi reprendre la correction de l'exercice 6.3 de TD en changeant la condition aux limites en 1.

Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On considère le problème suivant : déterminer u de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant

$$-u'' = f, \quad (53a)$$

$$u(0) = 0, \quad (53b)$$

$$u'(1) = 0. \quad (53c)$$

(1) On raisonne comme dans la section 8.4.1 page 72 du cours.

– Posons $\Omega =]0, 1[$. On part de la formulation (53a) que l'on multiplie par une fonction v et que l'on intègre sur $[0, 1]$. On supposera pour cela que u est dans $H^2(\Omega)$ et f et v sont dans $L^2(\Omega)$. On obtient donc

$$-\int_0^1 u''(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx. \quad (54)$$

Si ϕ est dérivable, de dérivée dans L^2 , une intégration par partie donne

$$-\int_0^1 u''(x)\phi(x)dx = \int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx + u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0),$$

et puisque $u'(1) = 0$, on a donc

$$-\int_0^1 u''(x)\phi(x)dx = \int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx - u'(0)\phi(0).$$

Supposons que $\phi(0) = 0$. On a donc

$$\int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Pour que ces intégrales soient définies, il suffit que u et v soient dans $H^1(\Omega)$ et que f soit dans $L^2(\Omega)$. Bref, on se donne $f \in L^2(\Omega)$ et on définit l'ensemble de fonctions V par

$$V = \{v \in H^1(\Omega), \quad v(0) = 0\}. \quad (55)$$

Remarquons que V est inclus dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ (voir annexe E) et donc que $v(0)$ a bien un sens. On cherche donc $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = l(v), \quad (56)$$

où a est définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \quad (57)$$

et \mathcal{L} par

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{L}(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (58)$$

Ces définitions sont très proches des définitions (8.19), (8.20) et (8.21) du cours.

- Supposons maintenant que (56) ait lieu. On l'applique à $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$: pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a donc

$$\int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

et donc, en considérant $f, u' \in L^2(\Omega)$ comme des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a donc

$$\langle u', \phi' \rangle - \langle f, \phi \rangle = 0$$

soit encore, d'après la définition de la dérivée de la distribution u'

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -u'' - f, \phi \rangle,$$

ce qui signifie exactement que

$$-u'' = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

La condition aux limites (53b) est une conséquence de la définition de V . On admet que la condition aux limites (53c) se montrer par intégration par parties, grâce à (59).

- (2) Puisque f est dans L^2 , u est dans H^2 et donc (voir annexe E) u est de classe C^1 . On a donc

$$-u'' = f \text{ p.p. sur } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (59)$$

- (3) Bref, on a montré que si u est solution de (56) alors elle est dans $H^2 \cap C^1$, les conditions aux limites (53b) et (53c) et l'équation (53a) est vraie presque partout sur Ω .

Remarque 2. L'existence et l'unicité de la solution de la formulation faible du problème (6.10). sont assurées par le lemme F.1 du cours : Les hypothèses du lemme F.1 sont vérifiées :

- On munit V du produit scalaire (et non de son produit scalaire usuel défini par l'équation (8.21) du cours) donné par

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

C'est bien une application bilinéaire symétrique. De plus, $\langle u, u \rangle = 0$, entraîne $u' = 0$ et donc $u = 0$ car $u(0) = 0$. Ainsi V est un espace complet.

- a est coercive et bilinéaire, car c'est exactement le produit scalaire de V !
- On vérifie que \mathcal{L} est continue.

Références

- [Boc96] N. BOCCARA. *Fonctions analytiques*. Ellipse, 1996.
- [Tau06] P. TAUVEL. *Analyse complexe pour la licence 3. cours et exercices corrigés*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515.9 TAU, 4 ième étage). Dunod, 2006.