Mécanique 4A OMI3 Automne 2014

Corrigé de l'examen du 15 décembre 2014

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Correction de l'exercice 1.

Exercice issu de [Buc92, p. 117]

On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

(1) Pour tout complexe $z = \rho e^{i\theta}$, on a

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{\left|z e^{iz}\right|}{|1+z^2|}, \\ &= \frac{\rho e^{-\rho \sin\theta}}{|1+\rho^2 e^{2i\theta}|}, \end{aligned}$$

et on a bien

$$|f(z)| = \frac{\rho e^{-\rho \sin\theta}}{|1+\rho^2 e^{2i\theta}|}. \tag{1}$$

(2) (a) D'après (1), on a, pour $z = Re^{i\theta}$ où θ décrit $[0, \pi]$,

$$|f(z)| = \frac{Re^{-R\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|} \leq \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R^2-1}.$$

On a aussi $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ et donc $|\gamma'(t)|$ et il vient, d'après le lemme 3.8 du cours,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| &\leq \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} |f(\gamma(\theta))|\,|\gamma'(t)|\,d\theta, \\ &\leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R^2-1} R d\theta, \\ &\leq \frac{R^2}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta, \end{aligned}$$

soit donc

$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| \leq \frac{R^2}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta. \tag{2}$$

(b) On a

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta$$

Dans la seconde intégrale, on pose $\tau = \pi - \theta$ et donc

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta - \int_{\pi/2}^0 e^{-R\sin\theta} d\theta,$$

soit

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \tag{3}$$

(c) la fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave vexe sur $[0,\pi/2]$, dont on déduit que la courbe est au dessus de sa corde, d'équation $y = 2\phi/\pi$, soit

$$\forall \theta \in [0,\pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{4}$$

(d) On déduit donc finalement de (2), (3) et (4) que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| &\leq \frac{R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta,\\
&\leq \frac{2R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta,\\
&= -\frac{2\pi}{2R}\frac{R^2}{R^2-1}\left[e^{-\frac{2}{\pi}\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2},\\
&= \frac{\pi}{R}\frac{R^2}{R^2-1}\left(-e^{-1}+1\right) \leq \frac{\pi R}{R^2-1}
\end{aligned}$$

dont on déduit donc, quand R tend vers l'infini, que

$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}, \tag{5a}$$

et que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz = 0. \tag{5b}$$

(3) Le seul pôle de f à l'intérieur du chemin γ_R est i (d'ordre 1) et en reprenant l'équation (5.16) de la preuve de la proposition 5.9 du cours, on a

$$\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2i\pi\,\text{Rés}(f,i).$$

soit donc par parité et imparité

$$\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz + 2i\int_0^R \frac{x\sin x}{1+x^2}dx = 2i\pi\,\text{Rés}(f,i).$$

Si on fait tendre R vers l'infini, on a obtient donc l'existence de I qui vérifie

$$I = \pi\,\text{Rés}(f,i). \tag{6}$$

(4) On détermine $\text{Rés}(f,i)$ en utilisant la formule (3.36) du cours

$$\begin{aligned}
\text{Rés}(f,i) &= ie^{-1}\left(\frac{1}{z+i}\right)'_{z=i},\\
&= \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

l'on obtient donc grâce à (6)

$$I = \frac{\pi}{2e} \tag{7}$$

(5) (a) En choisissant $z = R$, c'est-à-dire $\theta = 0$ et $\rho = R$, on déduit de (1)

$$|zf(z)| = \frac{R^2}{|1+R^2|} = \frac{R^2}{1+R^2},$$

quantité qui tend vers 1 quand R tend vers l'infini. Ainsi, $|zf(z)|$ ne peut tendre vers zéro quand $|z|$ tend vers l'infini.

(b) Pour appliquer la proposition 5.9 du cours à la fonction f, il faudrait que

$$\lim_{|z|\to+\infty} |z\{(z)| = 0,$$

ce qui est n'a pas lieu, selon la question précédente.

Correction de l'exercice 2.

(1) La décomposition en éléments simples de la fonction $x \mapsto 1/(z^2+1)$ a été traitée en cours (voir point 1a page 28 du cours) : pour tout z complexe, différent de $\pm i$:

$$\frac{1}{z^2+1}\frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right). \tag{8}$$

(2) Si z décrit l'intervalle $[\varepsilon, R]$, les complexes $z+i$ et $z-i$ ne sont pas de éléments de $\mathbb{R}_-$ et appartiennent donc au plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ sur lequel la primitive de la fonction $1/Z$ est $\ln Z$. En particulier,

Les primitives des fonctions $z \mapsto 1/(z+i)$ et $z \mapsto 1/(z-i)$ sont respectivement $\mathrm{Ln}(z+i)$ et $\mathrm{Ln}(z-i)$. (9)

(3) D'après (8), on a donc

$$I_\varepsilon^R = \frac{i}{2}\left(\int_\varepsilon^R \frac{1}{x+i}dx - \int_\varepsilon^R \frac{1}{x-i}dx\right),$$

et d'après (9) et la proposition 3.14 du cours, on a donc

$$I_\varepsilon^R = \frac{i}{2}[\mathrm{Ln}(x+i) - \mathrm{Ln}(x-i)]_{x=\varepsilon}^{x=R}. \tag{10}$$

(4) (a) Présentons tout d'abord le raisonnement correct !

On a déjà vu en TD qu'il ne fallait pas se jetter sur les limites du logarithme complexes et qu'il fallait plutôt expliciter le logarithme avant (voir remarque 2.5 du corrigé du TD 2 !).

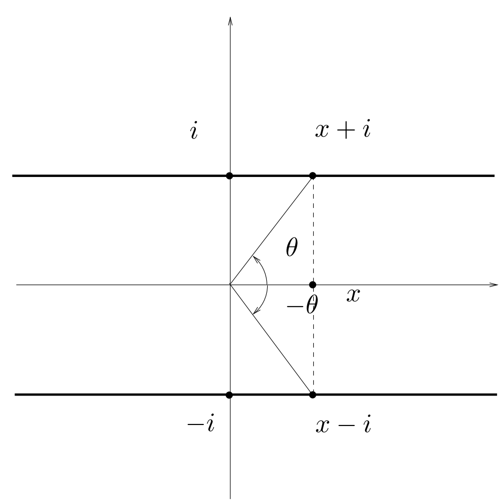


FIGURE 1. Modules et arguments des nombres complexes $x+i$ et $x-i$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Si x est un réel srictement positif, on vérifie que (voir figure 1 page précédente)

$$|x+i| = \rho_x = \sqrt{1+x^2}, \tag{11a}$$

$$\arg(x+i) = \theta_x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in]0, \pi/2[, \tag{11b}$$

$$|x-i| = \rho_x = \sqrt{1+x^2}, \tag{11c}$$

$$\arg(x-i) = -\theta_x = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in]-\pi/2, 0[. \tag{11d}$$

Par définition du logarithme complexe, on a donc pour tout x un réel srictement positif,

$$\mathrm{Ln}(x+i) = \ln\rho_x + i\theta_x, \tag{12a}$$

$$\mathrm{Ln}(x-i) = \ln\rho_x - i\theta_x \tag{12b}$$

Ainsi, de (10) et de (12), on déduit

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^R &= \frac{i}{2}\left(\ln\rho_R + i\theta_R - \ln\rho_R + i\theta_R - \ln\rho_\varepsilon - i\theta_\varepsilon + \ln\rho_\varepsilon - i\theta_\varepsilon\right), \\ &= \frac{i}{2}\left(2i\theta_R - 2i\theta_\varepsilon\right), \\ &= -\left(\theta_R - \theta_\varepsilon\right), \end{aligned}$$

soit encore

$$\int_\varepsilon^R \frac{dx}{1+x^2} = -\theta_R + \theta_\varepsilon. \tag{13}$$

Faisons tendre maintenant R vers l'infini : $\theta_R = \arctan(1/R)$ tend vers $\arctan(0) = 0$ et donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \theta_\varepsilon. \tag{14}$$

Faisons tendre maintenant ε vers zéro par valeurs strictement positives : $\theta_\varepsilon = \arctan(1/\varepsilon)$ tend vers

$$\lim_{X\to+\infty} \arctan(X) = \arctan(+\infty) = \pi/2 \tag{15}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Remarque 1. Compte tenu de $\arctan(0) = 0$ et de $\arctan(+\infty) = \pi/2$, on aurait pu aussi directement écrire les formules (11b) et (11d) pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\arg(x+i) = \theta_x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in [0, \pi/2], \tag{17a}$$

$$\arg(x-i) = -\theta_x = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in [-\pi/2, 0]. \tag{17b}$$

Plus rapidement, on écrivait donc (13) à la limite $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\theta_{+\infty} + \theta_0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 2. Remarquons[1] que, pour tout x réel non nul,

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

De (13), on tire donc

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan\left(\frac{1}{R}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \arctan R - \arctan\varepsilon$$

et donc

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan R - \arctan\varepsilon \tag{19}$$

(b) Reprenons maintenant, pas à pas le raisonnement erroné : Les égalités suivantes sont correctes (!) :

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^{R} &= \frac{i}{2}\left[\mathrm{Ln}(z+i) - \mathrm{Ln}(z-i)\right]_{z=\varepsilon}^{z=R}, \\ &= \frac{i}{2}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right]_{z=\varepsilon}^{z=R}, \\ &= \frac{i}{2}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{R+i}{R-i}\right) - \mathrm{Ln}\left(\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right)\right). \end{aligned}$$

En effet, elles sont équivalentes à, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{x+i}{x-i}\right) = \mathrm{Ln}(x+i) - \mathrm{Ln}(x-i).$$

1. On peut, pour cela dériver la fonction $x \mapsto f(x) \arctan(x) + \arctan(1/x)$. On obtient

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0,$$

donc f est constante. Si on fait tendre x vers $+\infty$, on constate que cette constante vaut $\pi/2$. On peut aussi partir de la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan(a)\tan(b)},$$

poser $A = \tan(a)$, $B = \tan(b)$. On obtient donc

$$\tan(\arctan(A) + \arctan(B)) = \frac{A+B}{1-AB},$$

et donc

$$\arctan(A) + \arctan(B) = \arctan\left(\frac{A+B}{1-AB}\right),$$

Si on suppose A fixé et que $AB \to 1$, par valeurs inférieurs, cela nous donne

$$\arctan(A) + \arctan(1/A) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Une troisième solution, plus rapide, est de calculer, pour $x = \tan a$, l'expression

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{\cos a}{\sin(a)} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$\frac{\pi}{2} - a = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

dont on déduit que, pour tout x réel non nul

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

soit encore à

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)+\operatorname{Ln}(x-i)=\operatorname{Ln}(x+i)$$

soit encore à

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2, \tag{20a}$$

où

$$z_1=\frac{x+i}{x-i}, \tag{20b}$$

$$z_2=x-i. \tag{20c}$$

On rappelle à cette effet les points 6 et 7 de la proposition 2.24 du cours : On a

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad z_1z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-\Longrightarrow \operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}(z_1)+\operatorname{Ln}(z_2)+2ik\pi, \tag{21}$$

où $k\in\mathbb{Z}$. On a

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\quad z_1z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \text{ et } \arg(z_1)+\arg(z_2)\in]-\pi,\pi[\Longrightarrow \operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}(z_1)+\operatorname{Ln}(z_2). \tag{22}$$

Ici, l'égalité (22) s'applique sans problème ! En effet soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On vérifie que $x-i$ n'est pas un réel négatif et d'après (11d)

$$\arg(x-i)=-\theta_x=-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\in]-\pi/2,0[. \tag{23}$$

D'autre part, d'après (11),

$$\frac{x+i}{x-i}=\frac{\rho_xe^{i\theta_x}}{\rho_xe^{-i\theta_x}}=e^{2i\theta_x}$$

Puisque $2\theta_x\in]0,\pi[$, $(x+i)/(x-i)$ n'est pas un réel négatif et

$$\left|\frac{x+i}{x-i}\right|=1, \tag{24a}$$

$$\arg\left(\frac{x+i}{x-i}\right)=2\theta_x\in]0,\pi[. \tag{24b}$$

Ainsi, (23) et (24b) impliquent que

$$\arg(x-i)+\arg\left(\frac{x+i}{x-i}\right)\in]-\pi/2,\pi[,$$

et donc que (22) et donc (20) ont lieu ! Il vient donc

$$I_\varepsilon^R=\frac{i}{2}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{R+i}{R-i}\right)-\operatorname{Ln}\left(\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right)\right). \tag{25}$$

D'après (24), quand R décrit un intervalle du type $[\varepsilon_0,+\infty[$ où $\varepsilon_0>0$, le nombre complexe $(R+i)/(R-i)$ reste dans le plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, sur lequel le logarihme complexe est défini et continu. De plus, si R tend vers $+\infty$, $(R+i)/(R-i)$ tend vers 1, où le logarihme complexe est défini et continu et vaut $\operatorname{Ln}1=\ln 1=0$. On peut donc passer sans problème à la limite R tend vers $+\infty$ dans (25) :

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right) \tag{26}$$

C'est dans le point suivant que la faute a lieu ! « On fait ensuite tendre ε vers 0, par valeurs strictement positives : $\varepsilon + i/\varepsilon - i$ tend vers $-i/i = -1$ et donc $\operatorname{Ln}(\varepsilon + i/\varepsilon - i)$ tend vers $\operatorname{Ln}(-1)$ qui n'est pas défini car -1 est un réel négatif ! Ainsi

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \text{ n'existe pas !}$$

» En effet, d'après (24), quand quand ε décrit un intervalle du type $]0, \varepsilon_0]$ où $\varepsilon_0 > 0$, le nombre complexe $(\varepsilon + i)/(\varepsilon - i)$ reste dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sur lequel le logarihme complexe est défini et continu. Mais, si ε tend vers 0, $(\varepsilon + i)/(\varepsilon - i)$ tend vers -1, où le logarihme complexe et n'est ni défini ni continu ! On ne peut donc faire ce passage à la limite. Cependant, on peut reprendre l'expression (26) et y expliciter le logarithme complexe : d'après (24) et (11b), et par définition du logarithme complexe :

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right) = \ln\left|\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right| + i\arg\left(\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right) = \ln 1 + 2i\theta_\varepsilon = 2i\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Bref,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{27}$$

Maintenant, on peut faire tendre ε vers zéro ! D'après (15), on retrouve bien (16).

Remarque 3. Retenons de cette question, que la méthode 4a est plus rapide est moins « dangereuse » que la méthode 4b qui manipule des logarithmes de produits, dont il faut se méfier [2], mais surtout qui fait des passages à la limites sur le logarithme.

Notons que dans la méthode 4b, nous aurions pu prendre une autre coupure que $\mathbb{R}_-$, de telle sorte que $\operatorname{Ln}(-1)$ soit défini et égal à 0.

Une dernière remarque : nous sommes finalement trouvés devant une limite du type

$$\operatorname{Ln} z_n = \operatorname{Ln}\left(\rho_n e^{i\theta_n}\right) \tag{28}$$

où ρ_n tendait vers $\rho > 0$ et θ_n vers π, en restant dans un intervalle du type $[\pi - \varepsilon_0, \pi[$. Dans ce cas, la limite de la suite z_n ne peut être déterminée par la valeur du logarithme en $z = \rho e^{i\pi} = -\rho \in \mathbb{R}_-$. Cependant, puisque l'on « approchait », l'axe $\mathbb{R}_-$, en restant au dessus, on aurait pu prendre la convention de prolonger l'argument sur $]-\pi, \pi]$, comme le fait matlab, puis d'écrire, si $z \in \mathbb{R}_-$

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\arg(z) = \ln|z| + i\pi \tag{29}$$

de telle sorte que le logarithme deviennent continu et que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Ln} z_n = \operatorname{Ln} z = \ln\rho| + i\pi,$$

ce que l'on retrouve plus rigoureusement en écrivant

$$\operatorname{Ln} z_n = \ln|\rho_n| + i\theta_n \to \ln|\rho| + i\pi.$$

Ainsi, le mauvais raisonnement aurait été conclu de la façon suivante : « On a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{\varepsilon+i}{\varepsilon-i}\right).$$

On fait ensuite tendre ε vers 0, par valeurs strictement positives : $\varepsilon + i/\varepsilon - i$ tend vers $-i/i = -1$ et donc $\operatorname{Ln}(\varepsilon + i/\varepsilon - i)$ tend vers $\operatorname{Ln}(-1) = \ln|1| + i\pi = i\pi$ qui est défini car -1 est un réel négatif ! Ainsi

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{i}{2}\times(i\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Mais qui ici marchait bien !

»

Attention, on préfère cependant éviter cet artifice. En effet, si par exemple, on se retrouve dans la situation où on a une limite du type

$$\operatorname{Ln} z_n = \operatorname{Ln}\left(\rho_n e^{i\theta_n}\right)$$

où ρ_n tend vers $\rho > 0$ et θ_n vers $-\pi$, en restant dans un intervalle du type $]-\pi, -\pi-\varepsilon]$, dans ce cas on a

$$\operatorname{Ln} z_n = \ln|\rho_n| + i\theta_n \to \ln|\rho| - i\pi,$$

et dans ce cas, il faudrait poser, si $z \in \mathbb{R}_-$,

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| - i\pi,$$

ce qui contredit (29) ! La situation est évidémment encore pire si on a une limite du type

$$\operatorname{Ln} z_n = \operatorname{Ln}\left(\rho_n e^{i\theta_n}\right)$$

où ρ_n tend vers $\rho > 0$ et θ_n oscille entre π et $-\pi$, de telle sorte que z_n passe d'un coté à l'autre de l'axe l'axe $\mathbb{R}_-$. On préfère donc finalement interdire $\mathbb{R}_-$ et expliciter le logarithme et ensuite de passer à la limite !

Voir aussi l'exercice 1.3 du TP 1 : pour matlab, le logarithme complexe est aussi défini sur $\mathbb{R}_-$. Cela pose toutefois des difficultés illustrées dans l'exercice 1.4 du TP 1.

(5) Naturellement, l'équation (19), nous rappelle que la primitive de $1/(x^2+1)$ est $\arctan x$ et donc on écrit directement

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(+\infty) - \arctan 0 = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est ici le plus rapide !

On pouvait aussi utiliser la formule des résidus ou directement la proposition 5.7 du cours appliquées à la fonction $z \mapsto \mathcal{R}(z) = 1/(z^2+1)$. En effet, cette proposition nous donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2i\pi \frac{1}{[(z^2+1)']_{z=i}} = \frac{2i\pi}{2i} = \pi$$

et l'on retrouve bien donc (16).

Correction de l'exercice 3.

(1) La résolution de l'équation différentielle suivante au sens des fonctions,

$$y'(t) + y(t) = f(t), \text{ sur } \mathbb{R}_+, \tag{30a}$$

$$y(0) = 1, \tag{30b}$$

où f est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0,1], \\ t, & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \tag{30c}$$

est exactement celle présentée dans la section 7.5.3 du cours. L'équation (30) admet une solution unique (qui est une fonction) donnée par (7.68) du cours, soit ici

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t f(u)e^u du. \tag{31}$$

Calculons

$$g(u) = \int_0^t f(u)e^u du.$$

Si $t \leq 1$, on a

$$g(u) = \int_0^t e^u du = e^t - 1.$$

Si $t \geq 1$, on a

$$g(u) = \int_0^t f(u)e^u du = \int_0^1 f(u)e^u du + \int_t^t f(u)e^u du = \int_0^1 e^u du + \int_t^t ue^u du$$

On calcule la seconde intégrale par intégration par partie et on obtient donc

$$g(u) = \mathrm{e} + \mathrm{e}^t\ (t-1) - 1$$

Ainsi, en réinjectant dans (31), on obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0,1], \\ t + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^t} - 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \tag{32}$$

(2) (a) On constate que y est continue, d'après l'expression (31), puisque f est continue, son intégrale est continue.

(b) De l'équation différentielle (30), on déduit que

$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) = -y(t) + f(t). \tag{33}$$

Puisque y et f sont continues, y' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Plus rapidement, il était dit aussi dans le cours que si, par exemple, f est continue, y est de classe C^1 !

(c) Puisque f est continue et dérivable partout sauf en 1, f' existe sauf en 1 et de (33), on déduit que

$$\forall t \neq 1, \quad y''(t) = -y'(t) + f'(t). \tag{34}$$

Ainsi, y'' est une fonction (discontinue) et donc une distribution-fonction. Enfin, on constate que f' est discontinue en 1, dérivable ailleurs, donc la formule des sauts nous donne

$$(T_{f'})' = f'' + \delta_1$$

et de (34), on déduit qu'au sens des distributions

$$y''' = -y'' + f'' + \delta_1,$$

qui n'est plus une fonction.

On peut résumer cela en disant que y est dans $\left(H^2_{\mathrm{loc}(\mathbb{R}_+)} \cap C^1(\mathbb{R}_+)\right) \setminus C^2(\mathbb{R}_+)$.

Correction de l'exercice 4.

Cet exercice est très proche des calculs faits en section 8.1 du cours ou de l'exercice de TD 6.4, auxquels on renvoie.

La fonction p sur $[\alpha, \beta]$ est définie de la façon suivante

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad p(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in]-1,0[, \\ 1, & \text{si } x \in]0,1[, \\ x-1, & \text{si } x \in]1,2[. \end{cases} \tag{35}$$

(1) (a)

Le graphe de p est donné en figure 2. On constate que la fonction p est continue et dérivable par morceaux.

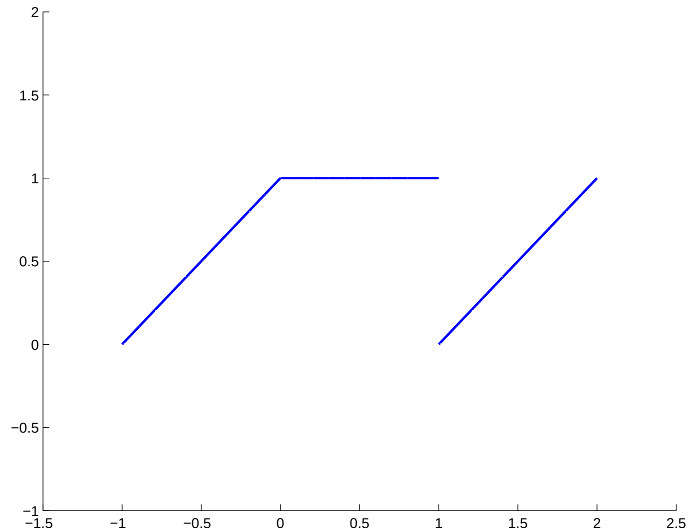


FIGURE 2. Le graphe de p.

(b) On appelle p' sa dérivée usuelle de p, définie par :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad p'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]-1, 0[, \\ 0, & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 1, & \text{si } x \in]1, 2[. \end{cases} \tag{36}$$

Les sauts de p sont respectivement définis par les valeurs $\sigma = \{0, -1\}$ aux endroits $a = \{0, 1\}$. La formule des saut de la proposition 6.24 du cours nous donne donc :

$$T'_p = p' + \sum_{i=1}^{3-1} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}.$$

On obtient donc

$$T'_p = p' - \delta_1. \tag{37}$$

On fait de même pour la dérivée seconde au sens des des distributions. On constate que la fonction p' est continue et dérivable par morceaux et que sa dérivée usuelle p'' est donnée par

$$\forall x \notin \{0, 1\}, \quad p''(x) = 0. \tag{38}$$

Les sauts de p' sont respectivement définis par les valeurs $\sigma = \{-1, 1\}$ aux endroits $a = \{0, 1\}$. La formule des saut de la proposition 6.24 du cours nous donne donc :

$$(T_{p'})' = p'' + \sum_{i=1}^{3-1} \sigma_{a_i} \delta_{a_i},$$

et donc

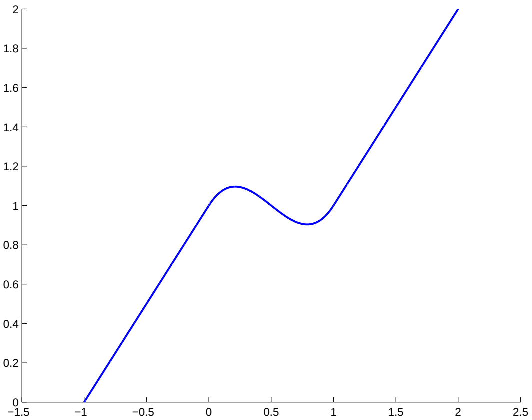
$$(T_{p'})' = -\delta_0 + \delta_1. \tag{39}$$

D'après (37), on a donc

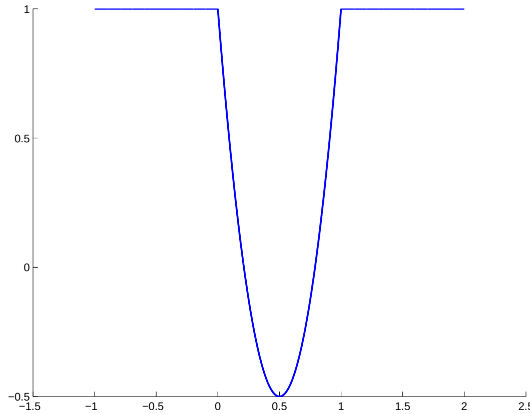
$$T''_p = (T_{p'})' - \delta'_1, \tag{40}$$

soit

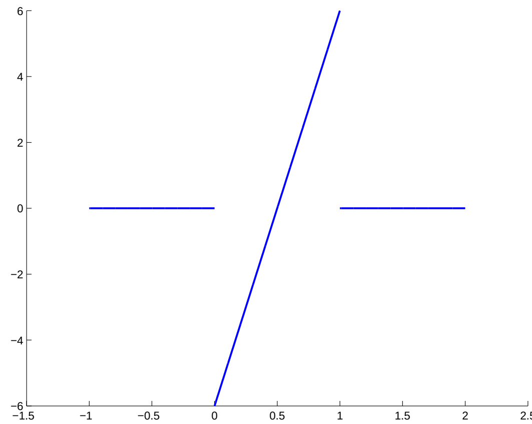
$$T''_p = -\delta_0 + \delta_1 - \delta'_1. \tag{41}$$



(a) : p



(b) : p'



(c) : p''

FIGURE 3. Les graphes de p, p' et p''.

(c) On vérifie que p est une distributions-fonctions tandis que T_p' et T_p'' sont des distributions non fonctions.

(2) On suppose que p est maintenant défini de la façon suivante :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad p(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in]-1, 0[, \\ 2x^3 - 3x^2 + x + 1, & \text{si } x \in]0, 1[, \\ x, & \text{si } x \in]1, 2[. \end{cases} \tag{42}$$

Le graphe de p est donné en figure 3(a).

On vérifie que p' est maintenant défini de la façon suivante :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad p'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]-1, 0[, \\ 6x^2 - 6x + 1, & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 1, & \text{si } x \in]1, 2[. \end{cases} \tag{43}$$

Le graphe de p' est donné en figure 3(b). On constate que la fonction p' est continue partout et ne présente pas de sauts ! On dérive donc p' usuellement. On obtient donc la dérivée usuelle de p'' :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad p''(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in]-1, 0[, \\ 12x - 6, & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 0, & \text{si } x \in]1, 2[. \end{cases} \tag{44}$$

Le graphe de p'' est donné en figure 3(c).

On vérifie que p, p' et p'' sont des distributions-fonctions et que p'' est discontinue. En d'autres termes, on peut aussi dire que p appartient à $\left(H^2(]\alpha, \beta[) \cup C^1([\alpha, \beta])\right) \setminus C^2([\alpha, \beta])$.

Correction de l'exercice 5.

On renvoie aussi à la correction de l'exercice de TD 4.1, qui est généralisé par l'exercice qui suit.

(1) Si x est non nul, on a

$$f_n(x) = nf(nx) = \frac{1}{x}(nx)f(nx)$$

qui tend vers zéro en quand n tend l'infini, d'après l'énoncé. Si x est nul, on a

$$f_n(x) = nf(0),$$

qui tend soit vers zéro (si $f(0)$ est nul) ou $\pm\infty$ sinon. Ainsi, la limite simple de $(f_n)_n$ est nulle si $f(0)$ est nul et sinon égale à la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$ et égale à $\pm\infty$ en zéro (ce que les physiciens appellent le Dirac !).

(2) On a vu dans l'exercice de TD 4.1 que la limite de (f_n) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est δ, ce qui ne contredit pas le résultat qui vient d'être montré !

(3) Puisque (f_n) tend vers δ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d'après le lemme 6.31 du cours, la distribution-fonction $(f_n^{(k)})$ tend vers $\delta^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4) On a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{45}$$

et donc, puisque $f_n(x) = nf(nx)$

$$f_n'(x) = -\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2x^2/2} x. \tag{46}$$

On montre aussi que

$$f_n''(x) = \frac{n^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2x^2/2}(n^2x^2 - 1), \tag{47}$$

qui est s'annulle en $\pm 1/n$, positive sur $[1/n, \infty[$ et $]-\infty, -1/n[$ et négative sur $[-1/n, 1/n]$. On en déduit le tableau de variation de f'.

Voir les figures 4 et 5.

(5) On a toujours $f_n(x) = nf(nx)$ et donc, pour tout k

$$f_n^{(k)}(x) = n^{k+1} f^{(k)}(nx). \tag{48}$$

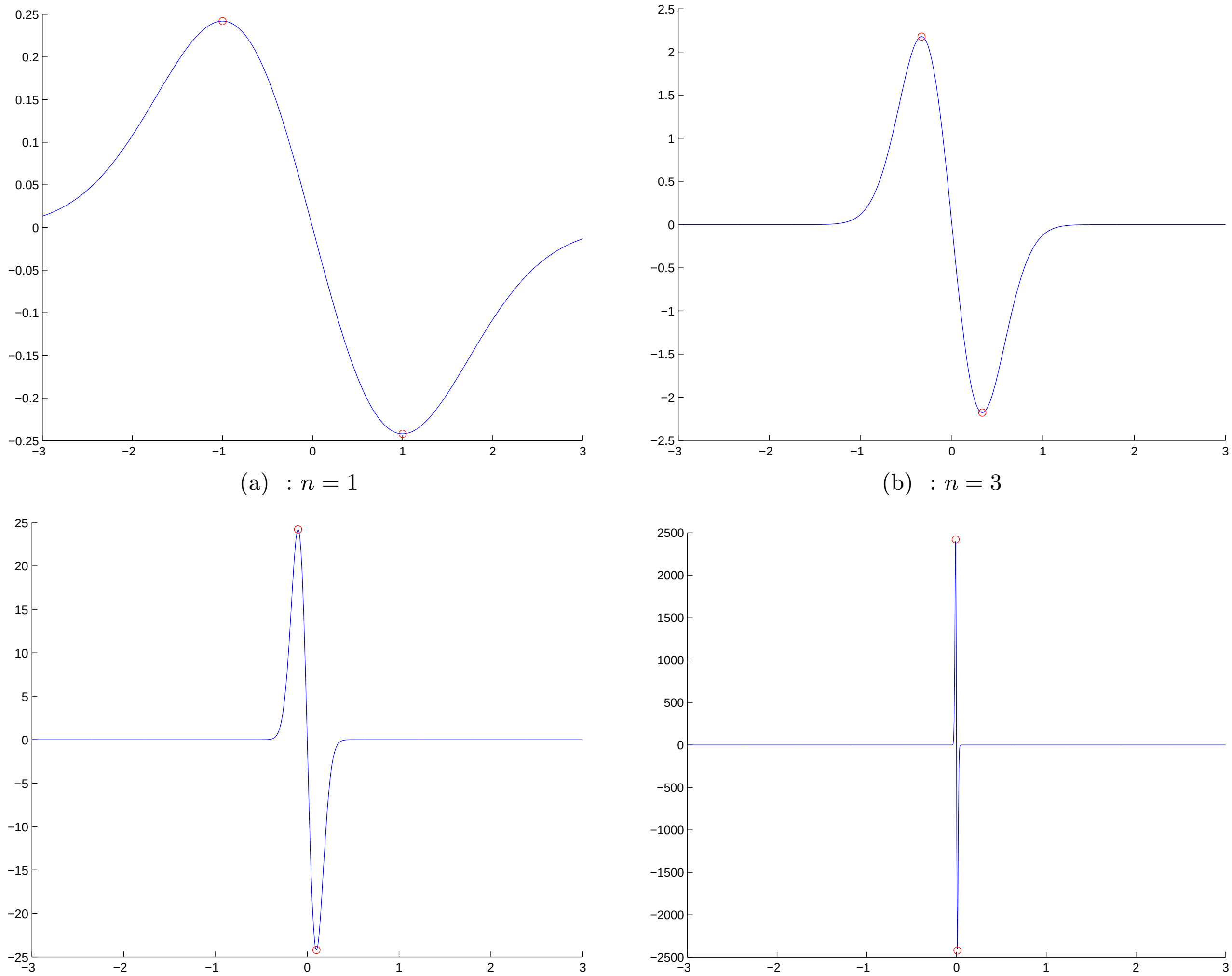
Il ne reste plus qu'à calculer $f^{(k)}$ où f est donnée par (45),

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{49}$$

notée sous la forme

$$f(x) = \alpha e^{\beta x^2} \tag{50}$$

où $\alpha = 1/\sqrt{2\pi}$ et $\beta = -1/2$.



(a) : $n = 1$ (b) : $n = 3$

(c) : $n = 10$ (d) : $n = 100$

FIGURE 4. La réprésentation de la fonction f_n' pour quelques valeurs de n.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

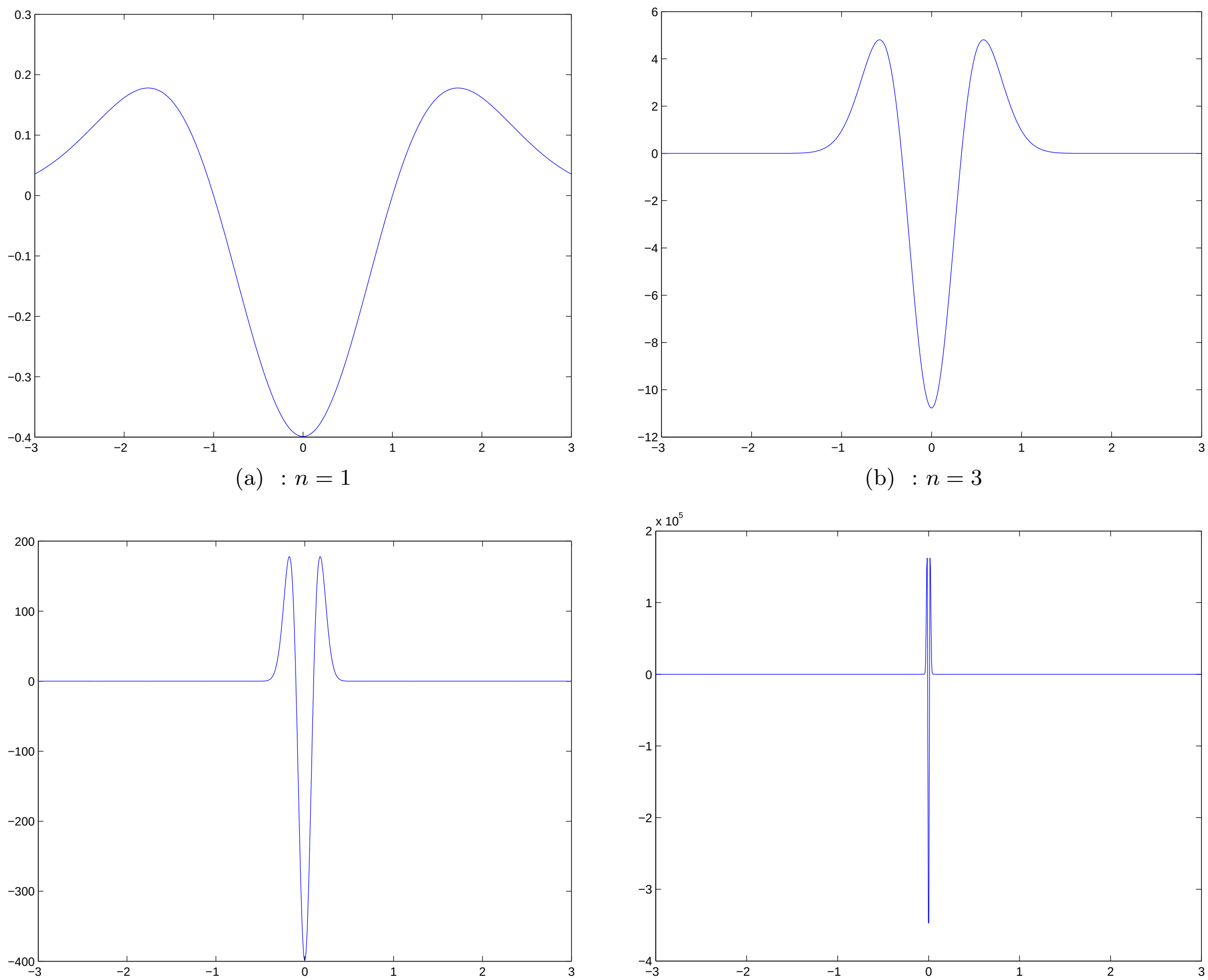
$$f^{(k)}(x) = \alpha p_k(x) e^{\beta x^2} \tag{51}$$

où p_k est un polynôme. Pour $k = 0$, c'est vrai avec $p_0(x) = 1$. Supposons (51) vraie pour k et démontrons-là pour $k + 1$: on a

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(\alpha p_k(x) e^{\beta x^2}\right)', \\ &= \alpha e^{\beta x^2} \left(p_k'(x) + 2\beta x p_k(x)\right), \end{aligned}$$

et ainsi (51) est vraie à l'ordre $k + 1$ en considérant le polynôme p_{k+1} défini par

$$p_{k+1}(x) = p_k'(x) + 2\beta x p_k(x), \tag{52}$$



(a) $: n = 1$ (b) $: n = 3$ (c) $: n = 10$ (d) $: n = 100$

FIGURE 5. La réprésentation de la fonction f_n'' pour quelques valeurs de n.

ce qui fournit donc une relation de récurrence. Par exemple, on a $p_0(x) = 1$ et donc

$$p_1(x) = 2\beta x. \tag{53}$$

Ainsi d'après (48)

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \alpha n^2 f'(nx), \\
&= \alpha n^2 p_1(nx) e^{\beta (nx)^2}, \\
&= 2\alpha n^2 \beta n x e^{\beta (nx)^2}, \\
&= -\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}} x e^{-n^2x^2/2}.
\end{aligned}$$

ce qui redonne bien (46). On a aussi

$$p_2(x) = (2\beta x)' + 2\beta x(2\beta x) = 4\beta^2 x^2 + 2\beta,$$

et donc

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= \alpha n^3 f''(nx), \\ &= \alpha n^3 (4\beta^2 n^2 x^2 + 2\beta) e^{\beta n x^2}, \\ &= \frac{n^3}{\sqrt{2\pi}} (n^2 x^2 - 1) e^{-n^2 x^2/2}, \end{aligned}$$

ce qui redonne bien (47).

Références

[Buc92] H. Buchwalter. *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 BUC, 4 ième étage). Ellipses, 1992.