Mécanique 4A OMI3 — Automne 2015

Corrigé de l'examen du 26 Novembre 2015

Correction de l'exercice 1.
On utilise simplement la définition 2.24 du cours :
– Il vient clairement

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}, \tag{1a}$$
$$\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 = 0, \tag{1b}$$
$$\operatorname{Ln}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}. \tag{1c}$$

– Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le module de $-1+\varepsilon i$ vaut $\sqrt{1+\varepsilon^2}$ et la détermination principale de son argument vaut θ où

$$\theta + \arctan\varepsilon = \pi.$$

Ainsi, on a $\theta = \pi - \arctan\varepsilon$ et donc

$$\operatorname{Ln}(-1+\varepsilon i) = \frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2) + i\left(\pi - \arctan\varepsilon\right). \tag{2}$$

– De même, on a

$$\operatorname{Ln}(-1-\varepsilon i) = \frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2) + i\left(-\pi + \arctan\varepsilon\right). \tag{3}$$

– En appliquant (2) avec $\varepsilon = 1$, on a

$$\operatorname{Ln}(-1+i) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4}. \tag{4}$$

– En appliquant (3) avec $\varepsilon = 1$, on a

$$\operatorname{Ln}(-1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{3i\pi}{4}. \tag{5}$$

Correction de l'exercice 2.
On pourra aussi consulter l'exercice 2 de l'examen du 15 décembre 2014, disponible sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/examOMI3A14.pdf`
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/examcorOMI3A14.pdf`
qui montre aussi les utilisations du logarithme complexe, dangereuses, si on ne prend pas les précaution d'emploi !

(1) (a) On paramétrise le segment $[1, 1+i]$ par $z = 1+it$ où $t \in [0,1]$. Ce segment ne contient par l'origine et la fonction $f(z) = 1/z$ y est donc continue. D'après la définition (3.1), on a donc $dz = idt$ et

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(1+it)idt,$$

et donc

$$I = i\int_0^1 \frac{1}{1+it}dt. \tag{6}$$

(b) Pour calculer cette intégrale, on peut passer par les parties réelles et imaginaires de l'intégrande qui vaut :

$$G(t)=\frac{1}{1+it}=\frac{1-it}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}-i\frac{t}{1+t^2}.$$

Or, on a classiquement

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt=\arctan t, \tag{7a}$$

$$\int \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right). \tag{7b}$$

La seconde primitive se calcule en écrivant classiquement

$$\int \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(|1+t^2|)=\frac{1}{2}\ln(1+t^2).$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} I&=i\left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt-i\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt\right),\\ &=i\left(\arctan(1)-\arctan(0)-\frac{i}{2}\left(\ln\left(1+1^2\right)-\ln\left(1+0^2\right)\right)\right)=i\arctan(1)+\frac{1}{2}\ln 2, \end{aligned}$$

et donc

$$I=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{i\pi}{4}. \tag{8}$$

(c) Le segment $[1,1+i]$ ne rencontre pas la coupure $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}$ et donc une primitive de $1/z$ est $F(z)=\operatorname{Ln} z$. D'après la proposition 3.15 du cours, on a donc

$$I=\int_\gamma f(z)dz=F(1+i)-F(1)=\operatorname{Ln}(1+i)-\operatorname{Ln}1.$$

Il suffit alors de réutiliser les résultats (1a) et (1b) de l'exercice 1 :

$$I=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$$

et on retrouve donc (8) très rapidement !

(2) (a) Calculons l'intégrale en question à la fois pour la question 2 et la question 3. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On procède exactement de la même façon : on paramétrise le segment $[x-i,x+i]$ par $z=x+it$ où $t\in[-1,1]$ de sorte que $dz=idt$ et comme précédemment, on a

$$I=i\int_{-1}^1 \frac{1}{x+it}dt. \tag{9}$$

On écrit ensuite

$$G(t)=\frac{1}{x+it}=\frac{x-it}{x^2+t^2}=\frac{x}{x^2+t^2}-i\frac{t}{x^2+t^2},$$

et

$$I=i\left(\int_{-1}^1 \frac{xdt}{x^2+t^2}-i\int_{-1}^1 \frac{tdt}{x^2+t^2}\right)$$

(b) Dans chacune des intégrales, on fait le changement de variable (à $x\neq 0$ fixé) $t=xu$ de sorte que $dt=xdu$ et

$$\begin{aligned} I&=i\left(\int_{-1/x}^{1/x} \frac{x^2du}{x^2+x^2u^2}-i\int_{-1/x}^{1/x} \frac{x^2udu}{x^2+x^2t^2}\right),\\ &=i\left(\int_{-1/x}^{1/x} \frac{du}{1+u^2}-i\int_{-1/x}^{1/x} \frac{udu}{1+u^2}\right), \end{aligned}$$

et par parité

$$\begin{aligned} &= 2i \int_0^{1/x} \frac{du}{1+u^2}, \\ &= 2i \arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Bref, on a

$$I = 2i \arctan\left(\frac{1}{x}\right). \tag{10}$$

En particulier, pour $x = 1$, on a

$$I = \frac{i\pi}{2}. \tag{11}$$

(c) Le segment $[1-i, 1+i]$ ne rencontre pas la coupure $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}$ et donc une primitive de $1/z$ est $F(z) = \operatorname{Ln} z$. D'après la proposition 3.15 du cours, on a donc

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(1+i) - F(1-i) = \operatorname{Ln}(1+i) - \operatorname{Ln}(1-i),$$

et d'après les résultats de l'exercice 1 :

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

et on retrouve donc de nouveau (11) très rapidement !

(3) (a) Si on utilise la formule (10) pour $x = -1$, on retrouve bien

$$I = \int_{[-1-i,-1+i]} \frac{dz}{z} = i\int_{-1}^{1} \frac{1}{-1+it}dt = -\frac{i\pi}{2}. \tag{12}$$

Si on écrit comme précédemment, il vient

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(-1+i) - F(-1-i) = \operatorname{Ln}(-1+i) - \operatorname{Ln}(-1-i),$$

et d'après les résultats de l'exercice 1 :

$$I = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4} = \frac{3i\pi}{2},$$

ce qui n'est plus cette fois-ci la valeur donnée par (12) !

(b) Cela vient du fait que contrairement aux calculs précédents, le segment $[-1-i, -1+i]$ rencontre la coupure $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}$ et donc on ne peut plus utiliser la proposition 3.15 du cours pour calculer l'intégrale I grâce à la primitive de $1/z$; en effet, le logarithme n'est pas défini en -1 et donc non holomorphe sur tout le segment $[-1-i, -1+i]$.

(c) On peut pallier cet inconvénient de plusieurs façon.

(i) On peut isoler l'intersection de $[-1-i, -1+i]$ et de $\mathbb{R}_-$: on considère $\varepsilon > 0$ et on considère que

$$[-1-i, -1+i] = [-1, i, -1-i\varepsilon] \cup [-1-i\varepsilon, -1+i\varepsilon] \cup [-1+i\varepsilon, -1+i]$$

de sorte que

$$I = \int_\gamma f(z)dz = \int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz + \int_{[-1-i\varepsilon,-1+i\varepsilon]} f(z)dz + \int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz. \tag{13}$$

Puisque f est continue sur $[-1-i\varepsilon,-1+i\varepsilon]$, elle est en particulier bornée et la proposition 3.9 du cours implique que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{[-1-i\varepsilon,-1+i\varepsilon]} f(z)dz=0 \tag{14}$$

et donc, d'après (13),

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz+\int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz. \tag{15}$$

À $\varepsilon>0$ fixé, chacun des segments $[-1-i,-1-i\varepsilon]$ et $[-1+i\varepsilon,-1+i]$ ne rencontre de nouveau plus $\mathbb{R}_-$ et donc on peut lui appliquer de nouveau la proposition 3.15 :

$$\begin{aligned}\int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz&=\mathrm{Ln}(-1+i)-\mathrm{Ln}(-1+i\varepsilon),\\ \int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz&=\mathrm{Ln}(-1-i\varepsilon)-\mathrm{Ln}(-1-i).\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les résultats de l'exercice 1, il vient

$$\begin{aligned}&\int_{[-1+i\varepsilon,-1+i]} f(z)dz+\int_{[-1-i,-1-i\varepsilon]} f(z)dz\\ &=\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{3i\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{3i\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2)-i\left(\pi-\arctan\varepsilon\right)+\frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2)+i\left(-\pi+\arctan\varepsilon\right),\\ &=\frac{3i\pi}{2}+2i\arctan\varepsilon-2i\pi.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite $\varepsilon\to 0$, cette dernière égalité et (15) impliquent

$$I=-\frac{i\pi}{2},$$

ce qui est exactement (12), cette fois-ci !

(ii)

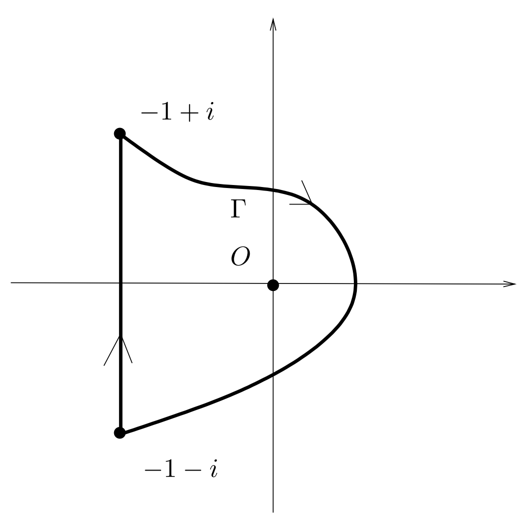

FIGURE 1. Le chemin Γ.

Une autre preuve est de compléter le segment $[-1-i,-1+i]$ par un chemin Γ, qui ne passe par $\mathbb{R}_-$, de telle sorte que $\widetilde{\Gamma}=[-1-i,-1+i]\cup\Gamma$ constitue un chemin fermé qui fait une fois le tour de 0, comme le montre la figure 1 et qui soit inclus dans le plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. On a alors

$$\int_{\widetilde{\Gamma}}\frac{dz}{z}=-2i\pi. \tag{16}$$

En effet, on peut montrer cela de deux façons :

– L'indice de 0 par rapport à Γ est égal à -1 (puisque l'on tourne dans le sens des aiguille d'une montre ! voir remarque 3.13 du cours) et donc d'après la définition 3.3 du cours, on a

$$\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=2i\pi\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=-2i\pi.$$

– Une autre façon [1] est d'appliquer la formule des résidus 3.33 (équation (3.30) avec un signe -1 puisque l'on tourne dans le sens des aiguille d'une montre) à la fonction $1/z$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et ayant un pôle d'ordre 1 en 0 :

$$\int_\Gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=-2i\pi\,\mathrm{Rés}(f,0)$$

On a $\mathrm{Rés}(f,0)=1/[z']_{z=0}=1$ et on peut conclure.

On écrit enfin grâce à (16)

$$-2i\pi=\int_{\widetilde{\Gamma}}\frac{dz}{z}=\int_\Gamma\frac{dz}{z}+\int_{[-1-i,-1+i]}\frac{dz}{z},$$

et donc

$$I=\int_{[-1-i,-1+i]}\frac{dz}{z}=-2i\pi-\int_\Gamma\frac{dz}{z} \tag{17}$$

Puisque Γ ne passe par $\mathbb{R}_-$, on peut donc écrire, cette fois-ci de nouveau

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z}=\mathrm{Ln}(-1-i)-\mathrm{Ln}(-1+i)=-\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{3i\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{3i\pi}{4}$$

et donc

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z}=-\frac{3i\pi}{2}. \tag{18}$$

D'après (17) et (18), il vient donc

$$I=-2i\pi+\frac{3i\pi}{2}=-\frac{i\pi}{2},$$

ce qui est exactement (12).

Remarque 1. Matlab connaît le logarithme complexe et intégre symboliquement en l'utilisant. Si on tape successivement

```
syms x;
int(1/x,1,1+i)
int(1/x,1-i,1+i)
int(1/x,-1-i,-1+i)
```

1. Mais qui revient en théorie au même puisque c'est ainsi qu'est démontrée la formule des résidus !

on obtiendra successivement les résultats

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi\,\mathrm{i}}{4},\\&\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2},\\&-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}$$

Les deux premiers sont conformes aux calculs précédents (8), (11) et même (12). On peut aussi passer par les parties et réelles et imaginaires en utilisant (6), (9) et (12) et taper

```
syms x;
int(i/(1+i*x),0,1)
int(i/(1+i*x),-1,1)
int(i/(-1+i*x),-1,1)
```

pour obtenir successivement les mêmes résultats

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi\,\mathrm{i}}{4},\\&\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2},\\&-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.
On utilise la méthode des résidus et on pourra consulter par exemple [Buc92, p. 118-119] (qui a inspiré directement cette correction) ou une méthode très légèrement différente sur
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_de_Dirichlet`

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants des deux arcs de cercles de centre l'origine O et des deux segments constituant Γ :

$$\gamma_\varepsilon : z=\varepsilon e^{i\theta} \text{ pour } \theta\in[\pi/2,0]\,; \tag{19a}$$

$$\gamma_R : z=Re^{i\theta} \text{ pour } \theta\in[0,\pi/2]\,; \tag{19b}$$

$$[\varepsilon,R] : z=t \text{ pour } t\in[\varepsilon,R]\,; \tag{19c}$$

$$[iR,i\varepsilon] : z=it \text{ pour } t\in[R,\varepsilon]. \tag{19d}$$

On a aussi

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz+\int_{\Gamma_R} f(z)dz+\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz+\int_{[iR,i\varepsilon]} f(z)dz.$$

Ainsi, grâce aux deux paramétrages (19c) et (19d), il vient pour chacun d'eux $dz=dt$ et $dz=idt$ de sorte que :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz&=\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz+\int_{\Gamma_R} f(z)dz+\int_\varepsilon^R f(t)dt+i\int_R^\varepsilon f(it)dt,\\&=\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz+\int_{\Gamma_R} f(z)dz+\int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt-i\int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{it}dt\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz+\int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt-\int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{20}$$

(2) (a) D'après la définition (19b), on a $dz = Rie^{i\theta}d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta,\\ &= Ri\int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\left(Re^{i\theta}\right)}}{Re^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta,\\ &= i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta \tag{21}$$

(b) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0,\pi/2]$, ce dont on déduit que la courbe est au-dessus de sa corde, d'équation $y = 2\theta/\pi$, soit

$$\forall \theta\in[0,\pi/2],\quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{22}$$

(c) D'après (21), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi/2}\left|e^{iRe^{i\theta}}\right|d\theta,\\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

et on déduit de (22) que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta,\\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta,\\ &= -\frac{\pi}{2R}\left(e^{-\frac{2R\times\pi}{2\pi}}-1\right),\\ &= \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right),\\ &\leq \frac{\pi}{2R}\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{2R} \tag{23}$$

dont on déduit immédiatement que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{24}$$

(3) De la même façon que l'on a établi (21), on a $dz = \varepsilon ie^{i\theta}d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz &= \int_{\pi/2}^{0} f(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon ie^{i\theta}d\theta,\\ &= -\varepsilon i\int_0^{\pi/2}\frac{e^{i\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)}}{\varepsilon e^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta,\\ &= -i\int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta,\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -i\int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta \tag{25}$$

(a) À $\theta \in [0,\pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} = 1. \tag{26}$$

(b) On a donc convergence simple de la fonction $\theta \mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ vers 1 sur $[0,\pi/2]$. Si la convergence était uniforme, on pourrait écrire donc que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{\pi/2} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} e^{\varepsilon i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et en déduire, selon (25) que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -\frac{i\pi}{2}. \tag{27}$$

Malheureusement, cette convergence n'est pas *a priori* uniforme. Cependant, le théorème de convergence dominée de Lebesgue F.3 du cours est aussi valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il suffit donc, pour pouvoir l'appliquer de majorer chaque fonction $\theta \mapsto e^{\varepsilon i e^{i\theta}}$ de façon indépendante de ε par une fonction intégrable sur $[0,\pi/2]$, ce qui est aisé car

$$\left| e^{\varepsilon i e^{i\theta}} \right| = e^{-\varepsilon \sin\theta} \le 1.$$

Remarque 2. Puisque, à $\theta \in [0,\pi/2]$ fixé, on a

$$\left| e^{R i e^{i\theta}} \right| \le e^{-R\sin\theta}$$

on déduit d'une part que à $\theta \in]0,\pi/2]$ fixé, on a

$$\lim_{R\to+\infty} e^{R i e^{i\theta}} = 0$$

et d'autre part que, que pour tout $R > 0$, on a

$$\left| e^{R i e^{i\theta}} \right| \le 1.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue F.3 assure encore que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

et cela pouvait nous permettre d'éviter de passer par la question 2 !

(4) La fonction $f : z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, elle n'a aucune singularité à l'intérieur du chemin Γ. Ainsi, d'après la formule du résidus (formule 3.33) du cours, on a

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{28}$$

Ici, on n'a même pas de résidu à calculer !

(5) Synthétisons tous les résultats : d'après (20) et (28), il vient, pour tout ε et R

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

ce qui donne, en séparant partie réelle et imaginaire

$$\int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt + \operatorname{Re}\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz\right) = 0,$$

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t} dt + \operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0\right).$$

Enfin, d'après (24) et (27), il vient en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

ce que l'on peut noter sous la forme finale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt = 0, \tag{29a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{29b}$$

Remarque 3. Les intégrandes de (29) sont prolongeables par continuité en zéro donc la convergence en zéro etait acquise dès le début. Attention cependant, ces intégrales ne sont que semi-convergentes au sens de l'intégration de Riemann : on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right| dt = +\infty,$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty.$$

Au sens de l'intégration de Lebesgue, les fonctions intégrandes ne sont donc pas dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Correction de l'exercice 4.

(1) La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée égale à -1 sur $\mathbb{R}_-^*$. Cette fonction est continue en zéro et la formule des sauts implique donc

$$|x|' = \operatorname{signe}(x), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{30}$$

La valeur de signe(0) est nulle mais importe peu finalement au sens des distributions.

Remarque 4. L'un d'entre vous a proposé une méthode plus longue, mais juste et originale ! On remarque la distribution-fonction $x \mapsto xH(x)$ existe dans l'ensemble des distributions, car H est une disribution et $x \mapsto x$ est infiniment dérivable ! D'autre part, on peut écrire, pour tout x non nul,

$$|x| = xH(x) - xH(-x),$$

puisque pour $x > 0$, c'est équivalent à $x = x$ et pour $x < 0$, c'est équivalent à $-x = -x$. En dérivant cela au sens des distributions [2] il vient au sens des distributions

$$|x|' = x'H + xH' - x'H(-x) + xH'(-x),$$

et puisque $H' = \delta$

$$|x|' = H + x\delta - H(-x) + x\delta.$$

On a vu qu'u sens des distributions, $x\delta = 0$ et donc

$$|x|' = H - H(-x),$$

2. ici, il manque un tout petit peu de rigueur !

Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto H - H(-x)$ vaut le signe de x, ce qui nous permet de conclure.

(2) On pourrait être tenté d'écrire[3] signe(0) = 0 et donc

$$r = 0,$$

quand $\dot{x}(t) = 0$. Physiquement cela n'a aucun sens. Dans ce cas, la loi de Coulomb prévoit en fait

$$r(t) \in [-\alpha, \alpha] \text{ quand } \dot{x}(t) = 0. \tag{31}$$

Remarque 5. On a donc une équation différentielle gérant le mouvement

$$m\ddot{x}(t) = r(t) + F(t), \tag{32}$$

où

$$r(t) \begin{cases} = -\alpha \text{signe}\left(\dot{x}(t)\right), & \text{si } \dot{x}(t) \neq 0, \\ \in [-\alpha, \alpha], & \text{si } \dot{x}(t) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

On peut donc écrire une « inclusion » différentielle gérant le mouvement :

$$m\ddot{x}(t) \in -\alpha\sigma\left(\dot{x}(t)\right) + F(t). \tag{34}$$

où l'on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}$

$$\sigma(X) = \begin{cases} -\alpha \text{signe}\left(X\right), & \text{si } \dot{X} \neq 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \text{si } X = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Cela est à la base d'une théorie mathématiques, à la base de nombreux modèles utilisés dans la mécanique du frottement. Voir par exemple [BBL12] où le chapitre d'introduction correspondant disponible en anglais :

`http://media.wiley.com/product_data/excerpt/58/18482152/1848215258-60.pdf`

Correction de l'exercice 5.

(1) Le cas particulier $\beta = 0$ et α quelconque correspond à l'équation différentielle au sens des distributions suivante : on cherche une distribution T telle que

$$T'' + aT + bT' = \alpha\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}\right), \tag{36}$$

qui a été étudiée dans la section 8.1 du chapitre 8, à laquelle on renvoie.

(a) On suppose que x appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution-fonction notée T_x. On obtient l'équation différentielle

$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = 0, \tag{37a}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = 0, \tag{37b}$$

$$x'(0) = \sigma' = \alpha, \tag{37c}$$

équation que l'on sait résoudre facilement en utilisant par exemple les transformée de Laplace (voir cours de OMI2) ou sous matlab symbolique.

(b) Cette équation différentielle correspond au mouvement d'un point matériel de masse $m = 1$, soumis à un ressort linéaire de raideur k noté ici a et à un amortissement visqueux c, noté ici b, Il est repos, puis soumis à un choc, donné par $f = \alpha\delta$.

(c) La distribution T obtenue est une fonction, de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, continue sur $\mathbb{R}$, mais de dérivée discontinue en zéro.

3. Comme font certains mécaniciens !

(2) On considère maintenant le cas général α et β quelconques.

(a) On procède exactement comme dans la section 8.1 : on résoud (36) en cherchant une solution sous la forme d'une distribution-fonction x, définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera σ et σ', les sauts de la fonction x et de sa dérivée en zéro :

$$\sigma = x_0 = x(0+0), \tag{38a}$$

$$\sigma' = x'_0 = x'(0+0). \tag{38b}$$

Puisque x appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution-fonction notée T_x. On considère donc que T_x est solution de

$$T''_x + aT_x + bT'_x = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{39}$$

que l'on pourra noter abusivement sous la forme

$$x'' + ax + bx' = \alpha\delta + \beta\delta', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{40}$$

On refait maintenant des calculs identiques à ceux faits en section 7.5.1.1. Dérivons la distribution T_x grâce au lemme 6.29 page 87, ce qui est légitime car la restriction de x à $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^1 et x est nulle sur $\mathbb{R}_-$

$$T'_x = x' + \sigma\delta. \tag{41}$$

On applique cette fois-ci le lemme 6.29 page 87 à x' ce qui est légitime car les restrictions de x' à tout borné $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ est dans $H^1(\Omega)$:

$$T''_x = x'' + \sigma'\delta + \sigma\delta'. \tag{42}$$

Ainsi, (41) et (42), donnent

$$T''_x + aT_x + bT'_x = x'' + \sigma'\delta + \sigma\delta' + ax + bx' + b\sigma\delta$$

et donc

$$T''_x + aT_x + bT'_x = (x'' + ax + bx') + (\sigma' + b\sigma)\,\delta + \sigma\delta'. \tag{43}$$

Ainsi, (39) donne

$$(x'' + ax + bx') + (\sigma' + b\sigma - \alpha)\,\delta + (\sigma - \beta)\delta' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{44}$$

On utilise alors, le lemme 8.1 du cours. On a donc

$$\sigma = \beta, \tag{45a}$$

$$\sigma' + b\sigma = \alpha, \tag{45b}$$

$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) + ax(t) + bx'(t) = 0. \tag{45c}$$

On a donc

$$\sigma = \beta, \tag{46a}$$

$$\sigma' = \alpha - b\sigma. \tag{46b}$$

On résoud (45c) avec les conditions initiales

$$x(0) = \sigma,$$
$$x'(0) = \sigma',$$

en utilisant par exemple les transformée de Laplace (voir cours de OMI2) ou sous matlab symbolique.

(b) La distribution T obtenue est une fonction, de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, mais discontinue en zéro.

(c) Ici, c'est encore plus violent qu'un choc avec une force égale à $f = \alpha\delta$, puisque $f = \alpha\delta + \beta\delta'$.

(d) Si on utilise le résultat de l'exercice de TD 5.3, on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} = -\delta'.$$

Ainsi, la force f est une combinaison linéaire de δ et de la limite de $\frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$ qui peut être vue comme deux chocs successifs opposé appliqués à deux instants, dont l'écart est très bref.

Références

[BBL12] J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques. Applications aux modèles avec frottement ou impact.* Collection Mécanique des structures. Ouvrage traduit en anglais (voir [BBL13]).Voir `http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html` Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol). Hermès Science Publications/Lavoisier, 2012. 532 pages.

[BBL13] J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems. Applications to Models with Friction or Impact.* Traduction en anglais de [BBL12]. Voir `http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/product` Wiley-ISTE, 2013. 512 pages.

[Buc92] H. Buchwalter. *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 BUC, 4 ième étage). Ellipses, 1992.