Mécanique 4A OMI3 Automne 2016

Corrigé de l'examen du 28 Novembre 2016

Correction de l'exercice 1.

(1) Voir la définition dans l'équation (2.52) du cours.

(2) Très classiquemenent, z^n est défini, pour n entier et z complexe, comme étant le produit de n facteurs égaux à z. Cela est vrai pour n entier naturel non nul. On peut aussi définit cela pour n nul en posant par convention $z^0 = 1$. On peut aussi adopter la définition récurrente suivante : pour z complexe quelconque,

$$z^0 = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n = zz^{n-1}.$$

Naturellement, cette définition a un sens pour z dans $\mathbb{R}_-$.

(3) Ces deux définitions sont en fait rigoureusement équivalentes. En effet, si on adopte la définition de l'équation (2.52) du cours, on alors grâce à la propriété 2.17 du cours

$$z^n = e^{n \operatorname{Ln} z} = \left(e^{\operatorname{Ln} z}\right)^n = z^n.$$

Cela n'a pas de sens *a priori* si z est dans $\mathbb{R}_-$, mais on pourrait étendre cela sur $\mathbb{R}_-$ par continuité.

Correction de l'exercice 2.

On utilise la méthode des résidus et on pourra consulter par exemple [Buc92, p. 118-119] (qui a inspiré directement cette correction) ou
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_de_Fresnel`

(1) On choisit les paramétrages successifs suivants de l'arc de cercle Γ_R et les deux segments constituant Γ :

$$\gamma_R : z = Re^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0, \pi/4]\,; \tag{1a}$$
$$\text{segment horizontal } I_1 : z = t \text{ pour } t \in [0, R]\,; \tag{1b}$$
$$\text{segment oblique } I_2 : z = te^{i\frac{\pi}{4}} \text{ pour } t \in [R, 0]. \tag{1c}$$

On a aussi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz.$$

Ainsi, grâce aux paramétrages (1), il vient pour chacun d'eux, $dz = Rie^{i\theta}d\theta$, $dz = dt$ et $dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dt$, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= Ri\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\theta}e^{-R^2e^{2i\theta}}d\theta + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt,\\ &= Ri\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\theta}e^{-R^2\cos(2\theta)-iR^2\sin(2\theta)}d\theta + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt,\end{aligned}$$

soit, en posant $\phi = 2\theta$ dans la première intégrale :

$$= \frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-R^2\cos\phi-iR^2\sin\phi}d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt,$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt. \tag{2}$$

(2) (a) La fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0,\pi/2]$, dont on déduit que la courbe est au dessus de sa corde, d'équation $y = 2\phi/\pi$, soit

$$\forall\psi\in[0,\pi/2],\quad \sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi. \tag{3}$$

(b) On en déduit donc

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi\right|,\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\phi} d\phi,\end{aligned}$$

soit, en posant $\psi = \pi/2 - \phi$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\psi} d\psi,\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{2}{\pi}\psi} d\psi,\\ &= -\frac{\pi}{2R^2}\left(e^{-R^2}-1\right),\\ &= \frac{\pi}{2R^2}\left(1-e^{-R^2}\right),\\ &\leq \frac{\pi}{2R^2},\end{aligned}$$

et donc que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi\right| \leq \frac{\pi}{2R^2}. \tag{4}$$

(3) Posons

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt. \tag{5}$$

On admet que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{6}$$

Remarque 1. Formellement (mais ce calcul est totalement justifié *a posteriori*), on écrit successivement

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy,\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy,\end{aligned}$$

ce que l'on écrit en polaire sous la forme (puisque $dxdy = dS = rdrd\theta$) :

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{\theta\in[0,\pi/2],r\in\mathbb{R}_+} e^{-r^2} rdrd\theta, \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr, \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et la formule des résidus et (2) impliquent donc, pour tout R,

$$\frac{1}{2}Ri\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-R^2\cos\phi - iR^2\sin\phi} d\phi + \int_0^R e^{-t^2}dt - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt = 0. \tag{7}$$

Si on fait tendre R vers l'infini dans (7), les résultats (4) et (6) impliquent donc que $\int_0^R e^{-it^2}dt$ admet une limite quand R tend vers l'infini qui vérifie

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-it^2}dt = 0$$

On en déduit donc

$$\int_0^\infty e^{-it^2}dt = e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i),$$

et en séparant partie réelle et imaginaire, on en déduit finalement

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos^2 x dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \\ \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.

(1) Il suffit de remarquer que la fonction R est bien une fraction rationnelle en X et Y dont le dénominateur $Y-2$ ne s'annulle pas sur le cercle unité (puisque $|Y| \leq 1$ ne peut être égal à 2).

Ainsi, en considérant la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

on sait que

$$I = 2i\pi\sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de f situés à l'intérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$. Plus précisément, la fonction f est égale à

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz}\frac{1}{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)-2}, \\ &= \frac{2}{z^2-1-4iz} \end{aligned}$$

et donc
$$f(z)=\frac{2}{z^2-4iz-1}.$$

(2) Pour déterminer les zéros du dénominateur, on calcule le discriminant réduit du polynôme du second degré : $\Delta'=(-2i)^2+1=-3$ et donc les deux racines de ce dénominateur valent $2i\pm i\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})i$. Seul le pôle $(2-\sqrt{3})i$ est à l'intérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$.

Les deux racines du dénominateur étant distinctes, les pôles sont d'odre un et on sait que le cours nous donne :
$$\begin{aligned}\text{Rés}(f,(2-\sqrt{3})i)&=\frac{2}{\left[z^2-4iz-1\right]'_{z=(2-\sqrt{3})i}},\\&=\frac{2}{\left[2z-4i\right]'_{z=(2-\sqrt{3})i}},\\&=\frac{2}{4i-2\sqrt{3}i-4i},\\&=\frac{2}{-2\sqrt{3}i},\\&=-\frac{1}{\sqrt{3}i},\\&=\frac{\sqrt{3}i}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après ce qui précède, on a finalement
$$I=2i\pi\sum_k \text{Rés}(f,\alpha_k)=2i\pi\times\frac{\sqrt{3}i}{3}$$
et donc finalement,
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin t-2}dt=-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

(3) Pour calculer l'intégrale I, on peut de façon générale faire le changement de variable (sur les bons intervalles) $u=\tan(t/2)$ et calculer le sinus intervenant grâce à $sin(t)=2u/(1+u^2)$ et se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle, ce qui oblige ensuite à décomposer en éléments simples et faire de longs et fastidieux calculs.

On peut aussi remarquer que $\sin(\pi-t)=-\sin(t-\pi)=\sin(t)$ et appliquer les régles de Bioche qui conseillent de poser $u=\sin t$. On se ramène alors à un calcul plus simple de l'intégrale d'une fraction rationnelle, mais qu'il faut tout de même traiter.

Plus de détails dans [Bas16, Annexe Quelques calculs de primitives].

Correction de l'exercice 4.

(1) La fonction f_n tend simplement vers la fonction qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^*$ et $+\infty$ en zéro.

(2) Il suffit d'utiliser l'exercice 5.1 de TD et de poser
$$f(x)=e^{-x^2},$$
d'intégrale $\sqrt{\pi}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, puisque
$$f_n(x)=ne^{-n^2x^2}=nf(xn),$$
la limite la suite de distributions-fonctions (f_n) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est égale à $\left(\int_{\mathbb{R}} f\right)\delta=\sqrt{\pi}\delta$.

Correction de l'exercice 5.

(1) Sur chaque intervalle $[n, n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$, E est constante et égale à n, soit

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in [n, n+1[, \quad E(x) = n. \tag{8}$$

(2) La fonction E est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En chaque entier n, $n \in \mathbb{Z}$, elle présente un saut de hauteur 1. Si la formule des sauts était vraie pour un ensemble infini (discret) de discontinuité, on pourrait écrire directement

$$E' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_n.$$

Cela est vrai, mais il faut le montrer.

Proposons deux preuves.

(a) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_n égale à E sur $[-n, n]$ et nulle sinon. La fonction E_n tend simplement sur $\mathbb{R}$ vers E quand n tend vers l'infini. Cette limite a aussi lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et si n est assez grand pour que le support de ϕ (borné) soit inclus dans $[-n, n]$. On a donc, à partir de $n \geq N$,

$$\langle E_n, \phi \rangle = \langle E, \phi \rangle$$

et donc la limite quand n tend vers l'infini de $\langle E_n, \phi \rangle$ existe et vaut $\langle E, \phi \rangle$. On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} E_n = E, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

ce qui implique aussi

$$\lim_{n \to +\infty} E_n' = E', \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{9}$$

Par ailleurs, à n fixé, la formule des sauts donne

$$E_n' = \sum_{|k|<n} \delta_k \tag{10}$$

Comme précédemment, on vérifie que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{|k|<n} \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{11}$$

Compte tenu de (9), (10), (11), on a donc

$$E' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k.$$

(b) On considère la fonction de Heaviside H dont on rappelle ici la définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Le fait que $H(0) = 1$ n'a en principe pas d'incidence sur les calculs de distributions fait presque partout, mais c'est important de le spécifier dans cet exercice sur la partie entière. Montrons que l'on peut écrire (8) sous la forme d'une somme faisant intervenir H.

Supposons tout d'abord $x \geq 0$. Posons

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H(x-k).$$

Cette somme est finie et vaut $E(x)$. En effet, d'après (12) $H(x-k)$ est non nul et vaut 1 ssi $x - k \geq 0$ et $k \geq 1$ soit $1 \leq k$ et $k \leq x$ soit encore $1 \leq k$ et $k \leq E(x)$. On a donc

$$F(x) = \sum_{1 \leq k \leq E(x)} H(x-k) = \sum_{1 \leq k \leq E(x)} 1 = E(x).$$

Notons aussi que si on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_+(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H(x-k), \tag{13}$$

alors cette somme est finie pour tout x et nulle si $x < 0$. On a déjà vu le cas $x \geq 0$. Si $x < 0$, alors pour tout $k \geq 1$, $x - k < -k < 0$ et donc cette somme est nulle. Finalement, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_+(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Supposons maintenant que $x < 0$ et que x est non entier. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq -1$. Si $x \in]p, p+1[$, alors $E(x) = p$. On a aussi $-x \in]-p-1, -p[$ et donc $E(-x) = -p-1$. Ainsi,

$$E(x) = p = -(E(x-)+1) = -E(-x) - 1,$$

et d'après (14)

$$E(x) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} -H(-x-k) \right) - 1.$$

Remarquons aussi que

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad -H(-y) + 1 = H(y),$$

et donc, puisque x est non entier

$$E(x) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} H(x+k) - 1 \right) - 1,$$

cette somme étant finie. On peut aussi l'écrire

$$E(x) = \left(\sum_{k \in -\mathbb{N}^*} H(x-k) - 1 \right) - 1,$$

ou encore

$$E(x) = \sum_{k \in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1,$$

puisque pour $x < 0$, $H(x) = 0$. Comme précédemment, on montre que si l'on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_-(x) = \sum_{k \in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1, \tag{15}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_-(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{16}$$

Si x est entier, on peut vérifier que cette équation n'est plus vraie mais, au sens des distributions, cela nous est égal. Compte tenu de (14) et (16), on a donc

$$E(x) = E_+(x) + E_-(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H(x-k) + \sum_{k \in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1, \text{ p.p sur } \mathbb{R}. \tag{17}$$

On ne peut pas écrire

$$E(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H(x-k) + \sum_{k \in -\mathbb{N}} H(x-k) - \sum_{k \in -\mathbb{N}} 1,$$

car la somme $\sum_{k \in -\mathbb{N}} 1$ est infinie. Les sommes intervenant dans (17) sont finies et on peut montrer, comme dans la preuve (2a), que cette égalité a lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme série de distributions :

$$E = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H(.-k) + \sum_{k \in -\mathbb{N}} H(.-k) - 1, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Puisque

$$H'(.-k)=\delta_k, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

on peut dériver terme à terme pour obtenir :

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \delta_k + \sum_{k\in-\mathbb{N}} \delta_k, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

et donc

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{19}$$

Références

[Bas16] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2016. 85 pages.

[Buc92] H. Buchwalter. *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 BUC, 4 ième étage). Ellipses, 1992.