Corrigé de l'examen du 23 Novembre 2018

Correction de l'exercice 1.

(1) Vrai : voir (1.7) page 4.
(2) vrai : voir proposition 1.13 page 8.
(3) Vrai : voir lemme 3.36 page 40.
(4) Vrai : voir la formule des sauts (6.32) page 88.
(5) Faux : voir exemple 6.29 page 86.

Correction de l'exercice 2.
On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \cos(z)\, e^{iz}$$

Déterminer

$$I = \int_\gamma f(z)dz,$$

où γ est le segment $[A, B] = [1 + i, 3 + 2\, i]$.

Correction de l'exercice 3.

(1) La primitive de $z \mapsto 1/z^2$ (au sens complexe) est $F(z) = -1/z$ sur $\mathbb{C}^*$.
(2) D'après le cours, on en déduit :

$$\mathcal{I} = F(z_2) - F(z_1). \tag{1}$$

On a donc, à y fixé,

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} &= -\left[\frac{1}{z}\right]_{z=z_1}^{z=z_2},\\ &= -\left[\frac{1}{z}\right]_{z=iy}^{z=1+iy},\\ &= -\frac{1}{1+iy} + \frac{1}{iy},\\ &= \frac{-iy+1+iy}{(iy)(1+iy)},\\ &= \frac{1}{iy-y^2},\\ &= \frac{-iy-y^2}{|iy-y^2|^2},\\ &= -\frac{iy+y^2}{y^2+y^4},\end{aligned}$$

et, puisque $y > 0$:

$$= -\frac{i+y}{y+y^3},$$

et donc
$$\mathcal{I} = -\frac{i+y}{y+y^3}. \tag{2}$$

(3) Remarquons que, pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$ où $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{1}{z^2} = \frac{\overline{z}^2}{z^2\overline{z}^2} = \frac{(x-iy)^2}{(z\overline{z})^2} = \frac{x^2-y^2+2xyi}{|z|^2} = \frac{x^2-y^2+2xyi}{(x^2+y^2)^2},$$
et donc
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall z = x+iy \in \mathbb{C}, \quad \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{3}$$

(4) À $y > 0$ fixé, on paramètre le segment d'extrémités $z_1 = iy$ et $z_2 = 1+iy$ par $\gamma(x) = x+iy$ avec $x \in [0,1]$. On a donc $dz = \gamma'(x) = dx$ et, d'après le cours
$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \int_{x=0}^{x=1} \frac{dx}{(x+iy)^2}, \tag{4}$$
et ainsi
$$\operatorname{Re}\left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\int_{x=0}^{x=1} \frac{dx}{(x+iy)^2},\right) = \int_{x=0}^{x=1} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(x+iy)^2},\right) dx,$$
et donc, d'après (3)
$$\operatorname{Re}\left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2}\right) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$
et, enfin, d'après (2) :
$$-\operatorname{Re}\left(\frac{i+y}{y+y^3}\right) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$
soit
$$\forall y > 0, \quad \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\frac{1}{1+y^2}. \tag{5}$$

Remarque 1. Si on intègre de 0 à $t > 0$, on obtient
$$\forall y > 0, \quad \forall t > 0, \quad \int_0^t \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\frac{t}{t^2+y^2}. \tag{6}$$

(5) C'est possible mais beaucoup plus long, comme le montre la suite. Pour alléger le texte principal de cette correction, la correction de cette question figure dans l'annexe A page 8.

Correction de l'exercice 4.

(1) (a) Par définition de T_n donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta', \tag{7}$$
on a
$$\begin{aligned} a_n &= \langle T_n, \phi \rangle, \\ &= \left\langle \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta', \phi \right\rangle, \\ &= \langle \delta, \phi \rangle - \left\langle \delta_{\frac{1}{n}}, \phi \right\rangle - \frac{1}{n}\langle \delta', \phi \rangle, \\ &= \phi(0) - \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\phi'(0) \end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \phi(0) - \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\phi'(0). \tag{8}$$

Puisque ϕ est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \phi\left(\frac{1}{n}\right) = \phi(0),$$

et donc, d'après (8),

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{9}$$

(b) Par définition, la suite de distribution T_n tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) (a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction ϕ sur l'intervalle $[0, 1/n]$ à l'ordre deux fournit

$$\phi\left(\frac{1}{n}\right) = \phi(0) + \frac{1}{n}\phi'(0) + \frac{1}{2n^2}\phi''(\xi_n), \tag{10}$$

où ξ_n appartient à $[0, 1/n]$. Puisque ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact sur $\mathbb{R}$, on peut poser

$$M = \frac{1}{2}\max_{x\in\mathbb{R}} \left|\phi''(x)\right|. \tag{11}$$

De (8) et (10), on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{1}{2n^2}\phi''(\xi_n),$$

et, donc grâce à (11), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n| \leq \frac{M}{n^2}. \tag{12}$$

(b) Puisque la série de terme général $1/n^2$ est convergente, par comparaison, la série numérique de terme général a_n est absolument convergente donc convergente.

(c) Ainsi pour tout ϕ, la série de terme $\langle T_n, \phi\rangle$ est convergent et donc, la série de distribution de terme général T_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 5.

Cet exercice reprend l'exercice de TD 6.13.

(1) On a vu dans l'exercice de TD 6.2 que la limite de (f_n) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est δ.

(2) Puisque (f_n) tend vers δ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d'après le lemme 6.41 du cours, la distribution-fonction $(f_n^{(k)})$ tend vers $\delta^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(3) (a) On peut appliquer le résultat de la fonction 2, mais puisque f (donc f_n) est discontinue, f_n' n'est pas une distribution-fonction.

(b) On peut appliquer le résultat de la fonction 2 et puisque f (donc f_n) est dérivable presque partout, f_n' est une distribution-fonction qui converge vers δ' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si $k \geq 2$, comme précédement, on peut affirmer que f_n'' tend vers δ'' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais f_n'' n'est plus une distribution-fonction.

(c) On a

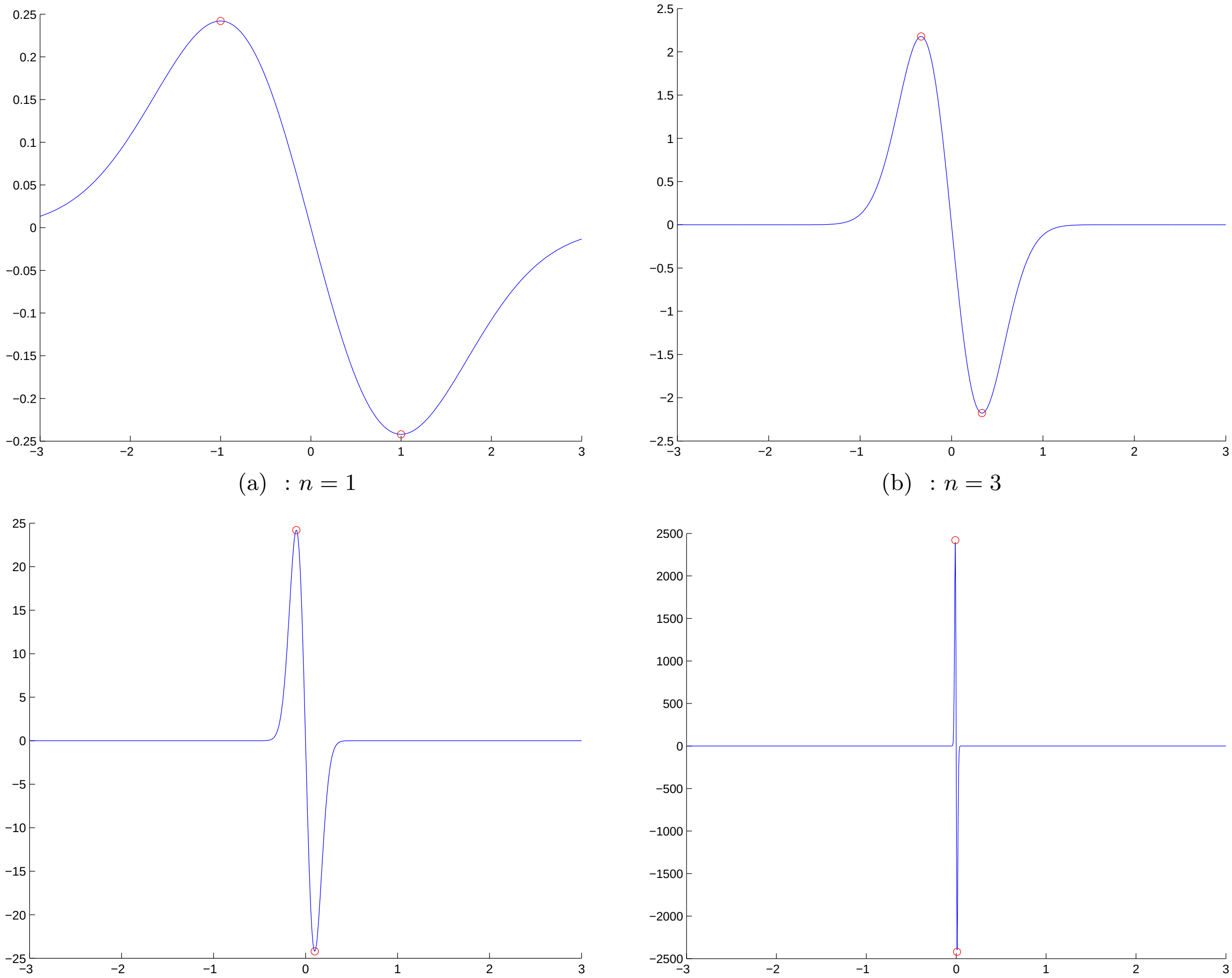
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \tag{13}$$

et donc, puisque $f_n(x) = nf(nx)$

$$f_n'(x) = -\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2x^2/2}x. \tag{14}$$

On montre aussi que

$$f_n''(x) = \frac{n^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2x^2/2}(n^2x^2 - 1), \tag{15}$$



(a) : $n = 1$ (b) : $n = 3$ (c) : $n = 10$ (d) : $n = 100$

FIGURE 1. La réprésentation de la fonction f_n' pour quelques valeurs de n.

qui est s'annulle en $\pm 1/n$, positive sur $[1/n, \infty[$ et $]-\infty, -1/n[$ et négative sur $[-1/n, 1/n]$. On en déduit le tableau de variation de f'.

Voir les figures 1 et 2.

(4) On a toujours $f_n(x) = nf(nx)$ et donc, pour tout k

$$f_n^{(k)}(x) = n^{k+1} f^{(k)}(nx). \tag{16}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $f^{(k)}$ où f est donnée par (13),

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{17}$$

notée sous la forme

$$f(x) = \alpha e^{\beta x^2} \tag{18}$$

où $\alpha = 1/\sqrt{2\pi}$ et $\beta = -1/2$.

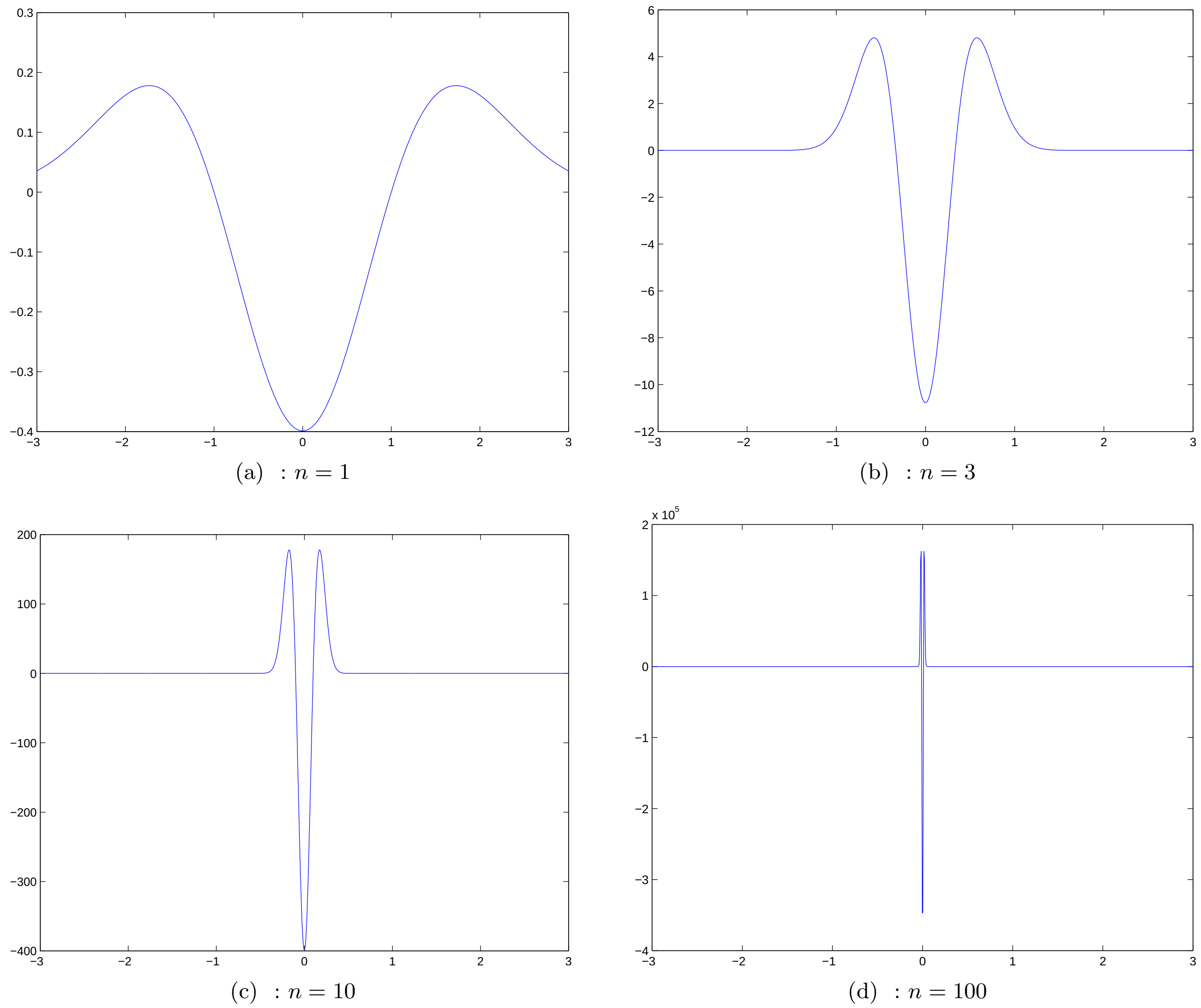


FIGURE 2. La réprésentation de la fonction f_n'' pour quelques valeurs de n.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$f^{(k)}(x) = \alpha p_k(x) e^{\beta x^2} \tag{19}$$

où p_k est un polynôme. Pour $k = 0$, c'est vrai avec $p_0(x) = 1$. Supposons (19) vraie pour k et démontrons-là pour $k + 1$: on a

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(\alpha p_k(x) e^{\beta x^2}\right)', \\ &= \alpha e^{\beta x^2} \left(p_k'(x) + 2\beta x p_k(x)\right), \end{aligned}$$

et ainsi (19) est vraie à l'ordre $k + 1$ en considérant le polynôme p_{k+1} défini par

$$p_{k+1}(x) = p_k'(x) + 2\beta x p_k(x), \tag{20}$$

ce qui fournit donc une relation de récurrence. Par exemple, on a $p_0(x)=1$ et donc

$$p_1(x)=2\beta x. \tag{21}$$

Ainsi d'après (16)

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \alpha n^2 f'(nx),\\
&= \alpha n^2 p_1(nx) e^{\beta(nx)^2},\\
&= 2\alpha n^2 \beta n x e^{\beta(nx)^2},\\
&= -\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}} x e^{-n^2x^2/2}.
\end{aligned}$$

ce qui redonne bien (14). On a aussi

$$p_2(x)=(2\beta x)'+2\beta x(2\beta x)=4\beta^2x^2+2\beta,$$

et donc

$$\begin{aligned}
f_n''(x) &= \alpha n^3 f''(nx),\\
&= \alpha n^3 (4\beta^2 n^2 x^2+2\beta) e^{\beta n x^2},\\
&= \frac{n^3}{\sqrt{2\pi}}(n^2x^2-1) e^{-n^2x^2/2},
\end{aligned}$$

ce qui redonne bien (15).

Correction de l'exercice 6.

Cet exercice reprend en fait l'exemple 6.51 page 93 et la remarque 6.52 page 95 du cours, dont nous rappelons les étapes.

(1) Il suffit d'appliquer le lemme 6.49 et l'exemple 6.50 : on écrit dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{e^{inx}}{n}\right)'=\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{e^{inx}}{n}\right)'=i\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}e^{inx}=i\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}-i=2i\pi\delta-i=(2i\pi H-ix)'$$

En utilisant la proposition 6.40 du cours, on conclut qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{e^{inx}}{n}=i\left(2\pi H-x\right)+C. \tag{22}$$

(2) (a) Notons tout d'abord que, dans $\mathcal{D}'\left(]-1,1[\right)$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{e^{inx}}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{e^{inx}}{n},$$

dans la seconde somme, on pose $n'=-n$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-inx}}{-n},\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(e^{inx}-e^{-inx}\right),\\
&= 2i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n},
\end{aligned}$$

et (22) donne donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \text{ dans } \mathcal{D}'\left(]-1,1[\right). \tag{23}$$

(b) On a aussi, par définition,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(]-1,1[\right), \quad \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\langle \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle,$$

et donc, puisque $\sin(nx)$ est une distribution-fonction

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(]-1,1[\right), \quad \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\phi(x)dx. \tag{24}$$

Par ailleurs, on a aussi, par définition ,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\left(]-1,1[\right), \quad \left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \right) \phi(x)dx. \tag{25}$$

(c) Choisissons une fonction ϕ paire [1] dans (24) :

$$\left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\phi(x)dx = 0,$$

puisque chacune des intégtrales $\int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\phi(x)dx$ est nulle, par imparité de $\sin(nx)\phi(x)$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\phi(x)dx = 0. \tag{26}$$

Si on choisit la même fonction paire dans (25), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i} \right) \phi(x)dx, \\
&= \pi \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x\phi(x)dx + \frac{C}{2i} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx, \\
&= \pi \int_0^{+\infty} \phi(x)dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x\phi(x)dx + \frac{C}{2i} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx,
\end{aligned}$$

ce qui fait par parité et imparité :

$$= \pi \int_0^{+\infty} \phi(x)dx + \frac{C}{i} \int_0^{+\infty} \phi(x)dx,$$

et donc

$$\left\langle \pi H - \frac{x}{2} + \frac{C}{2i}, \phi \right\rangle = \left(\pi + \frac{C}{i} \right) \int_0^{+\infty} \phi(x)dx. \tag{27}$$

(d) Enfin, de (23), (24), (25), (26) et (27), on conclut

$$\left(\pi + \frac{C}{i} \right) \int_0^{+\infty} \phi(x)dx = 0. \tag{28}$$

On peut montrer que ϕ peut être choisie telle que $\int_0^{+\infty} \phi(x)dx \neq 0$ et donc on a d'après (28), on a $\pi + \frac{C}{i} = 0$ et donc

$$C = -i\pi. \tag{29}$$

1. En prenant par exemple $\psi \in \mathcal{D}\left(]-1,1[\right)$, puis sa partie paire $\phi(x) = (\psi(x) + \psi(-x))/2$.

(3) De (23), on déduit aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x}{2} + \frac{-i\pi}{2i} \text{ dans } \mathcal{D}'\left(]-1,1[\right),$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \pi H - \frac{x+\pi}{2} \text{ dans } \mathcal{D}'\left(]-1,1[\right). \tag{30}$$

Annexe A. Corrigé de la question 5 de l'exercice 3

Avant de calculer

$$\forall y > 0, \quad F(y) = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx, \tag{31}$$

remarquons, que pour tout $y > 0$ fixé, l'intégrande f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \tag{32}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
Plusieurs façons sont possibles.

(1) On peut remarquer que, si G est définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad G(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

alors, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ainsi, à $y > 0$ fixé, une primitive de f (par rapport à x) est $x \mapsto G(x,y)$ et on a alors

$$F(y) = G(1,y) - G(0,y),$$

soit

$$\forall y > 0, \quad \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\frac{1}{1+y^2}. \tag{33}$$

Remarque 2. Sous matlab, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \tag{34}$$

(2) Cette façon de faire n'est pas tout à fait satisfaisante, car elle suppose le résultat connu ! Procédons autrement pour calculer F définie par (31). Procédons par étape. On renvoie pour le calcul suivant par exemple à [Bas17, section "D.1 Primitives de fractions rationnelles", dans "Annexe D"].

(a) En fait, on aura besoin de calculer, plus tard, pour $t > 0$, l'intégrale suivante :

$$\forall t > 0, \quad \forall y > 0, \quad F_t(y) = \int_0^t \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx. \tag{35}$$

(b) À $y > 0$, on décompose tout d'abord l'intégrande en éléments simples. On cherche donc α, β, γ et δ (qui dépendent éventuellement de y) tels que

$$\forall x, \quad \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\alpha(y)x + \beta(y)}{x^2+y^2} + \frac{\gamma(y)x + \delta(y)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{36}$$

Par parité, (en changeant x en $-x$, cette décomposition est identique), on a donc $\alpha=\gamma=0$. On a donc

$$\forall x,\quad \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\beta(y)}{x^2+y^2}+\frac{\delta(y)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{37}$$

On multiplie par $(x^2+y^2)^2$ et on fait tendre x vers le zéro de $x\mapsto x^2+y^2$, qui est iy :

$$\delta(y)=\left.x^2-y^2\right|_{x=iy}=-y^2-y^2,$$

et donc

$$\delta(y)=-2y^2. \tag{38}$$

On multiplie par x^2+y^2 en on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient donc

$$\beta(y)=1. \tag{39}$$

Bref, compte tenu de (37), (38) et (39), on a

$$\forall x,\quad \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{40}$$

On a donc

$$F_t(y)=\int_0^t \frac{1}{x^2+y^2}dx-2y^2\int_0^t \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dx. \tag{41}$$

on fait le changement de variable, à y fixé, $x=uy$ de sorte que $dx=ydu$ et

$$\begin{aligned}F_t(y)&=y\int_0^{t/y}\frac{1}{(uy)^2+y^2}du-2y^2\times y\int_0^{t/y}\frac{1}{((uy)^2+y^2)^2}du,\\&=\frac{1}{y}\int_0^{t/y}\frac{1}{u^2+1}du-\frac{2}{y}\int_0^{t/y}\frac{1}{(u^2+1)^2}du,\end{aligned}$$

soit

$$F_t(y)=\frac{1}{y}\int_0^{t/y}\frac{1}{u^2+1}du-\frac{2}{y}\int_0^{t/y}\frac{1}{(u^2+1)^2}du. \tag{42}$$

(c) Posons donc

$$F_{1,t}(y)=\int_0^{t/y}\frac{1}{u^2+1}du, \tag{43a}$$

$$F_{2,t}(y)=\int_0^{t/y}\frac{1}{(u^2+1)^2}du, \tag{43b}$$

et calculons chacune des deux intégrales.

(i) Pour calculer $F_{1,t}(y)$, il suffit d'utiliser le fait que $\arctan(u)$ est la primitive de $1/(1+u^2)$:

$$F_{1,t}(y)=\arctan\left(\frac{t}{y}\right). \tag{44}$$

(ii) Pour calculer $F_{2,t}(y)$, on utilise l'un des méthodes proposées dans [Bas17, section "D.1 Primitives de fractions rationnelles", dans "Annexe D"] : on effectue le changement de variable $u=\tan\phi$ de telle sorte que $\phi=\arctan(u)$ et

$$\frac{du}{d\phi}=u'(\phi)=\frac{1}{\cos^2\phi}.$$

On a aussi

$$1+u^2=1+\tan^2\phi=\frac{1}{\cos^2\phi},$$

et donc

$$F_{2,t}(y)=\int_0^{t/y}\frac{1}{(u^2+1)^2}du=\int_0^{\arctan(t/y)}\cos^4\phi\frac{d\phi}{\cos^2\phi}=\int_0^{\arctan(t/y)}\cos^2\phi d\phi,$$

et donc

$$F_{2,t}(y)=\int_0^{\arctan(t/y)}\cos^2(\phi)d\phi.$$

Linéarisons $\cos^2(\phi)$

$$\cos^2(\phi)=\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\phi)\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}F_{2,t}(y)&=\frac{1}{2}\int_0^{\arctan(t/y)}1+\cos(2\phi)d\phi,\\&=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{4}\left[\sin(2\phi)\right]_0^{\arctan(t/y)},\\&=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right),\end{aligned}$$

et donc

$$F_{2,t}(y)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).\tag{45}$$

On utilise enfin [Bas17, Proposition E.16, dans Annexe E] qui donne

$$\sin(T)=\frac{2u}{1+u^2},\tag{46}$$

où

$$u=\tan(T/2),\tag{47}$$

On applique (46) à T donné par

$$T=2\arctan\left(\frac{t}{y}\right),$$

d'où

$$\tan(T/2)=\frac{t}{y}$$

et, d'après (47)

$$u=\frac{t}{y},$$

et, d'après (46)

$$\sin\left(2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{2u}{1+u^2}=\frac{2\left(\frac{t}{y}\right)}{1+\left(\frac{t}{y}\right)^2}=\frac{2yt}{y^2+t^2},$$

et donc, selon (45)

$$F_{2,t}(y)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\frac{yt}{y^2+t^2}.\tag{48}$$

(iii) Ainsi, de (42), (43), (44) et (48), on déduit

$$F_t(y)=\frac{1}{y}\arctan\left(\frac{t}{y}\right)-\frac{2}{y}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\frac{yt}{y^2+t^2}\right),$$

soit

$$F_t(y)=\frac{1}{y}\arctan\left(\frac{t}{y}\right)-\frac{1}{y}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{y}\times\frac{yt}{y^2+t^2},$$

et donc

$$\forall t,y>0,\quad F_t(y)=-\frac{t}{y^2+t^2},\tag{49}$$

soit, d'après (35),

$$\forall t>0,\quad \forall y>0,\quad \int_0^t \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=-\frac{t}{y^2+t^2}, \tag{50}$$

et, en particulier, pour $t=1$, on a

$$\forall y>0,\quad F_1(y)=-\frac{1}{y^2+1},$$

et donc, d'après (35), il vient

$$\forall y>0,\quad \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=-\frac{1}{y^2+1}. \tag{51}$$

Remarque 3. Sous matlab, on obtient bien

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=-\left(y^2+1\right)^{-1},$$
$$\int_0^t \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=-\frac{t}{t^2+y^2}.$$

(3) Une autre façon beaucoup plus élégante, aussi rapide que le point 1 et efficace que le point 2 consiste à utiliser l'astuce suivante : à $y>0$ fixé, on considère la primitive $\mathcal{K}$ définie par

$$\mathcal{K}=\int \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx. \tag{52}$$

On écrit

$$\mathcal{K}=\int x^2\left(x^2+y^2\right)^{-2}dx=\frac{1}{2}\int x\left(2x\left(x^2+y^2\right)^{-2}\right)dx,$$

et on fait une intégration par partie en posant

$$u=x,$$
$$u'=1,$$

et

$$v'=2x\left(x^2+y^2\right)^{-2}=U'U^{-2},\ \text{où } U=x^2+y^2,$$

et on a donc

$$v=\frac{1}{-2+1}U^{-2+1}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

On a alors

$$\mathcal{K}=\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+\int\frac{dx}{x^2+y^2}\right). \tag{53}$$

On écrit ensuite

$$\int \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=2\int \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx-\int \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx,$$
$$=2\mathcal{K}-\int\frac{dx}{x^2+y^2},$$

et, d'après (53)

$$\begin{aligned}&= -\frac{x}{x^2+y^2} + \int \frac{dx}{x^2+y^2} - \int \frac{dx}{x^2+y^2},\\ &= -\frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

On obtient bien

$$\int \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = -\frac{x}{x^2+y^2}, \tag{54}$$

dont on déduit aisément (50) et (51).

Remarque 4. Comme dans la remarque 2, sous matlab, on obtient bien (54) qui est la réciproque de (34) :

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\frac{x}{x^2+y^2} \tag{55}$$

Remarque 5. Cet exercice provient en fait de [Lam08, exercice 8.P 40] ; il est utilisé pour calculer l'intégrale double :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx \right) dy.$$

Remarque 6. Le fait que le calcul de F ne soit pas valable pour $y = 0$ n'est pas gênant car l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $y = 0$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 7. La fonction f définie par (32) est continue (donc mesurable) sur $]0,1]\times]0,1]$; en revanche, elle n'est pas intégrable au sens de Lebesgue (voir annexe J du cours). On peut le montrer de plusieurs façons possibles. Montrons donc que

$$f \notin L^1([0,1] \times [0,1]). \tag{56}$$

(1) Si (56) était fausse, on aurait alors $f \in L^1([0,1] \times [0,1])$, ce qui est équivalent à

$$|f| \in L^1([0,1] \times [0,1]), \tag{57}$$

ce qui est aussi équivalent (puisque f est mesurable)

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)| dxdy < +\infty. \tag{58}$$

Soit $a \in]0,1[$ fixé. Considérons la partie S_a de $\mathbb{R}^2$ définie, en polaire, par

$$S = \{(\rho, \theta), \quad \rho \in [0,a], \quad \theta \in [0, \pi/4]\}. \tag{59}$$

Voir la figure 3. D'après (58) et puisque $S_a \subset [0,1] \times [0,1]$, on peut écrire successivement dans [2] $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$+\infty > \int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)| dxdy, \tag{60}$$

On a donc

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)| dxdy \geq \int_S |f(x,y)| dxdy.$$

2. Dans tout ce corrigé, on intégre des fonctions positives et mesurables g, donc on peut toujours considérer les valeurs

$$\int g(x) dx \leq +\infty.$$

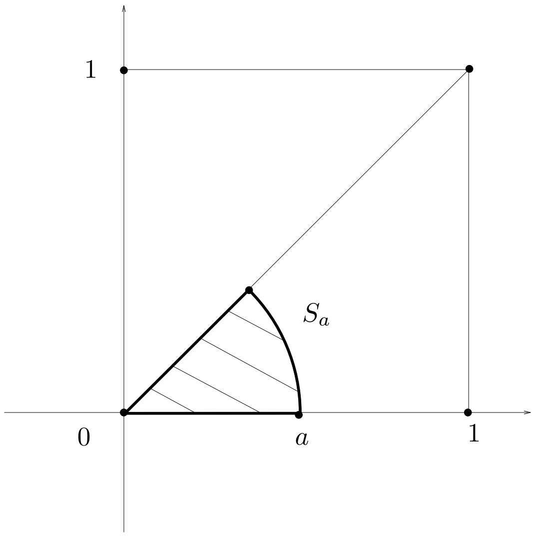


FIGURE 3. La partie S_a de $\mathbb{R}^2$.

On fait un changement de variable en polaire [3] avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ et $dxdxy = \rho d\rho d\theta$. On a donc successivement :

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy \geq \int_{\substack{\rho\in[0,a]\\ \theta\in[0,\pi/4]}} |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\, \rho d\rho d\theta$$

et d'après l'expression de f donnée par (32), cela vaut :

$$\begin{aligned}
&= \int_{\substack{\rho\in[0,a]\\ \theta\in[0,\pi/4]}} \left|\frac{\rho^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}{\rho^4\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^2}\right| \rho d\rho d\theta, \\
&= \int_{\substack{\rho\in[0,a]\\ \theta\in[0,\pi/4]}} \left|\frac{\rho^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}{\rho^4}\right| \rho d\rho d\theta, \\
&= \int_{\substack{\rho\in[0,a]\\ \theta\in[0,\pi/4]}} \frac{1}{\rho}\left|\cos^2\theta - \sin^2\theta\right| d\rho d\theta.
\end{aligned}$$

0n peut découpler l'intégrale double en le produit de deux intégrales simples d'après le théorème de Fubini [4] et on a donc

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy \geq \int_0^a \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{\pi/4} \left|\cos^2\theta - \sin^2\theta\right| d\theta,$$

et puisque, sur $[0,\pi/4]$, on a $\cos^2\theta \geq \sin^2\theta$:

$$= \int_0^a \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta - \sin^2\theta d\theta.$$

3. Voir [Bas07, Théorème 7.9 p. 88]. Attention, celui-là est présenté dans le cadre de l'intégrale de Riemann et ici, on travaille en intégrale de Lebesgue, mais formellement, les deux cadre fournissent le même résultat.

4. Voir [Bas07, Corollaire 6.6 p. 86]. Attention, celui-là est présenté dans le cadre de l'intégrale de Riemann et ici, on travaille en intégrale de Lebesgue, mais formellement, les deux cadre fournissent le même résultat. Voir aussi la note de base page 2 page ci-contre.

La seconde intégrale
$$\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta - \sin^2\theta d\theta$$
est clairement finie, car on intègre une fonction continue sur un compact (fermé borné) et la première vaut
$$\int_0^a \frac{d\rho}{\rho} = \ln(a) - \ln(0) = +\infty$$
et donc
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy \geq +\infty,$$
soit
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy = +\infty,$$
ce qui contredit (60).

(2) Une autre façon consiste à raisonner ainsi :

Si (56) était fausse, d'après le théorème de Fubini, on aurait
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx. \tag{61}$$
D'après (5) ou le corrigé de la question 5 (voir par exemple (51)) on a
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\right) dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\arctan(1) + \arctan(0) = -\frac{\pi}{4}.$$
et donc
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = -\frac{\pi}{4}. \tag{62}$$
Pour calculer l'autre intégrale double, il ne faut pas tout recalculer et remarquer plutôt que (32) donne
$$\forall x, y \in [0,1]^2, \quad f(y,x) = -f(x,y). \tag{63}$$
puis que
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(y,x)dy\right) dx,$$
et comme les variable sont muettes, on peut remplacer x par y et y par x :
$$= -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy,$$
et d'après (62) :
$$= \frac{\pi}{4},$$
et donc
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \frac{\pi}{4}. \tag{64}$$
Ainsi, (61), (62) et (64) sont absurdes car $-\pi/4 \neq 0$.

(3) Une dernière façon consiste à raisonner ainsi :

Si (57) était vraie, on aurait alors de nouveau (58). On découpe cette fois-ci le carré $[0,1]\times[0,1]$ en deux triangles

$$[0,1]\times[0,1] = S_1 \cup S_2, \tag{65}$$

où

$$S_1 = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1], \quad x\leq y\}, \tag{66}$$
$$S_2 = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1], \quad x> y\}, \tag{67}$$

que l'on peut remplacer par (car on rajoute un segment, de mesure nulle)

$$[0,1]\times[0,1] = S_1 \cup S_2, \tag{68}$$

où

$$S_1 = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1], \quad x\leq y\}, \tag{69}$$
$$S_2 = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1], \quad x\geq y\}, \tag{70}$$

On a donc

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy = \int_{S_1} |f(x,y)|dxdy + \int_{S_2} |f(x,y)|dxdy. \tag{71}$$

Dans la seconde intégrale, on fait maintenant le changement de variable [5] suivant :

$$\begin{cases} u = y, \\ v = x. \end{cases} \tag{72}$$

On calcule le jacobien et on obtient

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la valeur absolue de déterminant vaut

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1. \tag{73}$$

On constate que ce changement de variable envoie S_2 sur S_1. (71) donne donc [6]

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy &= \int_{S_1} |f(x,y)|dxdy + \int_{S_1} |f(v,u)|dudv, \\ &= \int_{S_1} |f(x,y)|dxdy + \int_{S_1} |f(y,x)|dxdy, \end{aligned}$$

et donc de nouveau grâce à (63)

$$\begin{aligned} &= \int_{S_1} |f(x,y)|dxdy + \int_{S_1} |f(x,y)|dxdy, \\ &= 2\int_{S_1} |f(x,y)|dxdy. \end{aligned}$$

5. Voir [Bas07, Théorème 6.8 p. 87]. Attention, celui-là est présenté dans le cadre de l'intégrale de Riemann et ici, on travaille en intégrale de Lebesgue, mais formellement, les deux cadre fournissent le même résultat.

6. En raisonnant dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ comme dans la note de base page 2 page 12.

On remplace f par son expression en remarquant que, sur S_1, $x \leq y$ et donc

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy &= -\int_{S_1} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy,\\ &= \int_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2\\ 0\leq x\leq y}} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy.\end{aligned}$$

On applique de nouveau Fubini, sous forme intégration en tranches [7] :

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|dxdy = -\int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\right) dy,$$

ce qui vaut, grâce à (6) ou (50) appliqué à $t=y$:

$$\begin{aligned}&= \int_{y=0}^{y=1} \frac{y}{y^2+y^2}dy,\\ &= \int_0^1 \frac{y}{2y^2}dy,\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{y}dy,\\ &= -\frac{1}{2}\ln(0),\\ &= +\infty,\end{aligned}$$

ce qui, de nouveau, finalement, contredit encore (57).

Remarque 8. On obtient sous matlab

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|dxdy = +\infty, \tag{74}$$

ce qui corrobore (56).

Références

[Bas07] J. Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.* Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT25. 2007. 180 pages.

[Bas17] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2017. 97 pages.

[Lam08] C.-H. Lamarque. "Cours d'Analyse". Cours de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État. 2008.

7. Voir [Bas07, Théorème 6.4 p. 85]. Attention, celui-là est présenté dans le cadre de l'intégrale de Riemann et ici, on travaille en intégrale de Lebesgue, mais formellement, les deux cadre fournissent le même résultat.